

# RECHERCHES AXIOMATIQUES SUR UN THEOREME DE CHOQUET CONCERNANT L'EFFILEMENT

M. BRELOT

Offert pour le soixantième anniversaire du Professeur Noshiro.

1. Il y a quelques années, CHOQUET a démontré [5], en théorie classique du potentiel (ou pour certains noyaux) que l'ensemble  $E$  des points où un ensemble  $e$  est effilé est contenu dans un ouvert  $\omega$ , tel que  $\omega \cap e$  soit de capacité arbitrairement petite. Cela contient les résultats-éléfs, connus depuis longtemps que  $E \cap e$  est polaire et que si  $e$  est ouvert, p. ex. borné,  $E \cap \partial e$  est de mesure harmonique nulle en tout point de  $e$ . La partie nouvelle du résultat général est que les points de  $Ce$  où  $e$  est effilé peuvent être enfermés dans un ouvert  $\omega$  tel que  $\omega \cap e$  soit de capacité arbitrairement petite et l'effilement n'intervient plus pour un ensemble qu'aux points du complémentaire, d'une façon équivalente à la notion de topologie fine. C'est cet aspect fort important que nous allons approfondir dans des conditions axiomatiques très générales, en développant nécessairement un peu une théorie du "poids" généralisant la capacité (donc plus ou moins examinée par CHOQUET) et comparant les notions de "continuité fine" et de "quasi-continuité," comme il était connu dans le cas classique, notions récemment approfondies axiomatiquement aussi par FUGLEDE [6,7]. Nous considérerons enfin des cas particuliers fournis par la théorie axiomatique des fonctions harmoniques. Nous trouverons ainsi pour divers poids divers équivalents de la propriété de Choquet.

## 2. Définitions

Soit [3] sur un espace topologique  $\Omega$ , un cône convexe  $\Phi$  de fonctions réelles  $\geq 0$  semi-continues inférieurement, contenant la fonction  $+\infty$  ( $u \in \Phi \Leftrightarrow \lambda u \in \Phi$  avec  $0. \infty = 0$ )

La topologie *fine* sur  $\Omega$  est la moins fine des topologies plus fines que celle de  $\Omega$  et rendant continues les fonctions de  $\Phi$ . L'adhérence fine de  $e$  sera notée  $\bar{e}$ . L'effilement de  $e$  en  $x_0 \notin e$  signifie que  $Ce$  est un voisinage fin de  $x_0$ <sup>1)</sup>. On appellera

---

Received July 21, 1966.

<sup>1)</sup> On rappelle que  $R_\varphi^e(\varphi \geq 0, e \subset \Omega)$  signifie  $\inf u(u \in \Phi, u \geq \varphi \text{ sur } e)$ , que  $R_\varphi = R_\varphi^\Omega$  et que l'effilement de  $e$  en  $x_0 \notin e$  est caractérisé par  $\inf_\sigma R_1^{\sigma \cap e}(x_0) < 1$  ( $\sigma$  voisinage de  $x_0$ )

*poids*  $p(e)$  de  $e$ , toute fonction de  $e$  réelle  $\geq 0$  et croissante de  $e$ , nulle pour  $e$  vide. On dira que:  $p$  est fin si  $p(\bar{e}) = p(e)$

est dénombrablement sous additif (d.s.a) si  $p(\cup e_n) \leq \sum p(e_n)$

est continu à droite (c.d) si  $p(e) = \inf p(\omega)$ ,  $\omega$  ouvert  $\supset e$ .

$p$ -quasi-partout ou seulement quasi-partout (q.p) signifiera "sauf sur un ensemble de poids nul."

$p$  étant fixé, on appellera:

*quasi-ouvert* un ensemble  $\omega$  tel qu'il existe  $\omega'$  ouvert avec  $\omega' \supset \omega$ ,  $p(\omega' - \omega) < \varepsilon$  arbitrairement choisi

*quasi-fermé* le complémentaire d'un quasi-ouvert avec définition directe analogue

Une fonction  $f(\Omega \rightarrow \Omega')$  est *quasi-continue*, s'il existe un ensemble  $\alpha$  de poids  $< \varepsilon$  tel que  $f|C\alpha$  (restriction à  $C\alpha$ ) soit continue

De même pour  $f$  réelle les notions de *quasi-semi-continuité*.

*Remarques faciles:*

a) si  $p$  est c.d:

$f$  quasi-continue  $\Leftrightarrow f^{-1}(\omega'$  ouvert) quasi ouvert ( $\forall \omega'$ ).

Si  $p$  est d.s.a, et  $\Omega'$  à base dénombrable:

$\forall \omega'$ ,  $f^{-1}(\omega'$  ouvert) est quasi ouvert  $\Leftrightarrow f$  quasi-continue,

et résultats analogues pour la semi-continuité

b) On appellera poids extérieur  $p^*(e) = \inf p(\omega) \geq p(e)$  ( $\omega$  ouvert  $\supset e$ ) Alors  $(p^*)^* = p^*$ ;  $p^*$  est un poids c.d; il est fin, resp d.s.a si  $p$  l'est.

Dans la théorie classique du potentiel,  $\Omega$  est un espace de Green (en particulier un domaine borné de  $R^n$ ,  $n \geq 2$ ),  $\Phi$  l'ensemble des fonctions hyperharmoniques  $\geq 0$  (surharmoniques  $\geq 0$  ou  $+\infty$ ). La capacité extérieure greenienne est un exemple de poids fin, d.s.a et c.d.

3. On connaissait en théorie classique, pour la capacité, le théorème suivant qui se démontre de la même façon en général:

**THÉORÈME 1** Si le poids  $p$  est fin, toute fonction  $f$  quasi-continue est finement continue q.p; toute fonction quasi semi-continue (s. ou i) est finement semi-continue (s. ou i) q.p.

On choisit l'ensemble  $\alpha_n$  tel que  $f|C\alpha_n$  soit continue et  $p(\alpha_n) < 1/n$ . Alors  $p(\bar{\alpha}_n) < 1/n$  d'où  $p(\cap \bar{\alpha}_n) = 0$ . Si  $x \notin \cap \bar{\alpha}_n$ ,  $x \notin \bar{\alpha}_{n_0}$  pour  $n_0$  convenable;  $C\bar{\alpha}_{n_0}$  est un ouvert fin et  $f|C\bar{\alpha}_{n_0}$  continue en  $x$ ,  $y$  est aussi finement continue d'où la

continuité fine en  $x$  de  $f$  dans  $\Omega$ . De même pour la semi-continuité.

COROLLAIRE. Si  $p$  est fin, tout  $e$  quasi-fermé est contenu dans  $e_1$  finement fermé, avec  $p(e_1 - e) = 0$

**4. La propriété de CHOQUET** (relative à un poids  $p$ ). Ce sera par définition:

Pour tout  $e$ , les points finement extérieurs (c'est-à-dire les points de  $\mathbf{C}e$  où  $e$  est effilé) peuvent être enfermés dans un ouvert  $\omega$  tel que  $\omega \cap e$  soit de poids arbitrairement petit, ce que équivaut immédiatement à: Tout ouvert fin est quasi-ouvert ou bien tout fermé fin est quasi-fermé. Un poids possédant cette propriété sera dit du *type de CHOQUET* ou *t.C.* Noter que cette propriété est conservée par diminution du poids et, lorsque  $\Omega$  est à base dénombrable et que  $p$  est d.s.a., elle possède le caractère local (relatif à un voisinage ouvert de chaque point). En reprenant exactement le raisonnement de CHOQUET [5] on étend sa propriété de décomposition:

THEOREME 2. Si  $p$  est fin et t.C, tout ensemble  $e$  est la réunion  $e_1 \cup e_2$ , où  $p(\bar{e}_1) \leq p(e)$  et  $p(e_2) < \varepsilon$  arbitraire  $> 0$ .

Car  $\bar{e}$  contient  $e_0$  fermé tel que  $p(\bar{e} - e_0) < \varepsilon$  tandis que  $p(e_0) \leq p(\bar{e}) = p(e)$  Alors  $e \cap e_0$  et  $e \cap \mathbf{C}e_0$  peuvent être pris pour  $e_1$  et  $e_2$ .

**5. Equivalences.**

THEOREME 3. Soit  $p$  un poids d.s.a. et t.C.

Alors toute fonction  $f$  (à valeur dans  $\Omega'$  à base dénombrable) finement continue  $q.p.$  est quasi-continue; toute fonction réelle finement semi-continue (sup. ou inf.)  $q.p.$  est quasi-semi continue (s ou i)<sup>1)</sup>

Soit  $f$  finement continue dans  $\Omega$ ,  $\omega_n$  une base d'ouverts de  $\Omega'$ ,  $e_n = f^{-1}(\omega_n)$ ,  $e'_n$  un ouvert contenant  $e_n$ , tel que  $p(e'_n - e_n) < \varepsilon \cdot 2^{-n}$ . Si  $E = \cup (e'_n - e_n)$ ,  $p(E) < \varepsilon$ . Voyons que  $f|_{\mathbf{C}E}$  est continue. On considère les images réciproques d'ouverts et il suffit de voir que  $e_n \cap \mathbf{C}E$  est ouvert dans  $\mathbf{C}E$ ; cela vient de ce que  $e_n \cap \mathbf{C}E = e'_n \cap \mathbf{C}E$  puisqu'un point de  $e'_n$  non dans  $e_n$  est dans  $E$ . Soit  $f$  finement continue aux points de  $\mathbf{C}\alpha$  avec  $p(\alpha) = 0$ . On remplace  $\Omega$  par  $\Omega - \alpha$  en remarquant que la propriété de CHOQUET s'y applique. La quasi-continuité dans  $\Omega - \alpha$  donne la quasi-continuité dans  $\Omega$ .

<sup>1)</sup> Raisonnements inspirés de Doob, donnés pour un poids particulier dans un cours à Paris en 63-64. Le résultat pour les potentiels classiques et la capacité remonte à CARTAN (1945).

Si  $f$  est finement s.c.s dans  $\Omega$ , on considère  $e_n = \{x, f(x) < \lambda_n\}$ ,  $\lambda_n$  dense,  $e'_n$  ouvert  $\supset e_n$  tel que  $p(e'_n - e_n) < \varepsilon 2^{-n}$  etc Démonstration analogue.

**COROLLAIRE.** *Premier résultat d'équivalence Pour un poids fn. d.s.a.,t.C.:*

- a) si  $f$  est à valeurs dans  $\Omega'$  à base dénombrable  
 $f$  quasi-continue  $\iff f$  finement continue q.p.
- b) si  $f$  est réelle  
 $f$  quasi semi continue (s.ou i.)  $\iff f$  finement semi-continue (s. ou i.) q.p.

**THÉORÈME 4.\*** *Supposons que  $p$  soit d.s.a. et c.d. et aussi que  $\Omega$  soit à base dénombrable.*

*Alors si l'enveloppe inférieure d'une famille quelconque de fonctions de  $\Phi$  est quasi semi-continue supérieurement, la propriété de Choquet relative à  $p$  est vraie.*

Soit  $e$  quelconque,  $\{\omega_n\}$  une base d'ouverts de  $\Omega$  et  $e_n = \{x, R_1^{e \cap \omega_n}(x) < 1\}$ . L'ensemble des points de  $Ce$  où  $e$  est effilé est  $\cup(e_n \cap \omega_n)$ . Comme l'enveloppe  $R_1^{e \cap \omega_n}$  est quasi semi-continue supérieurement, il existe un ouvert  $\alpha_n$ , tel que  $p(\alpha_n) < \varepsilon 2^{-n}$  et que  $R_1^{e \cap \omega_n} | C\alpha_n$  soit s.c.s. Comme  $R_1^{e \cap \omega_n} \geq 1$  sur  $e \cap \omega_n$ , cela s'étend à  $\overline{(e \cap \omega_n) \setminus \alpha_n}$ . Donc  $C\overline{(e \cap \omega_n) \setminus \alpha_n} \supset e_n$  et  $C\overline{(e \cap \omega_n) \setminus \alpha_n} \cap \omega_n \supset e_n \cap \omega_n$  tandis que  $C\overline{(e \cap \omega_n) \setminus \alpha_n} \cap e \cap \omega_n \subset \alpha_n$ , formule valable quels que soient les ensembles de cette formule, même sans signe d'adhérence. Alors  $\cup(C\overline{(e \cap \omega_n) \setminus \alpha_n} \cap \omega_n)$  est un ouvert contenant les points de  $Ce$  où  $e$  est effilé et coupant  $e$  selon un ensemble de poids  $< \varepsilon$ .

**COROLLAIRE.** *Equivalence de la propriété de Choquet.*

*Soit  $\Omega$  à base dénombrable et  $p$ , d.s.a. et c.d. Alors la propriété de Choquet équivaut à la suivante : Toute fonction réelle  $\geq 0$  finement s.c.s. est quasi s.c.s.*

**6. Exemples généraux de poids.**

- a) Si  $p$  est un poids,  $L(x) \geq 0$  croissante de  $x \geq 0$ ,  $L(p)$  est un poids avec des propriétés faciles à déduire de celles de  $p$  et  $L$ .
- b) Soit  $\varphi \geq 0$ ,  $x_0$ ,  $\alpha$  fermé, fixés.  $R_\varphi^e(x_0)$ ,  $R_{\varphi^{\alpha}}(x_0)$  sont des poids croissant avec  $\varphi$ ; si  $\varphi$  est s.c.i. ils sont fins; si  $\varphi$  est finie continue  $> 0$ , ils sont c.d.; si  $\Phi$  est fermé par addition dénombrable, ils sont d.s.a.

*Rôle de la propriété de Choquet.* D'abord une remarque immédiate:

---

\* Jusqu'ici on peut, au lieu d'introduire  $\Phi$ , ne prendre qu'une topologie fine arbitraire, plus fine que celle de  $\Omega$  (Choquet)

Si  $R_1^e(x_0)$  est *t.C.*, tout ensemble finement fermé  $\alpha$  contient un fermé  $\alpha_0$  tel que  $\alpha - \alpha_0 \ni x_0$  et soit effilé en  $x_0$  (Cela a lieu comme on verra en particulier dans le cas classique, ce qui ne semble pas connu).

Evident si  $x_0 \in \alpha$  en prenant  $\alpha_0 = \phi$ ; sinon il existe dans  $\alpha$  un fermé  $\alpha_0$ , tel que  $R_1^{\alpha - \alpha_0}(x_0) < \varepsilon < 1$  d'où  $\alpha - \alpha_0 \ni x_0$  et l'effilement de  $\alpha - \alpha_0$ .

**THÉORÈME 5.** *Supposons que pour  $F \geq 0$  sur  $\Omega$ ,  $R_F^e(x_0)$  soit un poids c.d., d.s.a. et t.C. Alors pour toute  $f$  finement s.c.s. (même seulement q.p.)  $\leq F$ : même résultat si le poids est seulement c.d.  $f$  quasi s.c.s.  $\inf_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0) = 0$  ( $\varphi$  variable  $\geq 0$ , s.c.s.,  $\leq f$ ,  $f - \varphi$  pris nul là où  $f = \varphi = +\infty$ )*

En effet, d'après le théorème 3, il existe  $\omega$  ouvert de poids  $R_F^e(x_0) < \varepsilon$  tel que  $f|C\omega$  soit s.c.s. En prolongeant cette fonction  $f$  par 0 sur  $\omega$  on obtient  $f_0$  s.c.s. et  $R_{f-f_0}(x_0) \leq R_F^e(x_0) < \varepsilon$

**THÉORÈME 6.** *Soit  $F$  finie continue  $> 0$ . On suppose que pour toute  $f \geq 0$  finement s.c.s. et  $\leq F$ ,  $\inf_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0) = 0$  ( $\varphi \geq 0$ , s.c.s.  $\leq f$ )*

*Alors  $R_F^e(x_0)$  est du type de Choquet.*

On considère  $E$  finement fermé; alors  $F_E = F_{x_E}(x_E$  indicateur ou fonction caractéristique) est finement s.c.s. et si  $\varphi \geq 0$  est s.c.s. majorée par  $F_E$ , l'ensemble  $\alpha_0$  où  $\varphi \geq F/2$  est fermé et contenu dans  $E$ . Sur  $E - \alpha_0$ ,  $F_E - \varphi = F - \varphi > F/2$ , d'où  $R_{F_E - \varphi} \geq R_{F/2}^{E - \alpha_0} = \frac{1}{2} R_F^{E - \alpha_0}$ . Donc  $R_F^{E - \alpha_0}(x_0)$  est arbitrairement petit pour un  $\varphi$  convenable, c'est-à-dire que  $R_F^{E - \alpha}(x_0)$  est arbitrairement petit pour un  $\alpha$  fermé convenable  $\subset E$ , ce qui est la propriété de Choquet.

**COROLLAIRE.** *Equivalence de la propriété de Choquet pour le poids  $R_F^e(x_0)$  où  $F$  est finie continue  $> 0$ . On le suppose d.s.a.*

*Alors la propriété de Choquet équivaut à:*

$$\forall f \geq 0, \text{ finement s.c.s., } \leq F, \inf_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0) = 0 \quad (\varphi \geq 0, \text{ s.c.s., } \leq f)$$

*Variantes.* On peut donner bien des variantes. Par exemple: supposons  $\Omega$  localement compact à base dénombrable et  $\Phi$  fermé pour l'addition dénombrable. Alors pour  $F$  finie continue  $> 0$ , la propriété de Choquet pour  $R_F^e(x_0)$  est indépendante de  $F$ , équivaut à cette propriété pour  $R_1^e(x_0)$  localement (c'est-à-dire pour  $e$  dans un voisinage de chaque point) et à la propriété  $\inf_{\varphi} R_{f-\varphi}(x_0) = 0$

( $\varphi \geq 0$ , s.c.s.,  $\leq f$ ) pour toute  $f \geq 0$  finement s.c.s., localement bornée.

### 7. Exemples dans la théorie axiomatique des fonctions harmoniques

Considérons l'axiomatique (Brelot [1]) avec l'espace  $\Omega$  (localement compact, non compact, connexe, localement connexe) pourvu d'un faisceau de fonctions "harmoniques" satisfaisant aux axiomes 1,2,3. On ajoutera l'existence d'une base dénombrable d'ouverts et d'un potentiel  $> 0$ . On prend pour  $\emptyset$  l'ensemble des fonctions hyperharmoniques  $\geq 0$ .

*Lemme* [4] Soit  $\omega_0$  un ouvert relativement compact,  $x_0 \in \omega_0$ ,  $d\rho_{x_0}^{\omega_0}$  la mesure harmonique,  $V_0$  une fonction surharmonique  $> 0$  finie continue. Si l'axiome D est vérifié,  $\int \hat{R}_{V_0}^e d\rho_{x_0}^{\omega_0}$  est un poids (fin, c.d., d.s.a.) du type de Choquet et si pour  $e, \omega$  décrit les ouverts contenant les points de  $\Omega$  où  $e$  est effilé,  $\widehat{\inf_{\omega} \hat{R}_1^{e \cap \omega}} = 0$

#### THÉOREME 7.

Soit  $\varphi$  dans  $\Omega$ , localement bornée supérieurement et inférieurement par des nombres  $> 0$  et  $x_0 \in \Omega$ . Pour que le poids  $R_{\varphi}^e(x_0)$  soit du type de Choquet, il faut et suffit que l'axiome D soit satisfait.

Vu la remarque finale du  $n^o$  6, il est équivalent de supposer  $\varphi=1$  ou bien  $V_0$ . Supposons l'axiome D. La propriété de Choquet est satisfaite pour  $R_1^e(x_0)$  et tout  $e$  ne coupant pas un voisinage  $\delta$  de  $x_0$  (Voir [2], ou utiliser le lemme avec  $\omega_0$  ouvert  $\subset \bar{\omega}_0 \subset \delta$  et  $\int \hat{R}_{V_0}^e d\rho_{x_0}^{\omega_0} = R_{V_0}^e(x_0)$ ) Il reste à examiner le cas de  $x_0 \in \bar{e}$ . Si  $e$  est effilé en  $x_0$ , il suffit de remarquer que  $R_{V_0}^{e \cap \delta}(x_0)$  est arbitrairement petit pour  $\delta$  convenable et considérer les points d'effilement de  $e$  dans  $C\delta$  et ceux situés dans  $\delta$ . Supposons  $e$  non effilé en  $x_0$ . On considère des voisinages décroissants de  $x_0$ ,  $\delta_n \supset \bar{\delta}_{n+1}$ ,  $\cap \delta_n = \{x_0\}$ ; tout point d'effilement de  $e$  est dans l'un des ensembles où les  $e \cap C\delta_n$  sont effilés; on choisit pour chaque  $n$  un ouvert  $\omega_n$  contenant les points où  $e \cap C\delta_n$  est effilé, tel que  $R_{V_0}^{\omega_n \cap e}(x_0) < \varepsilon 2^{-n}$ ;  $\cup \omega_n$  résout la question.

Réciproquement, supposons  $R_{V_0}^e(x_0)$  du type de Choquet et reprenons  $\omega_0 \ni x_0$ . Pour toute  $V$  surharmonique  $\geq 0$ , il existe d'après le th.3, puisque  $R_{V_0}^e(x_0)$  est c.d., un ouvert  $\omega$  tel que  $V/C\omega$  soit continue et  $R_{V_0}^{\omega}(x_0) < \varepsilon$ . Comme  $R_{V_0}^{\omega}$  est surharmonique,  $\int R_{V_0}^{\omega} d\rho_{x_0}^{\omega_0} < \varepsilon$  et le th. 26.3 de Mme Hervé [8] entraîne l'axiome D.

*Première extension.* Le th.7 s'étend au poids  $\int \hat{R}_\varphi^e dm$ , où  $m$  est une mesure  $\geq 0$  mais  $\neq 0$ , ne chargeant pas les ensembles polaires et, soit de support compact, soit telle que  $\int V dm < \infty$  s'il existe  $V$  surharmonique  $\geq \varphi$ .

Si  $D$  est vérifié, le lemme entraîne  $\widehat{\inf}_\omega \hat{R}_1^{e \cap \omega} = 0$  et aussi  $\widehat{\inf}_\omega \hat{R}_\varphi^{e \cap \omega} = 0$  d'où l'on déduit une suite décroissante d'ouverts  $\omega_n$  de la famille des  $\omega$ , telle que  $\widehat{\inf} \hat{R}_\varphi^{e \cap \omega_n} = 0$  d'après un lemme topologique de Choquet (Voir [1] p. 3) d'où  $\widehat{\inf}_\omega \hat{R}_\varphi^{e \cap \omega_n} = 0$  sauf sur un ensemble polaire et  $\int \hat{R}_\varphi^{e \cap \omega_n \cap \Omega} dm \rightarrow 0$  ( $K$  compact). On en déduit pour chaque  $\Omega_p$  d'une suite croissante telle que  $\Omega_p \subset \bar{\Omega}_p \subset \Omega$ ,  $\cup \Omega_p = \Omega$  un ouvert  $\omega_p$  tel que  $\int \hat{R}_\varphi^{e \cap \omega_p \cap \Omega} dm < \varepsilon 2^{-p}$  et  $\cup \omega_p$  permet de conclure à la propriété de Choquet.

Réciproquement, partons du poids supposé  $t.C.$  et soit  $x_0$  un point adhérent au support de  $m$ . Si  $\delta$  est un domaine contenant  $x_0$ , on voit que pour  $e \subset C\delta$ , et  $\omega$  ouvert contenant les points d'effilement de  $e$  sur  $Ce$ ,  $R_\varphi^{e \cap \omega}(x_0) < \lambda \int \hat{R}_\varphi^{e \cap \omega} dm$  où  $\lambda > 0$  est indépendant de  $e$  et  $\omega$ , grâce à la propriété de Harnack de  $R_\varphi^{e \cap \omega}$  harmonique dans  $\delta$ . D'où la propriété de Choquet pour  $e \subset C\delta$  et le poids  $R_\varphi^e(x_0)$  ou  $R_1^e(x_0)$ . Un raisonnement du th. précédent fait passer à un ensemble quelconque, c'est-à-dire que  $R_1^e(x_0)$  est  $t.C.$ , ce qui entraîne l'axiome  $D$ .

*Cas particulier.* On peut prendre pour  $m$  la mesure harmonique  $d\rho_{x_0}^{\omega_0}$ .

*Remarque 1.* On notera que l'axiome  $D$  équivaut au résultat que pour une fonction  $\varphi$  (localement entre deux nombres  $> 0$ ), tout ensemble  $e$  possède la propriété  $\widehat{\inf}_\omega \hat{R}_\varphi^{e \cap \omega} = 0$ ,  $\omega$  décrivant les ouverts contenant les points de  $\Omega$  où  $e$  est effilé.

$$\text{Car cette propriété équivaut à } \inf_\omega \int \hat{R}_\varphi^{e \cap \omega} d\rho_{x_0}^{\omega_0} = 0$$

*Remarque 2.* On peut démontrer sans l'axiome  $D$  que le poids  $\int \hat{R}_\varphi^e dm$  pour  $\varphi$  finie continue  $> 0$  est continu à droite (même  $m$ ).

*Seconde extension.* Dans le théorème 7, au moins pour  $x_0$  non polaire et dans son extension à  $\int \hat{R}_\varphi^e dm$ , on peut remplacer pour  $\varphi$  la condition de borne

supérieure locale par la majoration par une fonction surharmonique  $W$  telle que  $\int W \, dm < \infty$ , en ajoutant les hypothèses suivantes: (Voir[8])

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{proportionalité des potentiels à support ponctuel,} \\ \text{existence d'une base de domaines complètement déterminants,} \\ \text{identité de l'effilement et de l'effilement adjoint.} \end{array} \right.$$

La seule partie nouvelle est qu'avec  $D$  l'on trouve que les poids considérés sont du type de Choquet.

Tout dérive du résultat obtenu dans [4] grâce à la théorie des fonctions harmoniques adjointes de Mme Hervé [8], que si  $W$  est surharmonique  $\geq 0$ :

$$\widehat{\inf_{\omega} R_W^{e \cap \omega}} = 0$$

( $\omega$  ouvert variable contenant les points où  $e$  est effilé).

Même raisonnement. Le cas où  $m$  est la masse unité en  $x_0$  non polaire donne dans ce cas la première partie.

Remarquer la conséquence: Sous toutes les conditions précédentes (et avec  $D$ ), on a pour un ensemble  $e$  effilé en  $x_0$  non polaire,  $x_0 \notin e$ , et  $W$  surharmonique  $> 0$ ,  $\inf_{\sigma} R_W^{e \cap \sigma}(x_0) = 0$ . (Voisinages  $\sigma$  de  $x_0$ )

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BRELOT M: Lectures on potential theory (Tata Institute, Bombay, 1960).
- [2] BRELOT M: Intégrabilité uniforme etc (Sem. th. du potentiel, Paris, t. 6, 1961–62) p. 1–11<sup>1)</sup>
- [3] BRELOT M: Introduction axiomatique de l'effilement (Annali di Matematica, t. 57, 1962, p. 77)
- [4] BRELOT M: Aspect statistique et comparé des deux types d'effilement (Ann. Ac. des Sc. du Brésil 1965).
- [5] CHOQUET G: Sur les points d'effilement d'un ensemble. Application à l'étude de la capacité. (Ann. Institut Fourier t. 9, 1959, p. 91).
- [6] FUGLEDE B: Esquisse d'une théorie axiomatique de l'effilement et de la capacité. (C.R. Ac. Sc. t. 261, 1965, p. 3272).
- [7] FUGLEDE B: Quasi topology and fine topology. (Séminaire de théorie du potentiel, t. 10, 1965–66).
- [8] HERVE R.M.: Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel. (Ann. Institut Fourier t. 12, 1962, p. 415).

*Nagoya Journal Volume dédié au Professeur NOSHIRO*

<sup>1)</sup> Dans la note 5 au bas de page il est sous-entendu que l'on suppose l'axiome  $D$  et une base dénombrable d'ouverts.