ÜBER DIE NORMALSTRUKTUR VON MEHRFACH FAKTORISIERTEN GRUPPEN

HELMUT WIELANDT

(received 15 July 1959)

Ein Teil von Philip Halls bekannter Theorie der auflösbaren Gruppen läßt sich, wie im folgenden gezeigt wird, auf beliebige endliche Gruppen G ausdehnen. Wir fragen: Was kann man über die Normalstruktur (Hauptreihen, Kompositionsfaktoren) von G aussagen, wenn man mehrere Zerlegungen von G in Produkte von Untergruppen mit gegebener Normalstruktur kennt? Eine Antwort gibt der folgende Satz, das Hauptergebnis dieser Note:

SATZ 1. *Die Gruppe G endlicher Ordnung enthalte Untergruppen F, G_1, $G_2, \cdots, G_n$ derart, daß $FG_1 = FG_2 = \cdots = FG_n = G$ gilt und daß jeder Kompositionsfaktor von F zu wenigstens einem der n Indizes $|G : G_\nu|$ teilerfremd ist. Dann ist jede Kompositionsfaktorgruppe von G zu einer Kompositionsfaktorgruppe einer Gruppe G_ν isomorph. Genauer: G enthält normale Untergruppen $N_0 = 1 \leqq N_1 \leqq N_2 \leqq \cdots \leqq N_k = G$ derart, daß jede der k Faktorgruppen $N_\kappa/N_{\kappa-1}$ von einer passenden Gruppe G_ν „gedeckt" wird: $N_\kappa \leqq N_{\kappa-1}G_\nu$.*

Die Anwendung dieses Satzes wird durch zwei Bemerkungen erleichtert: Die Voraussetzung $FG_\nu = G$ ist sicher dann erfüllt, wenn $|G : F|$ zu $|G : G_\nu|$ teilerfremd ist; und die Voraussetzung über die Kompositionsfaktorgruppen von F ist sicher dann erfüllt, wenn F auflösbar ist und die n Indizes $|G : G_\nu|$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Der Beweis des Satzes beruht darauf, daß Halls Schlußweise [3] von der Verwendung der Sylowschen Sätze befreit werden kann. Der Kernpunkt ist der folgende Hilfssatz.

HILFSSATZ. *Es sei $G = FH$, und es sei F_1 eine normale Untergruppe von F, deren Ordnung $|F_1|$ zum Index $|G : H|$ teilerfremd ist. Dann enthält H alle zu F_1 in G konjugierten Gruppen.*

BEWEIS. Wir bilden den Durchschnitt $F \cap H = D$. Der Index $|DF_1 : D| = i$ ist ein Teiler von $|F_1|$, denn es ist $i = |F_1 : F_1 \cap D|$. Andererseits ist i auch ein Teiler von $|G : H|$, denn i teilt den Index $|F : D| = |FH : H| = |G : H|$. Wegen der vorausgesetzten Teilerfremdheit von $|F_1|$ und $|G : H|$ ist $i = 1$, $F_1 \leqq D \leqq H$. Bezeichnet nun g ein beliebiges

Element von G, so gibt es wegen $G = FH$ eine Zerlegung $g = fh$, also ist die zu F_1 konjugierte Gruppe $F_1^g = (F_1^f)^h = F_1^h \leqq H^h = H$.

Beweis von Satz 1. Ist $F = 1$, so ist $G_1 = G$; dann ist die Behauptung trivial. Sei weiter $F \neq 1$. Wir wählen einen minimalen Normalteiler F_1 von F. Da F_1 das direkte Produkt isomorpher einfacher Gruppen ist [6, Kap. III Th. 2], welche ihrerseits Kompositionsfaktorgruppen von F sind, ist $|F_1|$ eine Potenz eines Kompositionsfaktors von $|F|$ und daher nach Voraussetzung zu einem passenden Index $|G : G_\nu|$ teilerfremd. Nach dem Hilfssatz enthält G_ν die normale Untergruppe N_1 von G, die von allen Konjugierten von F_1 in G erzeugt wird. N_1 wird also von G_ν gedeckt; jede Kompositionsfaktorgruppe von N_1 ist auch eine von G_ν.

Wir gehen zur Faktorgruppe $\bar{G} = G/N_1$ über. Verstehen wir unter $\bar{F}, \bar{G}_1, \cdots, \bar{G}_n$ die Bilder von $F, G_1, \cdots, G_n$ bei dem natürlichen Homomorphismus von G auf $\bar{G}$, so erfüllen sie die Voraussetzungen des Satzes 1 in $\bar{G}$. Da $|\bar{G}| < |G|$ ist, können wir den Beweis des Satzes durch einen Induktionsschluß beenden.

Wir kommen zur Verallgemeinerung des Hauptsatzes von Hall [3].

Satz 2. *Die Ordnung von G sei $|G| = a_1 a_2 \cdots a_r$, mit $(a_\rho, a_\sigma) = 1$ für $\rho \neq \sigma$. Wir bezeichnen eine Untergruppe von G als eine a-Gruppe, wenn jeder ihrer Kompositionsfaktoren eine der r Zahlen a_ρ teilt. Dann sind je zwei der folgenden drei Aussagen gleichwertig*:

(α) *G ist eine a-Gruppe.*

(β) *G enthält Untergruppen $G_1, \cdots, G_r$ vom Index $|G : G_\rho| = a_\rho$ derart, daß für $\rho \neq \sigma$ stets der Durchschnitt $D_{\rho\sigma}$ aller Gruppen G_τ mit $\rho \neq \tau \neq \sigma$ eine a-Gruppe ist.*

(γ) *G enthält Untergruppen $A_1, \cdots, A_r$ von der Ordnung $|A_\rho| = a_\rho$ derart, daß für $\rho \neq \sigma$ stets $A_\rho A_\sigma = A_\sigma A_\rho$ eine a-Gruppe ist.*

Wenn diese Bedingungen erfüllt sind, dann sind die Kompositionsfaktorgruppen von G die gleichen wie die von $A_1, \cdots, A_r$ zusammen (unter Berücksichtigung der Vielfachheit). Es ist $|D_{\rho\sigma}| = |A_\rho A_\sigma| = a_\rho a_\sigma$ und $A_1 A_2 \cdots A_r = G$.

Der Satz von Hall ergibt sich, wenn man sich auf Primzahlpotenzen $a_\rho = p_\rho^{\alpha_\rho}$ beschränkt. Die Bedingung, daß $D_{\rho\sigma}$ und $A_\rho A_\sigma$ a-Gruppen sein sollen, wird dann überflüssig, weil diese Gruppen die Ordnung $p_\rho^{\alpha_\rho} p_\sigma^{\alpha_\sigma}$ haben und daher nach Burnside [1, p. 323] nur Kompositionsfaktoren p_ρ und p_σ besitzen.

Beweis von Satz 2. Daß (β) aus (α) folgt und (γ) aus (β), ist bekannt [2; 4, p. 318; 5, Th. A3]. Der Vollständigkeit halber deuten wir die einfachen Beweise an.

Aus (α) folgt (β): Die Existenz von G_ρ ergibt sich durch einen Induktionsschluß. Man geht von G zur Faktorgruppe eines minimalen Normalteilers über und benutzt den Satz von Schur über die Existenz der Vertretergruppen [6, Kap. IV, Th. 25]. Da die Indizes a_τ der zur Bildung von $D_{\rho\sigma}$ verwendeten

Gruppen G_τ paarweise teilerfremd sind, ist $|G : D_{\rho\sigma}| = \Pi a_\tau$, also $|D_{\rho\sigma}| = a_\rho a_\sigma$. Jeder Kompositionsfaktor von $D_{\rho\sigma}$ teilt einen Kompositionsfaktor der a-Gruppe G, also ist $D_{\rho\sigma}$ eine a-Gruppe.

Aus (β) folgt (γ): Für $r \leqq 2$ ist nichts zu beweisen. Sei $r > 2$. Wir bilden den Durchschnitt A_ρ aller G_σ mit $\sigma \neq \rho$. Wie eben folgt $|A_\rho| = a_\rho$. Ferner sind A_ρ und A_σ in $D_{\rho\sigma}$ enthalten. Wegen $(a_\rho, a_\sigma) = 1$ folgt $|A_\rho A_\sigma| = a_\rho a_\sigma = |D_{\rho\sigma}|$, also $A_\rho A_\sigma = D_{\rho\sigma} = A_\sigma A_\rho$.

Aus (γ) folgt (α): Sei wieder $r > 2$. Wir bezeichnen das Produkt aller A_σ, $\sigma \neq \rho$, mit G_ρ. Nach den Voraussetzungen von (γ) ist G_ρ eine Untergruppe von G mit dem Index a_ρ. Auf Grund eines Induktionsschlusses bezüglich r können wir annehmen, daß jedes G_ρ eine a-Gruppe ist. Hieraus folgt, daß die Gruppen $G_1, \cdots, G_{r-1}$ zusammen mit $F = G_r$ die Voraussetzungen des Satzes 1 erfüllen: Wenn c ein Kompositionsfaktor von F ist, so teilt c ein a_ρ; wählen wir nun ν so, daß $\rho \neq \nu < r$ ist, so ist c teilerfremd zu $a_\nu = |G : G_\nu|$. Nach Satz 1 folgt, daß jeder Kompositionsfaktor von G auch bei einem G_ν auftritt und daher ein a_ρ teilt. Also ist G eine a-Gruppe.

Es ist $|A_1 A_2 \cdots A_r| = |G|$, daher $A_1 A_2 \cdots A_r = G$.

Baut man eine beliebige Kompositionsreihe von G von oben her ab und bildet man die Durchschnitte mit irgend einer Untergruppe A_ρ der Ordnung a_ρ von G, so erkennt man, daß A_ρ diejenigen Kompositionsfaktorgruppen von G deckt, deren Ordnungen in a_ρ aufgehen, und die übrigen meidet. Die ersteren sind also bis auf Isomorphie mit den Kompositionsfaktorgruppen von A_ρ identisch, auch hinsichtlich der Vielfachheit und der Anordnung in der mittels Durchschnittsbildung hergestellten Kompositionsreihe von A_ρ. Damit ist der Beweis von Satz 2 beendet.

Es ist zu vermuten, daß die Untergruppen der Ordnung a_ρ in einer a-Gruppe auflösbar sind, ausgenommen höchstens einen Wert ρ (denn höchstens ein a_ρ ist gerade), und daß je zwei Untergruppen der gleichen Ordnung a_ρ konjugiert sind [5, Th. D8]. Leichter angreifbar erscheinen die folgenden zwei Fragen.

Welche Voraussetzungen über die Vertauschbarkeit der Sylowgruppen genügen, um die Auflösbarkeit einer Gruppe zu sichern? Wenn z.B. eine Gruppe G der Ordnung $p^\alpha q^\beta r^\gamma s^\delta$ zu den Primzahlen p, q, r Sylowgruppen P, Q, R enthält, die paarweise vertauschbar sind und, jede für sich, mit einer passend gewählten s-Sylowgruppe vertauschbar sind (etwa der Reihe nach mit S, S', S''), so ist G auflösbar. (Man wähle in Satz 1 $F = PQR$, $G_1 = PS$, $G_2 = QS'$, $G_3 = RS''$.)

Wie weit lassen sich die Ergebnisse auf unendliche Gruppen übertragen? Ohne Einschränkung gilt z.B., wie man leicht sieht, der einfachste Sonderfall von Satz 1:

Eine Gruppe, die drei auflösbare Untergruppen mit endlichen, paarweise teilerfremden Indizes enthält, ist auflösbar.

Literatur

[1] Burnside, W., Theory of groups of finite order. 2nd ed. Cambridge 1911. New York 1955.
[2] Čunihin, S. A., On factorization of finite groups. (Russisch.) Doklady Akad. Nauk SSSR (N.S.) 97, 977–980 (1954).
[3] Hall, P., A characteristic property of soluble groups. J. London Math. Soc. 12, 198–200 (1937).
[4] Hall, P., On the Sylow systems of a soluble group. Proc. London Math. Soc. (2) 43, 316–323 (1937).
[5] Hall, P., Theorems like Sylow's. Pıoc. London Math. Soc. (3) 6, 286–304 (1956).
[6] Zassenhaus, H., Lehrbuch der Gruppentheorie. Leipzig und Berlin 1937. 2 Aufl. (englisch) Göttingen 1958.

Universität Tübingen, Deutschland

https://doi.org/10.1017/S1446788700025520 Published online by Cambridge University Press