Compositio Math. 141 (2005) 1255–1309
doi:10.1112/S0010437X0500148X

Equidistribution de mesures algébriques

Laurent Clozel et Emmanuel Ullmo

Abstract

Let G be an algebraic group, Γ an arithmetic lattice of G and $X = \Gamma\backslash G$. If H is an algebraic subgroup of G such that $H \cap \Gamma$ is a lattice of H, then $\Gamma\backslash\Gamma H \subset X$ is endowed with a canonical H-invariant probability measure μ_H. Using Ratner's theory, we give general examples where μ_{H_n} converges weakly to μ_G if H_n is a *strict* sequence of algebraic subgroups of G. If Γ is a congruence subgroup of G, we define another probability measure μ_H^a on X by using the adelic description of the quotient. We conjecture that $\mu_{H_n}^a$ always converges weakly to μ_G if H_n is a strict sequence. Using automorphic forms and L-functions, we describe the case $G = SL(2, F)$ for a number field F and a sequence of tori H_n. The relation with similar problems on Shimura varieties is explained.

Table des matières

Received 23 October 2003, accepted in final form 7 August 2004, published online 1 September 2005.
2000 Mathematics Subject Classification 22E40 (primary), 11F41 (secondary).
Keywords: arithmetic lattices, equidistribution, L-functions, automorphic forms.
Le deuxième auteur est membre de l'Institut Universitaire de France.

1. Introduction

1.1 Les propriétés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_a$

Soit $G_{\mathbb{Q}}$ un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{Q}$ et $X^*(G_{\mathbb{Q}})$ l'ensemble des caractères rationnels de $G_{\mathbb{Q}}$ définis sur $\mathbb{Q}$. On dit que $G_{\mathbb{Q}}$ est de type $\mathcal{F}$ si $X^*(G_{\mathbb{Q}}) = \{1\}$. Un groupe de Lie réel est dit de type *rationnel* si il est de la forme $G = G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$ pour un groupe algébrique $G_{\mathbb{Q}}$ connexe sur $\mathbb{Q}$. Si $G_{\mathbb{Q}}$ est de type $\mathcal{F}$ et $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})^+ = G(\mathbb{Q}) \cap G(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe arithmétique alors [PR94, théorème 4.13] Γ est un réseau de G : la mesure de $X^+ = \Gamma\backslash G$ pour une mesure G-invariante est finie. Dans cette situation, on note μ_G sa mesure de probabilité G-invariante canonique.

Soient $H_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique connexe de $G_{\mathbb{Q}}$ de type $\mathcal{F}$ et $H = H_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$, alors $\Gamma_H = \Gamma \cap H$ est un réseau arithmétique de H et

$$X_H^+ = \Gamma\backslash\Gamma H = \Gamma_H\backslash H$$

est un fermé de X^+ muni canoniquement d'une mesure de probabilité H-invariante μ_H.

Soit $\mathcal{P}(X^+)$ l'ensemble des mesures de probabilités de Borel sur X^+ muni de la topologie faible-étoile. Soit $\mathcal{Q}(X^+)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X^+)$ des mesures μ_H pour un $\mathbb{Q}$-sous-groupe $H_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ de type $\mathcal{F}$.

Définition 1.1. Une suite $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ ($\alpha \geqslant 1$) de $\mathbb{Q}$-sous-groupes algébriques est dite *stricte* si pour tout $\mathbb{Q}$-sous-groupe $H_{\mathbb{Q}} \neq G_{\mathbb{Q}}$,

$$\{\alpha, \quad H_{\alpha,\mathbb{Q}} \subset H_{\mathbb{Q}}\}$$

est fini.

Nous exhiberons dans ce texte de nombreux exemples de suites strictes $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ de $\mathbb{Q}$-sous-groupes de type $\mathcal{F}$ vérifiant la propriété suivante.

Propriété $\mathcal{E}$. La suite de mesures $\mu_\alpha = \mu_{H_\alpha}$ canoniquement associées à $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ converge faiblement vers μ_G.

Il est facile de donner des exemples de suites strictes de $\mathbb{Q}$-sous-groupes $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ de type $\mathcal{F}$ n'ayant pas la propriété $\mathcal{E}$. Un des buts de ce texte est de définir et d'étudier une version adélique de la propriété $\mathcal{E}$ qui nous semble pouvoir être vraie en général.

Les sous-groupes de congruence de G seront par définition les sous-groupes de $G(\mathbb{Q})$ de la forme

$$\Gamma = G(\mathbb{Q}) \cap K \text{ ou } \Gamma = G(\mathbb{Q})^+ \cap K$$

pour un sous-groupe compact ouvert K de $G(\mathbb{A}_f)$. Dans la suite de cette introduction, on suppose que $G_{\mathbb{Q}}$ est de type $\mathcal{F}$, on fixe un réseau de congruence Γ de G et on pose encore $X^+ = \Gamma\backslash G$. Dans cette situation X^+ est une composante de

$$S(G, K) = G(\mathbb{Q})^+\backslash G(\mathbb{R})^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

et les composantes de $S(G, K)$ sont indexées par l'ensemble fini $G(\mathbb{Q})^+\backslash G(\mathbb{A}_f)/K$.

Si $H_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$ sous-groupe de $G_{\mathbb{Q}}$ de type $\mathcal{F}$, alors $K_H = H(\mathbb{A}_f) \cap H$ est un sous-groupe compact ouvert de $H(\mathbb{A}_f)$. Chaque composante irréductible de

$$S(H,K) = S(H,K_H) = H(\mathbb{Q})^+ \backslash H(\mathbb{R})^+ \times H(\mathbb{A}_f)/K_H$$

est munie d'une mesure de probabilité canonique. Soit $\mathcal{E}^+ = \mathcal{E}(H,K)$ l'ensemble des composantes de $S(H,K)$ contenues dans $X^+ = \Gamma\backslash G$, soit

$$h_a^+ = h_a^+(H,K) = |\mathcal{E}^+|$$

et $\mu_{a,H} \in \mathcal{P}(X^+)$ la mesure

$$\mu_{a,H} = \frac{1}{h_a^+} \sum_{\gamma\in\mathcal{E}^+} \mu_\gamma$$

où μ_γ désigne la mesure de probabilité canonique de la composante indexée par $\gamma \in \mathcal{E}^+$.

On note $\mathcal{Q}_a(X^+)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X^+)$ des mesures $\mu_{a,H}$ pour $H_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-sous-groupe de type $\mathcal{F}$ de $G_{\mathbb{Q}}$. Nous dirons qu'une suite de $\mathbb{Q}$-sous-groupes $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ a la propriété $\mathcal{E}_a$ si elle vérifie :

Propriété $\mathcal{E}_a$. La suite de mesures $\mu_{a,\alpha} = \mu_{a,H_\alpha}$ associée canoniquement à H_α converge faiblement vers la mesure μ_G.

1.2 Les propriétés $\mathcal{E}^S$ et $\mathcal{E}_a^S$

Si on s'intéresse aux propriétés d'équidistribution sur les espaces localement symétriques, notamment les variétés de Shimura, on procède de manière légèrement différente. Pour simplifier la discussion, on suppose que $G_{\mathbb{Q}}$ est de plus un groupe algébrique semi-simple. On fixe un sous-groupe compact maximal K_∞ de $G(\mathbb{R})^+$ et on note $\Omega = G(\mathbb{R})^+/K_\infty$ l'espace symétrique associé. Soit Γ un réseau arithmétique dans $G(\mathbb{R})^+$ et $S = \Gamma\backslash\Omega$.

Soit $H_{\mathbb{Q}}$ un sous-groupe réductif de $G_{\mathbb{Q}}$, il existe alors $b \in G(\mathbb{R})^+$ tel que

$$K_{H,\infty} = bK_\infty b^{-1} \cap H(\mathbb{R})^+$$

soit un compact maximal de $H(\mathbb{R})^+$. Notons $\Omega_H = H(\mathbb{R})^+/K_{H,\infty}$, $\Gamma_H = \Gamma \cap H(\mathbb{R})^+$ et $S_H = \Gamma_H\backslash\Omega_H$. Un couple (H,b) ayant les propriétés précédentes est dit *admissible*.

Si (H,b) est un couple admissible, on dispose d'un morphisme naturel de variétés

$$\begin{aligned} i_b :\ & S_H \longrightarrow S \\ & [h.K_{\infty,H}] \mapsto [hbK_\infty]. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des mesures de probabilité de Borel sur S. Soit $\tilde{\nu}_H$ la mesure invariante normalisée sur S_H et $\nu_H = (i_b)_*\tilde{\nu}_H$.

Une suite (H_α, b_α) de couples admissibles est dite stricte si la suite H_α est stricte. On note alors $\tilde{\nu}_\alpha$ et $\nu_\alpha = (i_{b_\alpha})_*\tilde{\nu}_\alpha$ les suites de mesures associées. On dit qu'une suite stricte (H_α, b_α) de couples admissibles a la propriété $\mathcal{E}^S$ si elle vérifie :

Propriété $\mathcal{E}^S$. La suite de mesure ν_α converge faiblement dans $\mathcal{P}(S)$ vers la mesure invariante normalisée de S.

Quand S est une variété de Shimura, des exemples de suites de ce type ayant la propriété $\mathcal{E}(S)$ sont donnés dans [CU]. Dans ce cadre les mesures associées sont supportées sur des sous-variétés spéciales de dimension positive.

Il y a bien sûr de nombreuses raisons pour que la propriété $\mathcal{E}^S$ ne soit pas vérifiée en général. On peut remarquer en premier lieu que si (H,b) est un couple admissible et $\gamma \in \Gamma$ alors $(H_\gamma = \gamma H\gamma^{-1}, b_\gamma = \gamma b)$ est admissible et les mesures ν_{H_γ} et ν_H coïncident. Il est possible, en faisant varier γ de construire de suites strictes de couples admissibles (H_γ, b_γ) qui n'ont pas la propriété $\mathcal{E}^S$ car la suite de mesures associées est constante.

Par ailleurs soit $T_{\mathbb{Q}}$ un tore de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $T(\mathbb{R})$ est compact (ce qui est le cas dans la théorie de la multiplication complexe, dans le cadre des variétés de Shimura) ; soit $b \in G(\mathbb{R})^+$ tel que $T(\mathbb{R}) \subset bK_\infty b^{-1}$, alors le couple $(T_{\mathbb{Q}}, b)$ est admissible et la mesure associée ν_T est une mesure de Dirac en un point de S. On peut ainsi fabriquer des suites strictes de couples admissibles n'ayant pas la propriété $\mathcal{E}^S$, car une suite de mesure de Dirac ne peut pas converger vers la mesure invariante.

Pour remédier à ce type de problèmes, on est amené à étudier l'analogue $\mathcal{E}_a^S$ de $\mathcal{E}_a$ dans ce cadre. On note pour K compact ouvert dans $G(\mathbb{A}_f)$

$$S(G,K) = G(\mathbb{Q})^+ \backslash G(\mathbb{R})^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

et

$$S(G,K,K_\infty) = G(\mathbb{Q})^+ \backslash G(\mathbb{R})^+/K_\infty \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

On note $[g, g_f]$ et $[gK_\infty, g_f]$ les images de $(g, g_f) \in G(\mathbb{R}^+) \times G(\mathbb{A}_f)$ dans $S(G,K)$ et $S(G,K,K_\infty)$ respectivement. Enfin pour tout $b \in G(\mathbb{R}^+)$ on note

$$\begin{aligned} \pi_b : S(G,K) &\longrightarrow S(G,K,K_\infty) \\ [g, g_f] &\mapsto [gbK_\infty, g_f] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tau_b : S(G,K) &\longrightarrow S(G,K) \\ [g, g_f] &\mapsto [gb, g_f] \end{aligned}$$

de sorte que $\pi_b = \pi_1 \circ \tau_b$.

On fixe la composante $S^+ = \Gamma\backslash\Omega$ de S $(\Gamma = G(\mathbb{Q})^+ \cap K)$. Soit (H, b) un couple admissible, on dispose du morphisme naturel que l'on note encore i_b par abus de notations

$$\begin{aligned} i_b : S(H, K_H, K_{\infty,H}) &\longrightarrow S(G,K,K_\infty) \\ [hK_{\infty,H}, h_f] &\mapsto [hbK_\infty, h_f]. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{E}_b = \mathcal{E}(H,K,b)$ l'ensemble des composantes de $S(H, K_H, K_{\infty,H})$ dont l'image est contenu dans S^+. Pour $\gamma \in \mathcal{E}_b$, on note ν_γ la mesure invariante normalisée de la composante γ. Soit $h^+ = |\mathcal{E}_b|$ et

$$\nu_{H,b} = (i_b)_* \frac{1}{h^+} \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_b} \nu_\gamma.$$

On dit qu'une suite de couples admissibles (H_α, b_α) a la propriété $\mathcal{E}_a^S$ si elle vérifie :

Propriété $\mathcal{E}_a^S$. La suite de mesures ν_{H_α, b_α} converge faiblement vers la mesure invariante de S.

On peut remarquer que d'après nos définitions, les mesures $\nu_{H,b}$ et $(\pi_1)_*(\tau_b)_*\mu_{a,H}$ coïncident, de sorte que pour vérifier la propriété $\mathcal{E}_a^S$, il faut montrer que pour toute fonction f continue bornée sur S^+ invariante à droite par K_∞

$$\int_{S^+} f(xb_\alpha)\, d\mu_{\alpha,H_\alpha} \longrightarrow \int_{S^+} f.\mu_G. \tag{1}$$

1.3 Sous-groupes de types $\mathcal{H}$, théorie ergodique unipotente

Dans cette partie $G_{\mathbb{Q}}$ est un groupe algébrique connexe sur $\mathbb{Q}$ de type $\mathcal{F}$, $G = G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$, $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})^+$ est un réseau arithmétique et $X^+ = \Gamma\backslash G$.

Un premier exemple de suites strictes de sous-groupes $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ ayant la propriété $\mathcal{E}$ est une conséquence directe des travaux d'Eskin *et al.* [EMS96]. Soit $H_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-sous-groupe algébrique connexe de $G_{\mathbb{Q}}$ de type $\mathcal{F}$. Soit $\gamma_\alpha \in \Gamma$ une suite d'éléments de Γ. On pose

$$H_{\alpha,\mathbb{Q}} = \gamma_\alpha^{-1} H_{\mathbb{Q}} \gamma_\alpha$$

et $H_\alpha = H_{\alpha,\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$. Dans cette situation on a le théorème suivant.

Théorème 1.2. *Si $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ est une suite stricte alors $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ a la propriété $\mathcal{E}$.*

Preuve. Cela résulte de [EMS96, théorème 2.1, p. 261]. Remarquer que comme indiqué avant et après l'énoncé du théorème 2.1 de [EMS96], on peut prendre (avec les notations de loc. cit.)

$$\rho_\alpha : H \to G, \quad \rho_\alpha(h) = \gamma_\alpha^{-1} h \gamma_\alpha.$$

Les auteurs montrent en fait que la suite des translatés

$$\mu'_\alpha = \mu_H . \gamma_\alpha$$

converge simplement vers μ_G. Mais dans cette situation on a

$$\Gamma \backslash \Gamma H_\alpha = \Gamma \backslash \Gamma \gamma_\alpha^{-1} H \gamma_\alpha = \Gamma \backslash \Gamma H \gamma_\alpha,$$

de sorte que $\mu'_\alpha = \mu_\alpha$. $\square$

Définition 1.3. Un groupe algébrique connexe H sur $\mathbb{Q}$ est dit *de type* $\mathcal{H}$ si son radical résoluble est unipotent et si $H_s = H/R_u(H)$ est produit presque direct de groupes $\mathbb{Q}$-simples H_i tels que $H_i(\mathbb{R})$ est non compact.

Nous montrons dans la troisième partie de ce texte le théorème suivant.

Théorème 1.4. *Soit $G_{\mathbb{Q}}$ un groupe semi-simple de type $\mathcal{H}$ et soit $H_\alpha \subset G_{\mathbb{Q}}$ une suite stricte de sous-groupes de type $\mathcal{H}$. Alors la propriété $\mathcal{E}$ est vraie pour la suite H_α.*

Ce résultat sera une conséquence de la théorie ergodique pour les flots unipotents développée par Ratner [Rat91a, Rat91b, Rat95] et étendue sous une forme particulièrement utile pour nous par Mozes et Shah [MS95]. Décrivons brièvement les résultats dont aurons besoin dans ce texte.

Nous supposons maintenant $G_{\mathbb{Q}}$ semi-simple sur $\mathbb{Q}$ et sans facteurs $\mathbb{R}$-anisotropes. Soit $F \subset G(\mathbb{R})^+$ un sous-groupe de Lie fermé connexe. Nous dirons (momentanément) que F est de type $\mathcal{K}$ (de type $\mathcal{H}$ dans [MS95]) si, pour un sous-groupe arithmétique Γ de $G(\mathbb{R})^+$:

(i) $F \cap \Gamma$ est un réseau de F. (En particulier $F \cap \Gamma \backslash F$ est fermé dans $\Gamma \backslash G(\mathbb{R})^+$; soit μ_F sa mesure invariante normalisée.)

(ii) Le sous-groupe $L(F)$ engendré par les sous-groupes unipotents à un paramètre de G contenus dans F opère ergodiquement sur $F \cap \Gamma \backslash F$ par rapport à μ_F.

Une mesure μ sur X^+ est dite *algébrique* si son support $\mathrm{Supp}(\mu)$ est une orbite fermée de son sous-groupe d'invariance $\Lambda(\mu)$.

On note $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}(X^+)$ le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X^+)$ formé des mesures telles que le sous-groupe $L(\Lambda(\mu))$ agit ergodiquement par rapport à μ. On note aussi $\mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}(X^+)$ formé des mesure dont le support contient $\Gamma e \in X^+$. Il résulte des définitions que si F est de type $\mathcal{K}$ alors $\mu_F \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$.

D'après les résultats de Ratner [Rat91a, Rat91b, Rat95] on a le théorème suivant.

 https://doi.org/10.1112/S0010437X0500148X

THÉORÈME 1.5 (Ratner).

(a) *Toute mesure dans* $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}(X^+)$ *est algébrique.*

(b) *Soit* W *un sous-groupe de Lie fermé de* G *engendré par des sous-groupes unipotents à un paramètre et* $\mu \in \mathcal{P}(X^+)$ *une mesure* W*-invariante ergodique. Il existe alors un sous-groupe* H *de* G *de type* $\mathcal{K}$ *et* $g \in G$ *tel que* $W \subset g^{-1}Hg$ *et* μ *est la mesure* $g^{-1}Hg$*-invariante de support l'orbite fermée* $\Gamma\backslash\Gamma Hg$.

Nous aurons aussi besoin des résultats suivants dus à Moses et Shah [MS95].

THÉORÈME 1.6 (Mozes–Shah).

(i) $\mu \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ *si et seulement si* $\mu = \mu_F$ *pour un* $F \in \mathcal{K}$.

(ii) $\mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ *est compact pour la topologie faible.*

(iii) *Si* $\mu_\alpha \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ *converge vers* $\mu \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ *alors*

$$\mathrm{Supp}(\mu_\alpha) \subset \mathrm{Supp}(\mu)$$

pour $\alpha \gg 0$.

Le théorème 1.4 résulte alors de l'identification des classes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$. Il ne surprendra pas les experts : les résultats essentiels se trouvent dans les travaux de Shah [Sha91].

1.4 Présentation des résultats

Décrivons brièvement le plan de ce texte ainsi que les principaux résultats. Nous renvoyons au coeur du texte pour certaines notations et des descriptions plus précises des résultats.

Dans § 2.1 nous prouvons les propriétés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_a$ pour des suites de sous-tores d'un tore anisotrope. Nous discutons ces propriétés pour des suites de tores anisotropes maximaux dans un groupe ambiant $G_{\mathbb{Q}}$ résoluble dans § 2.2.

A partir de § 3 nous supposons le groupe ambiant $G_{\mathbb{Q}}$ semi-simple sans $\mathbb{Q}$-facteur $\mathbb{R}$-anisotrope. On montre dans § 3 le théorème 1.4, *i.e.* la propriété $\mathcal{E}$ pour les suites strictes de sous-groupes de types $\mathcal{H}$.

Dans § 4 nous définissons la notion de 'suite de sous-groupes à dégénérescence unipotente'. Cela permet dans certaines situations d'appliquer 'à la limite' la théorie de Ratner à des suites de sous-groupes qui ne sont pas engendrés par des unipotents. Nous montrons au théorème 4.2 que si $G_{\mathbb{Q}}$ est $\mathbb{Q}$-anisotrope et si tout $\mathbb{Q}$-sous-groupe semi-simple de $G_{\mathbb{Q}}$ est $\mathbb{R}$-anisotrope alors une suite à dégénérescence unipotente a les propriétés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_a$.

Dans le reste du papier on prend $G = SL(2, F)$ ou $G = PGL(2, F)$ pour un corps de nombres F. Pour d sans facteur carré dans l'anneau d'entiers O_F de F on dispose de plongements 'entiers'

$$E_d = F[\sqrt{d}] \to M(2, F)$$
$$a + b\sqrt{d} \mapsto \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou } a + b\sqrt{d} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix}.$$

Les tores associés de G seront dit *standard*.

Sous des hypothèses de dégénérescence unipotente fortes, on montre au théorème 4.6 que pour une forme parabolique f sur $X = \Gamma\backslash SL(2, F \otimes \mathbb{R})$ (Γ de congruence) et une suite stricte de tores standard T_d de mesures associées μ_d, on a $\mu_d(f) \to O$. Au théorème 4.8, on précise la mesure limite de la suite des μ_d quand $F = \mathbb{Q}$ et les fonctions-test sont K_∞-invariantes. On voit alors que la propriété $\mathcal{E}$ ne peut pas être vraie dans ce cadre.

Le reste du papier est consacré à la preuve de la propriété ($\mathcal{E}_a$) pour des suites strictes de tores standard dans $PGL(2, F)$. On note $\mu_{a,d}$ la mesure adélique associée à un tore standard T_d.

Dans § 5, on évalue $\mu_{a,d}(f)$ pour une forme parabolique f, grâce à une formule de Waldspurger [Wal85]. Si π est la représentation automorphe associée à f et Π son changement de base à $E = F[\sqrt{d}]$, on obtient une relation entre $\mu_{a,d}(f)$ et $L(\Pi, \frac{1}{2})$. On montre que pour tout $\epsilon > 0$

$$|\mu_{a,d}(f)| \ll |d|^{-1/4+\theta/2+\epsilon},$$

où $|d| = \prod_{v|\infty} |d|_v = |N_{F/\mathbb{Q}}(d)|$ et θ désigne la constante de Selberg $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}$ qui mesure le défaut de validité de la conjecture de Selberg (donc conjecturalement $\theta = 0$). En acceptant la conjecture de Selberg et l'hypothèse de Lindelöf pour $L(\Pi, \frac{1}{2})$ on obtiendrait l'estimation $|\mu_{a,d}(f)| \ll |d|^{-1/2+\epsilon}$.

Dans § 6, on traite la même question pour les séries d'Eisenstein $E_\chi(g, s)$, associées à un caractère χ de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$, en utilisant une formule de Hecke sous la forme donnée par Wielonsky [Wie85]. Les résultats sont similaires ; $\mu_{a,d}(E_\chi(g, \frac{1}{2} + i\sigma))$ est maintenant relié à la valeur spéciale de la fonction L 'à la Tate' $L(\chi \circ N_{E/F}, \frac{1}{2})$. On montre l'existence d'une constante $A > 0$ telle que pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\sigma \in \mathbb{R}$

$$|\mu_{a,d}(E_\chi(g, \tfrac{1}{2} + i\sigma))| \ll |d|^{-1/4+\epsilon}|\sigma|^A.$$

L'hypothèse de Lindelöf pour $L(\chi \circ N_{E/F}, \frac{1}{2})$ donnerait l'estimation

$$|\mu_{a,d}(E_\chi(g, \tfrac{1}{2} + i\sigma))| \ll |d|^{-1/2+\epsilon}|\sigma|^A.$$

On explique au début § 7 comment les résultats des §§ 5 et 6 donnent la propriété $\mathcal{E}_a$ pour les suites strictes de tores standard de $PGL(2, F)$. Notons que la preuve de ces résultats n'utilise pas la sous-convexité pour $L(\Pi, \frac{1}{2})$ où $L(\chi \circ N_{E/F}, \frac{1}{2})$. Nous expliquons à la fin de § 7 comment la sous-convexité pour $L(\Pi, \frac{1}{2})$ et $L(\chi \circ N_{E/F}, \frac{1}{2})$ implique la conjecture $\mathcal{E}_a^S$ pour des suites strictes de tores standard définissant des points spéciaux des variétés de Shimura associées à $PGL(2, F)$. Des résultats analogues ont été annoncés par Zhang [Zha01] et Cohen [Coh]. Pour les derniers développements sur la sous-convexité pour les familles de fonctions L nous recommandons le texte de Michel [Mic].

2. Tores, groupes résolubles, cas $\mathbb{R}$-anisotrope

2.1 Le cas des tores anisotropes

Soit $G = T$ un tore anisotrope sur $\mathbb{Q}$. On note $\Lambda = X_*(T)$ le groupe libre des sous-groupes à un paramètre de T. Ainsi

$$\Lambda = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_m, T_{\overline{\mathbb{Q}}}).$$

où $\overline{\mathbb{Q}}$ est une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Le sous-groupe de Galois $\mathcal{G} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ opère sur Λ : Si $\lambda \in \Lambda$ et $\sigma \in \mathcal{G}$ et $z \in \overline{\mathbb{Q}}$ on pose

$$({}^\sigma\lambda)(z) = \sigma_T(\lambda(\sigma^{-1}z));$$

σ_T désignant l'action de σ sur $T(\overline{\mathbb{Q}})$ donnée par la structure rationnelle. Alors $\mathcal{G}$ opère par un quotient fini $\mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$, E étant la plus petite extension galoisienne déployant T.

Notons c la conjugaison complexe de $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. On a $\Lambda = \mathrm{Hom}(\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}, T_\mathbb{C})$. Alors c opère de même sur Λ via ${}^c\lambda = c_T(\overline{z})$ où c_T est la conjugaison complexe sur $T(\mathbb{R})$. On suppose désormais que $\overline{\mathbb{Q}}$ est la clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{C}$, c peut alors être vu comme un élément de $\mathcal{G}$ et ${}^c\lambda$ est donné par l'action précédemment décrite de $\mathcal{G}$ sur Λ.

On notera V le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\Lambda \otimes \mathbb{Q}$ et $V_\mathbb{R}$ le $\mathbb{R}$-espace $\Lambda \otimes \mathbb{R}$. Puisque T est anisotrope l'espace des invariants de $\mathcal{G}$ dans V est réduit à $\{0\}$. Par ailleurs $V = V^+ \oplus V^-$, décomposition en sous-espaces propres $(+1)$ et (-1) sous l'action de $\mathbb{C}$. (Noter que c ne commute pas à $\mathcal{G}$ en général). Si $r = \dim(V^+)$ et $s = \dim(V^-)$, le tore $T_\mathbb{R}$ est isogène à $\mathbb{G}_m^r \times \mathbb{T}_a^s$, où $\mathbb{T}_a$ désigne le tore anisotrope de dimension 1 sur $\mathbb{R}$.

On a *Lie* $T(\mathbb{C}) = \Lambda \otimes \mathbb{C} = V^+ \otimes \mathbb{C} \oplus V^- \otimes \mathbb{C}$. La conjugaison complexe de *Lie* $T(\mathbb{C})$ par rapport à *Lie* $T(\mathbb{R})$ opère par

$$\lambda \otimes z \to c(\lambda)\overline{z}.$$

Par conséquent

$$Lie\ T(\mathbb{R}) = V^+ \otimes \mathbb{R} \oplus V^- \otimes i\mathbb{R}. \tag{2}$$

Soit $H \subset T$ un sous-tore défini sur $\mathbb{Q}$. Alors avec des notations évidentes, $\Lambda_H \subset \Lambda_T = \Lambda$ est un sous-module stable par $\mathcal{G}$. De plus il est primitif au sens suivant : $\Lambda_T \cap (\Lambda_H \otimes \mathbb{Q}) = \Lambda_H$. Réciproquement un sous-$\mathcal{G}$-module primitif de Λ est associé à un sous-tore de T défini sur $\mathbb{Q}$. Si $V_H = \Lambda \otimes \mathbb{Q}$, V_H est invariant par c et

$$Lie\ H(\mathbb{R}) = V_H^+ \otimes \mathbb{R} \oplus V_H^- \otimes i\mathbb{R}. \tag{3}$$

Soit $L \subset$ *Lie* $T(\mathbb{R})$ un sous-espace vectoriel réel se décomposant en somme directe selon (3)

$$L = L \cap V_{\mathbb{R}}^+ \oplus L \cap iV_{\mathbb{R}}^- = L^+ \oplus iL^-. \tag{4}$$

Nous allons lui associer canoniquement un sous-tore $H(L)$ de T défini sur $\mathbb{Q}$. Soit $M = L^+ \oplus L^- \subset V_{\mathbb{R}}$. On considère le sous-espace

$$M' = \bigcap_{\sigma \in \mathcal{G}} \sigma(M) \subset V_{\mathbb{R}}$$

(l'intersection portant en fait sur $\sigma \in \mathrm{Gal}(E/\mathbb{Q})$). Alors M' est stable par $\mathcal{G}$; soit $V(L) = M' \cap V$ et $\Lambda(L) = V(L) \cap \Lambda$. Alors $\Lambda(L)$ définit, d'après les remarques précédentes, un sous-tore $H(L)$ de T défini sur $\mathbb{Q}$.

Noter que par construction, $H(L)$ est le plus grand sous-tore S de T, défini sur $\mathbb{Q}$ tel que *Lie* $(S \otimes \mathbb{R}) \subset L$. Plus généralement si $L' \subset$ *Lie* $T(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel et si $L = L' \cap V_{\mathbb{R}}^+ \oplus L' \cap iV_{\mathbb{R}}^-$, $H(L)$ a la même propriété relativement à L'. La construction est inverse de celle des groupes de Mumford–Tate.

Soit $H_\alpha \subset T$ une suite de sous-tores définis sur $\mathbb{Q}$, que l'on suppose stricte. Ceci équivaut donc à : pour tout sous-espace $V' \subset V$ stable par $\mathcal{G}$ $(V' \neq V)$

$$\Lambda(H_\alpha) \not\subset V' \quad \text{pour } \alpha \gg 0. \tag{5}$$

Considérons le quotient $X^+ = \Gamma\backslash T(\mathbb{R})^+$ où $\Gamma \subset T(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe de congruence. Alors X^+ est compact.

2.1.1 *La propriété $\mathcal{E}$ pour les tores anisotropes.* Avec les notations précédentes on obtient :

Théorème 2.1. *La propriété $\mathcal{E}$ est vraie pour toute famille stricte $H_\alpha \subset T$.*

Preuve. Soit $X_\alpha^+ = \Gamma \cap H_\alpha(\mathbb{R})^+ \backslash H_\alpha(\mathbb{R})^+ \subset X^+$, et μ_α la suite de mesures de probabilités associées. Quitte à considérer une sous-suite, on peut supposer que μ_α converge faiblement vers une mesure de probabilité ν sur X^+. D'après l'analogue élémentaire pour les tores des résultats de Mozes et Shah rappelés dans le pargraphe 1, ν est la mesure de probabilité sur $\Gamma \cap H\backslash H$ pour un sous-groupe H fermé de $T(\mathbb{R})^+$ tel que $\Gamma \cap H \subset H$ est cocompact. De plus le support de μ_α est contenu dans celui de ν pour tout $\alpha \gg 0$.

Soient $L' = Lie(H) \subset$ *Lie* $T(\mathbb{R})$ et $L_\alpha = Lie(H_\alpha)$. On a donc $L_\alpha \subset L'$ pour tout $\alpha \gg 0$. Soit $L = L' \cap V_{\mathbb{R}}^+ \oplus L' \cap iV_{\mathbb{R}}^-$. La construction précédant (5) lui associe un tore $H(L)$ défini sur $\mathbb{Q}$. D'après la propriété caractéristique de $H(L)$, on a $H_\alpha \subset H(L)$ pour tout $\alpha \gg 0$. Comme la suite H_α est stricte, on a $H(L) = T$. On en déduit que $L = L' =$ *Lie* $T(\mathbb{R})$. Donc $H = T(\mathbb{R})^+$ et $\nu = \mu_T$ est la mesure de probabilité canonique sur X^+. $\square$

2.1.2 *La propriété $\mathcal{E}_a$ pour les tores anisotropes.* Nous étudions maintenant la formulation adélique de la conjecture d'équidistribution. Le cas des tores permet d'éclairer la formulation précise de la propriété $\mathcal{E}_a$. On fixe donc un sous-groupe compact ouvert $K \subset T(\mathbb{A}_f)$ et on note $\Gamma = T(\mathbb{Q}) \cap K$ le réseau de congruence de $T(\mathbb{R})$ associé.

Soit comme précédemment $H_\alpha \subset T$ une suite stricte de sous-tores de T définis sur $\mathbb{Q}$. On note $\Gamma_\alpha = H_\alpha(\mathbb{R}) \cap \Gamma$ et on considère les injections associées

$$X_\alpha = \Gamma_\alpha \backslash H_\alpha(\mathbb{R}) \longrightarrow X = \Gamma \backslash T(\mathbb{R}).$$

En général, il n'est pas vrai que l'image rencontre toutes les composantes connexes de X pour $\alpha \gg 0$.

Dans les exemples et contre-exemples qui suivent, il sera commode de considérer les tores obtenus de la façon suivante. Soit F un corps de nombres et $F_1^* \subset F^*$ le noyau de la norme $N_{F/\mathbb{Q}} : F^* \longrightarrow \mathbb{Q}^*$. Alors F_1^* définit de manière naturelle un $\mathbb{Q}$-tore que l'on notera T_F. Si E/F est une extension de corps de nombres, on définit de même $T_{E/F}$ avec

$$T_{E/F}(\mathbb{Q}) = \mathrm{Ker}(N_{E/F} : E^* \to F^*).$$

Considérons le tore T_F associé à F quadratique réel et soit $T = T_F^2$. Soit $\Lambda = X_*(T) = \mathbb{Z}^2$; $\mathcal{G}$ opère sur Λ via $\mathrm{Gal}(F/\mathbb{Q})$ et l'élément non trivial opère par -1. Comme $T(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^*)^2$ son groupe de composantes connexes $\pi_0(T(\mathbb{R}))$ est $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Un sous-$\mathcal{G}$-module primitif non trivial Λ' de Λ est de la forme $\Lambda_{a,b} = \mathbb{Z}(a, b)$ pour des entiers (a, b) premiers entre eux. Si a ou b est pair l'image des points réels du tore $H_{a,b}$ associé à $\Lambda_{a,b}$ dans $\pi_0(T(\mathbb{R}))$ n'est pas totale.

Une suite de sous-tores H_α de T associées à des sous-$\mathcal{G}$-modules primitifs $\Lambda_\alpha = \mathbb{Z}(a_\alpha, b_\alpha)$ de Λ est stricte si et seulement si pour tout couple d'entiers (a, b) premiers entre eux on a $(a_\alpha, b_\alpha) \neq \pm(a, b)$ pour $\alpha \gg 0$. On peut construire de telles suites strictes avec, pour tout α, a_α ou b_α pair. La suite des images des $H_\alpha(\mathbb{R})$ dans $\pi_0(T(\mathbb{R}))$ ne couvre pas $\pi_0(T(\mathbb{R}))$.

Le même phénomène se produit pour les composantes connexes de $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A})/K$ non nécessairement incluses dans $\Gamma\backslash T(\mathbb{R})$. Soit par exemple F une extension quadratique réelle de $\mathbb{Q}$ et E une extension CM de F partout non ramifiée aux places finies (l'existence est laissé au lecteur). Soit $T = T_{E/F}$ et $S = \mathrm{Res}_{E/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m$. On note $K = K_T$ et K_S les sous-groupes compacts maximaux de $T(\mathbb{A}_f)$ et $S(\mathbb{A}_f)$.

Alors $cl(S) = \pi_0(S(\mathbb{R})^+\backslash S(\mathbb{A})/K_S)$ est le groupe des classes d'idéaux de E, que l'on peut supposer non trivial. (Noter que $S(\mathbb{R})^+ = S(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$). On a par ailleurs une suite exacte

$$1 \to \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} \mathbb{G}_m \longrightarrow S \longrightarrow T \to 1$$

où l'application $\phi : S \to T$ est donnée par '$z \mapsto z/\overline{z}$'. On en déduit une application $cl(S) \to cl(T)$ dont on vérifie aisément qu'elle est injective (utiliser l'hypothèse de ramification). Donc $cl(T) \neq 0$; noter par ailleurs que T est anisotrope.

En imitant l'argument donné ci dessus pour les composantes réelles, on voit que T^2 contient une suite stricte de sous-tores H_α telle que l'image de

$$\pi_0(H_\alpha(\mathbb{Q})\backslash H_\alpha(\mathbb{A})/K_T^2 \cap H_\alpha(\mathbb{A}_f))$$

dans $\pi_0(T^2(\mathbb{Q})\backslash T^2(\mathbb{A})/K_T^2)$ n'est pas totale.

Néanmoins, la propriété $\mathcal{E}_a$ de l'introduction est vérifiée dans ce cadre.

Théorème 2.2. *Pour toute famille stricte $H_\alpha \subset T$ la propriété $(\mathcal{E}_a)$ est vérifiée.*

Preuve. On a une décomposition finie

$$T(\mathbb{A}) = \coprod_i T(\mathbb{Q})T(\mathbb{R})^+ t_i K$$

où $t_i \in T(\mathbb{A}_f)$. Alors

$$X^+ = T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{Q})T(\mathbb{R})^+K/K = \Gamma \cap T(\mathbb{R})^+\backslash T(\mathbb{R})^+.$$

On a de même en posant $K_\alpha = K \cap H_\alpha(\mathbb{A}_f)$ une décomposition

$$H_\alpha(\mathbb{A}) = \coprod_j H_\alpha(\mathbb{Q})H_\alpha(\mathbb{R})^+ s_j K_\alpha, \quad s_j \in H_\alpha(\mathbb{A}_f).$$

Soit X_α^+ la réunion des composantes connexes de $H_\alpha(\mathbb{Q})\backslash H_\alpha(\mathbb{A})/H_\alpha(\mathbb{R})^+K_\alpha$ correspondant aux $s_j \in T(\mathbb{Q})T(\mathbb{R})^+K$. Chacune de ces composantes connexes est isomorphe à $\Gamma_\alpha\backslash H_\alpha(\mathbb{R})^+$ avec $\Gamma_\alpha = (H_\alpha(\mathbb{Q}) \cap H_\alpha(\mathbb{R})^+) \cap K_\alpha$. □

Ecrivons donc $s_j = \gamma t_\infty k$ avec $\gamma \in T(\mathbb{Q})$, $t_\infty = t_\infty(s_j) \in T(\mathbb{R})^+$, $k \in K$. L'injection

$$\phi_j : \Gamma_\alpha\backslash H_\alpha(\mathbb{R})^+ \longrightarrow X^+$$

relative à la composante correspondant à s_j est

$$x_\infty \mapsto x_\infty t_\infty(s_j).$$

Si h_α est le nombre de composantes connexes de X_α^+ et dx la mesure normalisée sur $\Gamma_\alpha\backslash H_\alpha(\mathbb{R})^+$, on doit donc montrer que pour tout $f \in C(X^+)$ (fonction continue sur X^+) on a la convergence

$$\frac{1}{h_\alpha}\sum_j \int_{\Gamma_\alpha\backslash H_\alpha(\mathbb{R})^+} f(xt_\infty(s_j))\,dx \longrightarrow \int_{X^+} f(t)\,d\mu_T. \tag{6}$$

Le théorème 2.2 résulte alors du théorème 2.1 et du lemme suivant.

Lemme 2.3. *Soit X un groupe de Lie compact connexe et X_α une suite de sous-groupes fermés. Soit μ_α et μ les mesures de Haar normalisées de X_α et X. On suppose que $\mu_\alpha \to \mu$ pour la convergence vague. Si pour tout α $\{t_1, \dots, t_{h_\alpha}\}$ est une famille finie d'éléments de X, la suite*

$$\mu'_\alpha = \frac{1}{h_\alpha}\sum_{j=1}^{h_\alpha} \mu_\alpha \star \delta_{t_j}$$

converge vers μ.

Preuve. Soit $f \in C(X)$, $\epsilon > 0$. Alors f étant uniformément continue, on peut trouver $T_1, \dots, T_N \in X$ tels que pour tout $t \in X$, il existe $k \in \{1, \dots, N\}$ tel que pour tout $x \in X$ on a

$$|f(xt) - f(xT_k)| \leqslant \epsilon.$$

On choisit une partition de $S_\alpha = \{t_1, \dots, t_{h_\alpha}\}$ en sous-ensembles S_α^k dont les éléments vérifient cette condition relativement à T_k. Alors

$$\left|\sum_{t \in S_\alpha^k}\int_{X_\alpha} f(xt)\,dx - |S_\alpha^k|\int_{X_\alpha} f(xT_k)\,dx\right| \leqslant |S_\alpha^k|\epsilon$$

d'où

$$\left|\frac{1}{h_\alpha}\sum_{t \in S_\alpha}(\mu_\alpha \star \delta_t, f) - \frac{1}{h_\alpha}\sum_k |S_\alpha^k|(\mu_\alpha \star \delta_{T_k}, f)\right| \leqslant \epsilon.$$

On finit la preuve du lemme 2.3 en remarquant que pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$ $(\mu_\alpha \star \delta_{T_k}, f) \to (\mu, f)$. □

2.2 Groupes résolubles

Si G est un groupe unipotent sur $\mathbb{Q}$ les hypothèses $\mathcal{E}$ et $(\mathcal{E}_a)$ sont vérifées pour toute suite stricte. Ceci résulte immédiatement pour $\mathcal{E}$ du théorème 1.6 et de la correspondance de Malcev entre sous-groupes fermés cocompacts et sous-groupes de G définis sur $\mathbb{Q}$. Il n'y a pas de différence entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_a$ du fait de l'approximation forte.

Dans le cas des groupes résolubles $\mathcal{E}$ peut être en défaut. Nous ne savons pas en général ce qu'il en est pour $\mathcal{E}_a$.

Soit $G_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-groupe résoluble, que l'on peut écrire comme produit semi-direct

$$G = N_{\mathbb{Q}} \rtimes T_{\mathbb{Q}}$$

avec $N_{\mathbb{Q}}$ unipotent et $T_{\mathbb{Q}}$ un tore. On suppose G de type $(\mathcal{F})$ donc $T_{\mathbb{Q}}$ anisotrope.

Plaçons-nous pour simplifier dans la situation suivante. Soit $F \neq \mathbb{Q}$ un corps de nombres de degré d et T_F le $\mathbb{Q}$-tore associé. On peut voir F comme un groupe unipotent abélien $N_{\mathbb{Q}} = F \simeq \mathbb{Q}^{[F:\mathbb{Q}]}$. On a une action de T_F sur $N_{\mathbb{Q}}$ par multiplication d'ou un sous-groupe résoluble $G = N_{\mathbb{Q}} \rtimes T_F$. Noter que les éléments de T_F ne sont pas ad-unipotents, de sorte que le théorème de Mozes-Shah n'est pas applicable. Soient O_F l'anneau des entiers de F, K_N l'anneau de entiers de $\mathbb{A}_{F,f}$ et K_T le groupe des unités de $T(\mathbb{A}_{F,f})$. Soient $O_F = \Gamma_N = K_N \cap F$ et $\Gamma_T = K_T \cap T(\mathbb{Q})^+$. Alors $\Gamma = \Gamma_N \times \Gamma_T$ est un réseau de congruence et on note

$$X^+ = \Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+ \simeq O_F\backslash\mathbb{R}^d \times \Gamma_T\backslash T(\mathbb{R})^+.$$

Montrons tout d'abord que le théorème 1.2 n'est pas vide dans cette situation.

Lemme 2.4. *Il existe une suite stricte $H_{\alpha,\mathbb{Q}} \subset G_{\mathbb{Q}}$ composée de tores isomorphes à T.*

Le produit dans G est donné par

$$(n_1, t_1)(n_2, t_2) = (n_1 + t_1.n_2, t_1 t_2).$$

En particulier si $\underline{n} = (n, 1)$ et $\underline{t} = (0, t)$

$$\underline{n}\ \underline{t}\ \underline{n}^{-1} = (n - t.n, t).$$

Une suite $n_\alpha \in N(\mathbb{Q})$ est dite stricte si pour toute sous-variété Z de $N_{\mathbb{C}}$, $Z \neq N_{\mathbb{C}}$, $\{\alpha \in \mathbb{N},\ \ n_\alpha \in Z\}$ est fini. Soit $n_\alpha \in N(\mathbb{Q})$ une suite stricte et $T_\alpha = \underline{n_\alpha} T \underline{n_\alpha}^{-1}$. Si $T_\alpha \subset H_{\mathbb{Q}} \subset G_{\mathbb{Q}}$, $H_{\mathbb{Q}}$ doit s'envoyer surjectivement sur T. Sa fibre au dessus d'un point $t \in T$ contient $(n_\alpha(1-t), t)$. Si n_α est une suite stricte et si H contient une infinité de T_α alors la fibre doit contenir $(1-t)N$. Si on choisit t n'ayant pas la valeur propre 1, on a $(1-t)N = N$.

On peut prendre dans la situation précédente des suites strictes avec $n_\alpha \in O_F = \Gamma_N$. Le théorème 1.2 admet donc pour corollaire le suivant.

Corollaire 2.5. *Une suite T_α de tores maximaux associés à une suite stricte n_α de O_F a la propriété $\mathcal{E}$.*

Il est instructif d'expliciter ce résultat. Si $n_\alpha \in O_F$ et si $t \in \Gamma_T$ alors

$$(n_\alpha - t.n_\alpha) \in \Gamma_N \times \Gamma_T = \Gamma. \tag{7}$$

Si l'on identifie T_α à T par la seconde composante on a donc $\Gamma_\alpha = \Gamma \cap T_\alpha(\mathbb{R})^+ \subset \Gamma_T$ et par (7) on a $\Gamma_T \subset \Gamma_\alpha$. Donc $\Gamma_\alpha = \Gamma_T$ et pour toute fonction f continue sur X^+ on a

$$\int_{\Gamma_\alpha\backslash T_\alpha(\mathbb{R})^+} f(x)\,dx = \int_{\Gamma_T\backslash T(\mathbb{R})^+} f(n_\alpha - t.n_\alpha, t)\,dt = \int_{\Gamma_T\backslash T(\mathbb{R})^+} f(-t.n_\alpha, t)\,dt.$$

Le corollaire 2.5 nous assure donc que cette dernière intégrale tend vers 0 quand α tend vers ∞. Nous avons pu vérifier à la main cette convergence pour F un corps quadratique.

Pour $F = \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$, $X^+ = \mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{R}^2 \times U\backslash\mathbb{T}_c$ où $\mathbb{T}_c$ désigne le cercle unité et $U = \{\pm 1,\ \pm\sqrt{-1}\}$. On voit alors qu'il s'agit essentiellement de prouver que le cercle de rayon $R_\alpha = \sqrt{a_\alpha^2 + b_\alpha^2}$ avec $n_\alpha = a_\alpha + \sqrt{-1}b_\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ est équidistribué dans $\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{R}^2$ pour la mesure de Lebesgue quand R_α tend vers l'infini. Il n'est en fait pas difficile de montrer que le cercle de rayon R est équidistribué dans $\mathbb{Z}^2\backslash\mathbb{R}^2$ pour la mesure de Lebesgue quand R tend vers l'infini. D'après Weyl (Appendice A1) il s'agit de vérifier pour les fonctions

$$e_{m,n}(z) = e^{2\sqrt{-1}\pi(mx+ny)} \quad (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ z = x + \sqrt{-1}y$$

que

$$\int_0^{2\pi} e_{m,n}(a\cos\theta + b\sin\theta, -a\sin\theta + b\cos\theta)\, d\theta$$

quand $R = \sqrt{a^2+b^2}$ tend vers ∞. Ce dernier résultat est une conséquence simple du lemme de Riemann qui nous assure que quand $R \to \infty$,

$$\int_0^{2\pi} e^{2\sqrt{-1}\pi R\sin\theta}\, d\theta$$

tend vers 0. On peut traiter de la même manière le cas des corps quadratiques immaginaires arbitraires.

Si on part d'une suite stricte $n_\alpha \in \mathbb{Q}[\sqrt{-1}]$ qui converge dans $\mathbb{C}$, la suite T_α associée n'a pas la propriété $\mathcal{E}$. Dans cette situation, en identifiant encore T_α à T par la deuxième projection on voit que l'on peut supposer que $\Gamma_{T_\alpha} \subset \Gamma_T = U$ est constant. Les projections de $T_\alpha(\mathbb{R})^+$ sur le premier facteur sont des cercles de rayons bornés. Une limite de mesure associée est portée sur un cercle de rayon borné (éventuellement une mesure de Dirac) donc est différente de la mesure de Lebesgue. Il serait intéressant de tester (dans ce cas très simple) la conjecure $\mathcal{E}_a$ dans cette situation, où l'on espère que le manque de masse est compensé par le nombre de classes.

Le cas des corps quadratiques réels est aussi instructif. Explicitons brievement pour montrer les problèmes subtils de convergence d'intégrales cachés derrière le corollaire 2.5. Soit $F = \mathbb{Q}[\sqrt{d}]$ avec $d > 0$ sans facteur carré. Supposons pour simplifier que $d \equiv 2$ ou $d \equiv 3$ modulo 4, alors

$$O_F = \{m = a + b\sqrt{d}, \quad x, y \in \mathbb{Z}\}.$$

Le tore $T_F(\mathbb{R})^+ = \mathbb{R}_+^*$ opère sur $\mathbb{R}^2$. Soit $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$ l'unité fondamentale. On prend $X^+ = O_F\backslash\mathbb{R}^2 \times (\epsilon^{\mathbb{Z}}\backslash T_F(\mathbb{R})^+)$. Soit $l = \log\epsilon$. Soit $m_\alpha = a_\alpha + b_\alpha\sqrt{d}$ une suite stricte d'éléments de O_F.

Par Weyl on est amené pour $f(x,y,t) = e^{2\sqrt{-1}\pi(nx+my/\sqrt{d})}h(t)$ à vérifier que

$$\int_0^l e^{2\sqrt{-1}\pi(X\cosh t + \sqrt{d}Y\sinh t)}h(t)\, dt \to 0 \tag{8}$$

pour une suite stricte d'entiers $X + Y\sqrt{d}$ (s' exprimant en fonction de m_α) tendant vers ∞. La vérification de ce fait est un exercice amusant. Nous ne savons pas si cette intégrale converge quand X et Y ne sont plus supposés être des entiers, même si ils tendent vers ∞. Encore une fois nous ne savons rien de la propriété $\mathcal{E}_a$ pour les suites T_α associées à des suites strictes d'éléments de F.

2.3 Groupes semi-simples $\mathbb{R}$-anisotropes

Dans la suite de l'article, nous nous limiterons au cas où le groupe ambiant G est semi-simple. Nous considérons ici le cas où $G \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$ est anisotrope. Dans cette situation la propriété $\mathcal{E}$ peut être en défaut.

Supposons par exemple que $G(\mathbb{R}) \simeq SU(2,\mathbb{R})$. Si $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ est un sous-groupe de congruence, Γ est fini, nous supposerons que $\Gamma = \{1\}$. Soit $T \subset G$ un tore défini sur $\mathbb{Q}$: noter que T est alors toujours un tore T_F pour $F/\mathbb{Q}$ quadratique imaginaire. Alors $\mathcal{E}$ nous amène à considérer les intégrales

$$\int_{T_\alpha(\mathbb{R})} f(t)\,dt \tag{9}$$

où f est une fonction sur $G(\mathbb{R}) = \Gamma\backslash G(\mathbb{R})$. Si $T_\alpha(\mathbb{R})$ reste proche d'un tore fixe $T(\mathbb{R}) \subset G(\mathbb{R})$ l'intégrale (9) ne peut tendre vers l'intégrale sur G. De telles suites strictes existent, par exemple $T_\alpha = g_\alpha T_0 g_\alpha^{-1}$ où g_α a une limite dans $G(\mathbb{R})$.

En revanche $\mathcal{E}_a$ pour un groupe G général, nous amène à considérer les intégrales normalisées

$$\int_{H(\mathbb{Q})\backslash H(\mathbb{R})\times H(\mathbb{A}_f)/K\cap H(\mathbb{A}_f)} f(t)\,dt \tag{10}$$

où $K \subset G(\mathbb{A}_f)$ est associé à Γ, i.e., $K \cap G(\mathbb{Q}) = \Gamma$. Quand H varie, même parmi les conjugués d'un tore T_0, le groupe de classes $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}_f)/K \cap T(\mathbb{A}_f)$ tend à croître : voir par exemple la proposition 8.24 de [PR94]. Le même phénomène se produit si H varie parmi une famille de sous-groupes semi-simples simplements connexes : Alors $H(\mathbb{R})$ est compact et ce groupe de classes tend vers l'infini par les résultats de Borel et Prasad [BP89] (cf. [Pra91, théorème 5]). Les intégrales (10) pourraient donc tendre vers la mesure invariante. Nous reviendrons sur ces questions à l'aide des résultats de Waldspurger [Wal85]. Dans toute la suite de l'article nous supposerons que G n'a pas de facteurs définis sur $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$-anisotropes.

3. Sous-groupes de type $\mathcal{H}$

3.1 Groupes de types $\mathcal{H}$ et groupes de types $\mathcal{K}$

Dans ce chapitre nous étudions les conjectures $\mathcal{E}$ et $(\mathcal{E}_a)$ quand G est semi-simple sans facteurs $\mathbb{Q}$-simples $\mathbb{R}$-anisotropes et H appartient à la classe $\mathcal{H}$ définie dans l'introduction. Le lecteur est invité à se reporter à § 1.3 pour la définition des classes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$. Cette partie fait le lien entre ces deux classes.

On notera $L(H)$ le sous-groupe de de $H(\mathbb{R})$ engendré par les sous-groupes unipotents, donc pour H dans la classe $\mathcal{H}$

$$L(H) = R_u(H)(\mathbb{R}) \prod_i L(H_i) = NL(H_s)$$

où $L(H_i)$ est le produit des composantes neutres des facteurs $\mathbb{R}$-simples non compacts de $H_i(\mathbb{R})$. (Les produits sont presque directs).

Dans ce paragraphe nous étudions la relation entre cette définition algébrique et la catégorie définie à l'aide des propriétés ergodiques par Mozes et Shah [MS95]. Le lemme suivant est voisin de résultats de Shah [Sha91].

Lemme 3.1. *Soit H un groupe de type $\mathcal{F}$. Alors H est de type $\mathcal{H}$ si et seulement si, pour tout sous-groupe arithmétique Γ de $H(\mathbb{R})^+$, $L(H)$ opère ergodiquement sur $\Gamma\backslash H(\mathbb{R})^+$ par rapport à μ_H.*

Montrons tout d'abord qu'un groupe vérifiant l'hypothèse ergodique du lemme est de type $\mathcal{H}$. Soit en effet H un groupe de type $\mathcal{F}$, donc

$$H = N \rtimes (T.H_s)$$

où N est unipotent, T est un tore (anisotrope), H_s est semi-simple et le produit $T.H_s$ est quasi-direct. Alors $L(H) = N(\mathbb{R}) \rtimes L(H_s)$. On a un morphisme dominant

$$\pi : H \longrightarrow T'$$

pour un tore T' isogène à T. Si $\Gamma \subset H(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe arithmétique, $\pi(\Gamma) = \Gamma_{T'}$ est discret dans $T'(\mathbb{R})^+$. Les orbites de $L(H)$ s'envoient sur des points de $\Gamma_{T'}\backslash T'(\mathbb{R})^+$. Par hypothèse, il existe une orbite sous $L(H)$ qui est dense dans $\Gamma\backslash H(\mathbb{R})^+$. Comme π est dominant on en déduit que T' (et par suite T) est trivial.

Si H_s a un facteur H_i $\mathbb{Q}$-simple qui est $\mathbb{R}$-anisotrope, alors on a de même un morphisme surjectf

$$\Gamma\backslash H(\mathbb{R})^+ \longrightarrow \Gamma_i\backslash H_i'(\mathbb{R})^+$$

avec H_i' isogène à H_i, l'action de $L(H)$ à droite étant triviale. L'image Γ_i de Γ est contenue dans un sous-groupe arithmétique [Bor69, corollaire 7.3], donc est finie. Ceci contredit l'ergodicité.

Pour l'implication inverse, supposons H de type $\mathcal{H}$. Si H est semi-simple le lemme (3.1) est vérifié dans [CU, lemme 2.3]. En général $H = N \rtimes H_s$ et tout sous-groupe aritmétique de $H(\mathbb{R})^+$ contient un sous-groupe d'indice fini de la forme $\Gamma_N \rtimes \Gamma_s$ ([Bor69, corollaire 7.13]). Comme les revêtements finis ne changent pas les propriétés ergodiques, on est ramené à verifier que le produit semi-direct $N.L(H_s)$ opère ergodiquement sur $\Gamma_N\backslash N \times \Gamma_s\backslash H_s$. La démonstration facile de ce fait est laissée au lecteur.

Le résultat suivant est montré dans [CU] à partir de résultats antérieurs de Shah [Sha91].

Lemme 3.2. *Soit $F \subset G(\mathbb{R})^+$ un sous-groupe de type $\mathcal{K}$. Alors $F = G(\mathbb{R})^+$ pour un $\mathbb{Q}$-sous-groupe H de G de type $\mathcal{H}$. De plus si $L = L(F)$*

(a) $\overline{\Gamma\backslash\Gamma L} = \Gamma\backslash\Gamma F$ *dans* $G(\mathbb{R})^+$.

(b) *F est l'unique sous-groupe fermé de G tel que $\overline{\Gamma\backslash\Gamma L} = \Gamma\backslash\Gamma F$.*

Pour la commodité du lecteur nous rappelons la démonstration. Soit H le groupe de Mumford–Tate de L (le plus petit $\mathbb{Q}$ sous-groupe algébrique de G tel que $L \subset H(\mathbb{R})^+$). Le groupe L est invariant dans F et ergodique sur $\Gamma\backslash\Gamma F$. Il a donc une orbite dense. Il existe donc $g \in F$ tel que

$$\Gamma\backslash\Gamma F = \overline{\Gamma\backslash\Gamma g L} = \overline{\Gamma\backslash\Gamma L g},$$

d'où (a).

D'après Shah [Sha91, proposition 3.2], l'égalité (a) implique que $F = H(\mathbb{R})^+$, d'où les autres assertions.

3.2 La propriété $\mathcal{E}$ pour les suites de sous-groupes de types $\mathcal{H}$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.3. *Soit $G_{\mathbb{Q}}$ un groupe semi-simple de type $\mathcal{H}$ et soit $H_\alpha \subset G$ une suite stricte de sous-groupes de types $\mathcal{H}$. Alors la propriété $\mathcal{E}$ est vraie pour la suite H_α.*

Preuve. En effet, soit $X^+ = \Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$ et $X_\alpha^+ = \Gamma_\alpha\backslash H_\alpha(\mathbb{R})^+ \subset X^+$, notons μ_G et μ_α les mesures de probabilités associées sur X^+.

Rappelons que $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}(X^+)$ désigne le sous-ensemble de $\mathcal{P}(X^+)$ formé des mesures μ telles que le sous-groupe $L(\Lambda(\mu))$ agit ergodiquement par rapport à μ. Si $\mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ est le sous-ensemble de $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}(X^+)$ formé des mesures dont le support contient $\Gamma e \in X^+$, on a d'après le théorème 1.6 et le lemme 3.2 qui fait le lien entre les classes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ les faits suivants :

(i) $\mu \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ si et seulement si $\mu = \mu_F$ pour un $F \in \mathcal{H}$;

(ii) $\mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ est compact pour la topologie faible ;

(iii) si $\mu_\alpha \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ converge vers $\mu \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K},e}(X^+)$ alors $\mathrm{Supp}(\mu_\alpha) \subset \mathrm{Supp}(\mu)$ pour $\alpha \gg 0$.

Considérons donc une sous-suite μ_α convergeant vers $\mu \in \mathcal{P}(X^+)$. D'après (i) et (ii) $\mu = \mu_H$ pour un $H \in \mathcal{H}$. Pour $\alpha \gg 0$ (iii) implique que *Lie* $H_\alpha(\mathbb{R}) \subset$ *Lie* $H(\mathbb{R})$, donc $H_\alpha(\mathbb{R})^+ \subset H(\mathbb{R})^+$. Puisque $H_\alpha(\mathbb{Q})^+$ est Zariski-dense dans H_α, ceci implique que $H_\alpha \subset H$. La suite H_α étant stricte $H = G$, d'où le théorème. ∎

4. Familles à dégénérescence unipotente

4.1 Familles à dégénérescence unipotente

Nous supposons, sauf mention contraire que $G_{\mathbb{Q}}$ est semi-simple de type $\mathcal{H}$ (donc sans $\mathbb{Q}$-facteurs $\mathbb{R}$-anisotropes). Soit $H_{\alpha,\mathbb{Q}} \subset G_{\mathbb{Q}}$ une suite de $\mathbb{Q}$-sous-groupes. Nous notons, comme précédemment $G = G_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$ et $H_\alpha = H_{\alpha,\mathbb{Q}}(\mathbb{R})^+$. On note aussi $\mathfrak{h}_\alpha$ et $\mathfrak{g}$ les algèbres de Lie réelles correspondantes.

Définition 4.1. On dit que H_α est à dégénérescence unipotente si, pour toute sous-suite strictement croissante $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$, on peut trouver $Z_{\alpha_n} \in \mathfrak{h}_{\alpha_n}$ telle que Z_{α_n} converge vers un élément nilpotent non nul de $\mathfrak{g}$.

Supposons, comme on peut le faire, que $d = \dim(H_\alpha)$ est constant ; Soit $\mathcal{L}_d \subset Gr_d(\mathfrak{g})$ le sous-espace fermé de la grassmannienne des d-plans de $\mathfrak{g}$ formé des sous-algèbres de Lie ; alors la définition équivaut à la suivante.

Définition 4.1′ . Tout point d'accumulation de la suite $\mathfrak{h}_\alpha$ dans $\mathcal{L}_d$ est une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ ayant un élément nilpotent non nul.

Un exemple simple de suite à dégénérescence unipotente est donné par une suite H_α de groupes de type $\mathcal{H}$, puisque dans ce cas $\mathfrak{h}_\alpha$ contient un élément nilpotent (voir par exemple [MS95, lemme 2.2]). La démonstration du théorème 1.2 repose aussi sur la dégénérescence unipotente de suites strictes $H_\alpha = \gamma_\alpha^{-1} H \gamma_\alpha$, $\gamma_\alpha \in \Gamma$ ([EMS96, proposition 1.8 et 2.2]).

Un autre exemple intéressant est le suivant : Soit F un corps de nombres et $G = SL(2, F)$ vu comme $\mathbb{Q}$-groupe. Pour $d \in O_F$ non carré, soient $E_d = F(\sqrt{d})$ et $T_d = \mathrm{Ker}(N : E_d^* \to F^*)$ le tore associé. On considère le plongement entier de T_d dans G induit par

$$\begin{aligned} E_d &\longrightarrow M_2(F) \\ a + b\sqrt{d} &\mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{11}$$

La suite $H_{\alpha,\mathbb{Q}}$ est $T_d \subset SL(2, F)$ où $d \to \infty$ (selon le filtre des complémentaires de parties finies). Soit S_∞ l'ensemble des places archimédiennes de F. on a

$$\mathfrak{t}_d = Lie\ T_d = \oplus_{v \in S_\infty} \mathfrak{t}_{d,v}$$

avec

$$\mathfrak{t}_{d,v} = F_v \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix} \subset \mathfrak{sl}(2, F_v).$$

Si $d \to \infty$,

$$|N_{F/\mathbb{Q}} d| = \left| \prod_v N_{F_v/\mathbb{Q}_v}(d) \right| \longrightarrow \infty.$$

Quitte à considérer une sous-suite, on voit qu'il existe une place $v \in S_\infty$ telle que

$$\mathfrak{t}_{d,v} \to F_v \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

sous-algèbre nilpotente de $\mathfrak{sl}(2, F_v)$.

Le cas le plus simple où l'on peut démontrerl'équidistribution à l'aide de l'hypothèse (4.1) est le suivant.

Théorème 4.2. *On suppose que $G_{\mathbb{Q}}$ est anisotrope et que tout $\mathbb{Q}$-sous-groupe semi-simple de $G_{\mathbb{Q}}$ est $\mathbb{R}$-anisotrope. Si (H_α) est une suite à dégénérescence unipotente, (H_α) a les propriétés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_a$.*

Remarque 4.3. Dans cette situation, on vérifie aisément que (H_α) est nécéssairement une suite stricte.

Soit en effet μ_α la mesure invariante normalisée sur $X_\alpha^+ = \Gamma_\alpha \backslash H_\alpha(\mathbb{R})^+$. Quitte à choisir une sous-suite, on peut supposer que μ_α a une limite ν dans $\mathcal{P}(X^+)$, et qu'il existe une suite $Z_\alpha \in \mathfrak{h}_\alpha$ telle que $Z_\alpha \to Z$ où $Z \in \mathfrak{g}$ est nilpotent et non nul. D'après le Lemme A.3,

$$\nu * Z = \lim(\mu_\alpha * Z_\alpha) = 0.$$

D'après l'équation (95), ν est invariante par le groupe unipotent U engendré par Z.

D'après les résultats de Ratner, toute mesure ergodique U-invariante sur X est une translatée par $g \in G(\mathbb{R})^+$ de la mesure μ_F associé à un $\mathbb{Q}$-sous-groupe $F_\mathbb{Q}$ de $G_\mathbb{Q}$ de type $\mathcal{H}$ (on utilise ici l'identité entre la catégorie $\mathcal{H}$ de Mozes et Shah et celle utilisée dans cette article, vérifiée dans § 3.1). Nos hypothèses impliquent que G n'a pas de sous-groupes de type $\mathcal{H}$ hormis lui même.

En décomposant ν en composantes ergodiques sous l'action de U, on voit que $\nu = \mu_G$. Ceci démontre $\mathcal{E}$.

Pour démontrer $\mathcal{E}_a$, nous écrivons de façon explicite le plongement $X_\alpha \hookrightarrow X$ considéré dans l'introduction. Rappelons que $X^+ \subset G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$ et que $X_\alpha^+ = H_\alpha(\mathbb{Q})\backslash H_\alpha(\mathbb{A})/K_\alpha \cap X^+$. Ecrivons

$$H_\alpha(\mathbb{A}) = \coprod H_\alpha(\mathbb{Q}) H_\alpha(\mathbb{R})^+ s_j K_\alpha$$

(union finie) où $s_j \in H_\alpha(\mathbb{A}_f)$. Alors X_α^+ est l'image de la famille de composantes telles que $s_j \in G(\mathbb{Q})G(\mathbb{R})^+K$. Soit donc

$$s_j = \gamma g_\infty k$$

où $\gamma \in G(\mathbb{Q})$, $g_\infty \in G(\mathbb{R})^+$ et $k \in K$. On a donc $g_\infty = \gamma^{-1}$ où γ est considéré comme un élément de $G(\mathbb{R})$. Pour ce choix de j, l'application correspondante de $H_\alpha(\mathbb{R})^+$ vers X^+ est obtenue, par passage au quotient à partir de

$$x_\infty \to \gamma^{-1} x_\infty \quad (x_\infty \in H_\alpha(\mathbb{R})^+).$$

La mesure correspondante ($H_\alpha(\mathbb{R})^+$ opérant à droite) est donc encore invariante par $\mathfrak{h}_\alpha$, d'où le résultat.

L'exemple le plus simple où le théorème 4.2 s'applique est le suivant. Soit d un nombre premier, F un corps de nombres n'ayant aucun sous-corps propre, D une algèbre à division sur F de degré d et $G_\mathbb{Q} = SL(1, D)$ considéré comme groupe sur $\mathbb{Q}$. On suppose $G(\mathbb{R})$ non compact. Alors $G_\mathbb{Q}$ est un groupe anisotrope dont les seuls sous-groupes propres sont des tores. Plus généralement ceci reste vrai si D ne provient pas par extension des scalaires d'une algèbre $D_{F'}$ pour un sous-corps F' de F. Ceci résulte des arguments d'algèbre linéaire donnés dans [Clo03], que nous ne répétons pas. Si (T_α) est une famille de tores maximaux à dégénérescence unipotente, le théorème 4.2 s'applique donc à (T_α).

Par contraste avec le cas de $GL(2)$, il est difficile de construire des plongements explicites $E \subset D$, pour les extensions E de F de degré d qui se plongent dans D – et donc de vérifier la condition 4.1. Notons néanmoins le cas suivant de dégénérescence unipotente. Soit $\mathfrak{g} = Lie(G(\mathbb{R}))$ et soit $\mathcal{T}_r \subset \mathcal{L}_r$ la sous-variété fermée des sous-algèbres de Cartan ; r est donc égal au rang sur $\mathbb{R}$ d'une sous-algèbre de Cartan, donc $r = (d-1)[F : \mathbb{Q}]$. Alors $\mathcal{T}_r$ est l'ensemble des points réels d'une variété homogène

$$\mathcal{T}_r(\mathbb{C}) \simeq G(\mathbb{C})/N(\mathbb{C})$$

où $N \subset G$ est le normalisateur d'un tore. Alors $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_r(\mathbb{R})$ est réunion d'un nombre fini d'orbites sous $G(\mathbb{R})$, donc est muni d'une topologie quotient naturelle.

Proposition 4.4. *Si (T_α) est une suite de tores maximaux de $G_\mathbb{Q}$ tels que $Lie(T_\alpha) \to \infty$ dans $\mathcal{T}_r$, alors (T_α) a les propriétés $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}_a$.*

Soit en effet $\mathcal{A}_r \subset \mathcal{L}_r$ la sous-variété fermée des algèbres de Lie abéliennes. Si $\mathfrak{t}_\alpha = Lie(T_\alpha)$ tend vers l'infini, toute sous-suite convergente dans $\mathcal{L}_r$ a une limite $\mathfrak{h} \in \mathcal{A}_r \setminus \mathcal{T}_r$. Alors $\mathfrak{h}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathfrak{g}$ qui n'est pas une sous-algèbre de Cartan : elle contient des éléments nilpotents.

4.2 Suites de tores entiers dans $SL(2,F)$

Soient F un corps de nombres et $E_d = F(\sqrt{d})$ une extension quadratique de F. Rappelons que l'ensemble des plongements entiers $O_{E_d} \hookrightarrow M_2(O_F)$, modulo $GL(2,O_F)$, est paramétré par

$$\mathrm{Ker}(N_{E_d/F} : Pic^0(E_d) \to Pic^0(F)).$$

Il y a donc bien d'autres plongements entiers que ceux décrits dans § 4.1. Nous serons amenés à faire, néanmoins, une hypothèse plus forte si F est arbitraire.

DÉFINITION 4.5. Soit (T_α) une famille de tores maximaux dans $SL(2,F)$. On dit que (T_α) est à dégénérescence unipotente *régulière* si tout point d'accumulation de $(\mathfrak{t}_\alpha)$ dans $\mathcal{L}_d$ est une sous-algèbre unipotente $\mathfrak{u}$ de $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, F \otimes \mathbb{R})$.

Pour les plongements décrits avant le théorème 4.2, ceci revient à supposer que $|N_{E_v/\mathbb{R}}(d)|$ tend vers 0 ou ∞ en toute place archimédienne v de F.

Sous ces hypothèses, nous obtenons le théorème suivant qui ne paraît pas accessible actuellement par les méthodes de théorie analytique des nombres.

THÉORÈME 4.6. *Si (T_α) est à dégénérescence unipotente régulière et si f est une forme parabolique sur $X = \Gamma\backslash SL(2, F \otimes \mathbb{R})$ pour un sous-groupe de congruences Γ, $\mu_\alpha(f)$ et $\mu_{\alpha,a}(f)$ tendent vers 0 pour $\alpha \to \infty$.*

Remarque 4.7. Noter que si $F = \mathbb{Q}$, le théorème précédent s'applique à tous les plongements entiers

Notons $\overline{X} = X \cup \{\infty\}$ le compactifié d'Alexandroff de X. L'ensemble $\mathcal{P}(\overline{X})$ des mesures de probabilités sur $\overline{X}$ est alors compact. Soit U le sous-groupe unipotent maximal (triangulaire supèrieur) de $SL(2, F \otimes \mathbb{R})$. L'action de U sur X se prolonge en une action continue sur $\overline{X}$ avec $u.\infty = \infty$ pour tout $u \in U$.

Soit ν une mesure U-invariante ergodique sur $\overline{X}$. Comme $\{\infty\}$ est U invariant on a $\nu(\infty) = 1$ ou $\nu(\infty) = 0$. Dans le premier cas $\nu = \delta_\infty$ dans le second $\nu_{|X}$ est une mesure U-invariante ergodique sur X donc est classifiée par les résultats de Ratner.

Le théorème de Mozes et Shah nous amène à considérer les sous-groupes H de type $\mathcal{H}$ de $G_\mathbb{Q} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\, SL(2)$ tels que $H(\mathbb{R})$ contient un conjugué de U. Ecrivons $H = SN$ avec S semi-simple et N unipotent. Si $S \neq \{1\}$, S est de la forme $\mathrm{Res}_{F'/\mathbb{Q}}\, SL(2)$ pour un sous-corps F' de F. Un tel sous-groupe ne normalise aucun sous-groupe unipotent, donc $N = \{1\}$. Si $U \subset H(\mathbb{R})$, on voit que $H = G$.

Si $S = \{1\}$, $N(\mathbb{R})$ doit contenir un conjugué de U et donc N est à conjugaison près, égal à U (vu comme $\mathbb{Q}$-groupe). Si $H \subset G$ est un sous-groupe de type $\mathcal{H}$, on note [MS95, p. 153]

$$\underline{N}(H,U) = \{g \in G : U \subset g^{-1}Hg\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
\underline{N}(H,U) &= G(\mathbb{R}) \quad (\text{si } H = G) \\
\underline{N}(H,U) &= \{g \in G(\mathbb{R}) : U \subset g^{-1}\gamma^{-1}U\gamma g\} \\
&= \gamma^{-1}B(\mathbb{R}) \quad (\text{si } H = \gamma^{-1}U\gamma, \gamma \in G(\mathbb{Q}))
\end{aligned}$$

où $B(\mathbb{R})$ est le sous-groupe de Borel associé à U.

$$\underline{N}(H,U)=\emptyset \quad \text{si } H \text{ n'est pas de ce type.}$$

Par la compacité de $\overline{X}$, on peut supposer que $\mu_\alpha \to \mu' \in \mathcal{P}(\overline{X})$. D'après l'hypothèse de dégénérescence unipotente régulière et la démonstration du théorème 4.2, μ' est invariant par un sous-groupe unipotent maximal $U' = hUh^{-1}$ $(h \in G(\mathbb{R}))$ de $G(\mathbb{R})$. Alors $\mu = \mu' * h$ est invariant par U.

Remarque. D'après le théorème 2.2 de [MS95], toute composante U-invariante ergodique de μ est égale (à un scalaire près) à :

(i) la mesure de Dirac δ_∞ ;

(ii) la mesure $G(\mathbb{R})$-invariante μ_G ;

(iii) la mesure invariante sur $\Gamma\cap H\backslash H.g$ pour $H=\gamma^{-1}U\gamma$ et $g\in\gamma^{-1}B(\mathbb{R})$, $(\gamma\in G(\mathbb{Q}))$.

(Il suffit du reste dans (iii) de considérer l'ensemble fini, correspondant aux pointes, des H modulo Γ.)

Si f est une forme parabolique, les intégrales de f contre les mesures des équations (i), (ii) et (iii) s'annulent, donc $\mu_\alpha(f)\to 0$. Le même argument, comme on l'a vu dans § 4.1, s'applique à $\mu_{\alpha,a}$.

4.3 Le cas de $SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$

Pour $G_\mathbb{Q}=SL(2,\mathbb{Q})$ et des fonctions K_∞-invariantes on peut obtenir des résultats plus précis que le théorème 4.6. On prend $\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$, $X=\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$. On se donne une suite d'entiers $-d<0$ avec d sans facteur carré et on considère le tore $T_d\subset G_\mathbb{Q}$ le plongement étant donné par l'équation (11). L'hypothèse 4.1 est vérifiée avec

$$\mathfrak{h}=\mathbb{R}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}.$$

On considère donc la suite de mesure μ_d :

$$\mu_d(f)=\int_{T_d(\mathbb{R})} f(t)\,dt,$$

où

$$T_d(\mathbb{R})=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-db&a\end{pmatrix},\quad a^2+db^2=1\right\}.$$

Soit $K_\infty=SO(2)\subset SL(2,\mathbb{R})$. Pour toute fonction f, K_∞-invariante sur X, on note $\overline{f}$ la fonction associée sur le demi-plan de Poincaré définie par $\overline{f}(z)=f(g.\sqrt{-1})$.

Théorème 4.8. *Pour toute fonction continue à support compact f sur X, K_∞-invariante et pour toute suite stricte T_d on a*

$$\lim_{d\to\infty}\mu_d(f)=\int_0^1\overline{f}(\sqrt{-1}+x)\,dx=\int_{U\cap\Gamma\backslash U}f(u)\,du$$

où U désigne le groupe unipotent standard $\left(\begin{smallmatrix}1&x\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

Preuve. Pour $t=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\-db&a\end{smallmatrix}\right)\in T_d(\mathbb{R})$ on a alors

$$\int_{T_d(\mathbb{R})}f(t)\,dt=\int\overline{f}\left(\frac{a\sqrt{-1}+b}{-db\sqrt{-1}+a}\right)dt=\int\overline{f}(\sqrt{-1}+(1-d)ab)\,dt.$$

La mesure invariante sur $T_d(\mathbb{R})$ est donnée par $a=\cos(2\pi\theta)$, $b=\sin(2\pi\theta)/\sqrt{d}$ $dt=d\theta$. On a alors

$$\lim_{d\to\infty}\int_{T_d(\mathbb{R})}f(t)\,dt=\lim_{d\to\infty}\int_0^1\overline{f}\left(\sqrt{-1}+\frac{(1-d)\sin 4\pi\theta}{2\sqrt{d}}\right)d\theta.$$

La fonction $\overline{f}(\sqrt{-1}+x)$ est invariante par $\mathbb{Z}$. Pour montrer le théorème 4.8, il suffit de prouver que pour toute fonction continue g sur $[0,1]$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^1 g(R\sin(4\pi\theta))\,d\theta = \int_0^1 g(\theta)\,d\theta.$$

Par la théorie de Fourier (et la convergence dominée) il suffit de montrer que

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^1 e^{R\sin(4\pi\theta)}\,d\theta = 0.$$

Ce dernier point est encore une application du lemme de Riemann. □

5. Intégrales toriques

5.1 La formule de Waldspurger

Soient F un corps de nombres, $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(GL_{2,F})$ et (π, E) une représentation automorphe cuspidale de $GL_2(\mathbb{A}_F)$ de caractère central trivial. Soit $e = (\otimes e_v) \in E$ un vecteur décomposé de norme L^2 égale à 1. Soit T un tore maximal de $GL_{2,F}$ et F_T l'extension quadratique de F associée. On notera Π le changement de base de π à $GL_2(\mathbb{A}_{F_T})$ et χ_T le caractère quadratique associé. On se donne de plus $g = (g_v) \in GL_2(\mathbb{A}_F)$ avec $g_v = 1$ pour toute place non archimédienne. On note S_F l'ensemble des places de F et $C(\pi)$ une constante ne dépendant que de (π, E) (et non de T) qui peut varier d'une équation à l'autre. La formule fondamentale de Waldspurger [Wal85, proposition 7, p. 222] est

$$\left|\int_{Z(\mathbb{A}_F)T(F)\backslash T(\mathbb{A}_F)} e(tg)\,dt\right|^2 = C(\pi)L\left(\Pi,\frac{1}{2}\right)\prod_{v\in S_F}\alpha(e_v,g_v,T_v) \tag{12}$$

avec

$$\alpha(e_v,g_v,T_v) = \frac{L(\chi_{T_v},1)L_2(\pi_v,1)}{\zeta_v(2)L(\Pi_v,\frac{1}{2})}\int_{Z_v\backslash T_v}\frac{\langle \pi_v(tg_v)e_v,\pi_v(g_v)e_v\rangle}{\langle e_v,e_v\rangle}\,dt. \tag{13}$$

Dans ces formules ζ_v désigne la fonction ζ locale du corps F_v, les fonctions $L(\chi_{T_v},\cdot)$, $L_2(\pi_v,\cdot)$ et $L(\Pi_v,\cdot)$ sont les facteurs locaux en v des fonctions L automorphes correspondantes. La fonction $L_2(\pi,\cdot)$ désigne la fonction L du relèvement de π à PGL_3 ([GJ78]). En toute place $v \in S_F$ on a fixé un produit scalaire π_v-invariant $\langle\,,\rangle$; comme ce produit est unique à homothétie près l'intégrale locale définissant $\alpha(e_v,g_v,T_v)$ n'en dépend pas. Waldspurger [Wal85] montre que toutes ces intégrales sont convergentes et que pour presque tout $v \in S_F$, $\alpha(e_v,g_v,T_v) = 1$.

Les mesures sont normalisées à la Tate. Nous supposerons dans la suite que T est un tore 'entier', associé à un plongement de F_T dans $M_2(F)$

$$a + b\sqrt{d} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$a + b\sqrt{d} \mapsto \begin{pmatrix} a & bd \\ b & a \end{pmatrix} \tag{15}$$

avec $d \in O_F$ sans facteur carré (i.e., non divisible par le carré d'un entier qui n'est pas une unité) tel que $F_T = F[\sqrt{d}]$. Un tel tore est dit standard.

Avec ces hypothèses, le volume de $Z(\mathbb{A}_F)T(F)\backslash T(\mathbb{A}_F)$ est calculé dans (Lang [Lan94, proposition 9; p. 294]) et vaut

$$\kappa = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2}h_T R_T}{w d_T^{1/2}}.$$

Dans cette formule r_1 et r_2 désignent le nombre de places réelles et complexes de F_T, h_T, R_T et d_T désignent le nombre de classes, le régulateur de O_{F_T} et la valeur absolue du discriminant. Enfin w est un nombre entier non nul uniformément borné.

Soit $K \subset \prod_{v \in S_{F,fin}} GL(2, O_v)$ un sous-groupe compact ouvert de $GL(2, \mathbb{A}_F)$ et $K_T = T(\mathbb{A}_F) \cap K$. On suppose que e est K-invariant. Nous pouvons donc réécrire la formule de Waldspurger sous la forme

$$\left| \int_{Z(\mathbb{A}_F)T(F)\backslash T(\mathbb{A}_F)/K_T} e(tg)\, dt_{\mathrm{norm}} \right|^2 = \frac{C(\pi)L(\Pi, \frac{1}{2})d_T}{h_T^2 R_T^2} \prod_{v \in S_F} \alpha(e_v, g_v, T_v) \tag{16}$$

où la mesure dt_{norm} est normalisée de sorte que le volume de $Z(\mathbb{A}_F)T(F)\backslash T(\mathbb{A}_F)/K_T$ soit 1.

Pour énoncer le théorème principal de cette section nous introduisons la constante de Selberg θ définie comme $\theta = \max_\lambda |\operatorname{Re}(\lambda)|$ où λ est le paramètre d'Harish-Chandra de la composante en une place archimédienne d'une représentation automorphe cuspidale de $GL(2)_F$. (Avec nos normalisations, cf. §§ 5.2.1 et 5.2.2, $\lambda = 1$ correspond à la représentation triviale.)

Théorème 5.1. *Soit T un tore standard associé à $d \in O_F$. Alors pour tout $\epsilon > 0$*

$$\left| \int_{Z(\mathbb{A}_F)T(F)\backslash T(\mathbb{A}_F)/K_T} e(t)\, dt_{\mathrm{norm}} \right| \ll |d|^{-1/4+\theta/4+\epsilon} \tag{17}$$

où $|d| = \prod_{v|\infty} |d|_v$.

La preuve du théorème repose sur la formule (16) et sur le calcul des $\alpha(e_v, 1, T_v) = \alpha(e_v, T_v)$ qui sera l'objet de la section suivante où l'on montrera :

Proposition 5.2. *Pour tout $\epsilon > 0$*

$$\prod_{v \in S_F} \alpha(e_v, T_v) \ll |d|^{-1+\theta/2+\epsilon} \tag{18}$$

et

$$\prod_{v \in S_F^{fin}} \alpha(e_v, T_v) \ll |d|^{-1/2+\epsilon}, \tag{19}$$

le produit portant maintenant sur les places finies.

On obtient le théorème 5.1 en utilisant les points suivants.

D'après le théorème de Brauer–Siegel [Lan94, Corollaire, p. 328] on sait que pour $d_T \to \infty$ on a

$$\log(h_T R_T) \sim \log d_T^{1/2}. \tag{20}$$

Au vu de l'équation (16) il nous faut comprendre le comportement de $L(\Pi, \frac{1}{2})$ quand T varie. Nous conseillons pour cela le papier de Michel [Mic]. Décrivons brièvement la situation générale pour des familles de fonctions L automorphes. Soit $L(\theta, s) = \prod_{p<\infty} L_p(\theta, s)$ la fonction L d'une représentation automorphe $\theta = \otimes \theta_p$ ayant un produit eulerien de degré r. On sait alors que $L_p(\theta, s)$ est de la forme

$$L_p(\theta, s) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{\alpha_i(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

pour des paramètres locaux $\alpha_i(p)$ de θ_p et que le produit converge pour $\operatorname{Re}(s)$ assez grand. On peut aussi définir un facteur local à l'infini $L_\infty(\theta, s)$ qui, au moins si θ_∞ est non ramifiée, est de la forme

$$L_\infty(\theta, s) = \prod_{I=1}^{r} \Gamma_{\mathbb{R}}(s - \mu_i(\infty)), \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(s) = \pi^{-s/2}\Gamma(s/2).$$

On a alors un prolongement analytique et une équation fonctionelle de la forme

$$q(\theta)^{s/2}L_\infty(\theta,s)L(\theta,s)=w(\theta)q(\theta)^{(1-s)/2}L_\infty(\tilde{\theta},1-s)L(\tilde{\theta},1-s)$$

pour un entier $q(\theta)$ (le conducteur arithmétique). Dans cette équation $\tilde{\theta}$ désigne la contragédiente de θ et $w(\theta)$ un nombre complexe de module 1. Le nombre réel $Q(\theta)=q(\theta)\prod_{i=1}^{r}|\frac{1}{2}-\mu_i(\infty)|$ est appelé conducteur analytique de θ. On a alors quand $Q(\theta)\to\infty$ la borne de convexité [Mic, Proposition 1.2 p. 8] :

$$|L(\theta,\tfrac{1}{2})|\ll_\epsilon Q(\theta)^{1/4+\epsilon}$$

et l'hypothèse de Riemann généralisée implique l'hypothèse dite de Lindelöf

$$|L(\theta,\tfrac{1}{2})|\ll_\epsilon Q(\theta)^{\epsilon}.$$

Dans notre situation, on a $L(\Pi,s)=L(\pi,s)L(\pi\otimes\chi_T,s)$,

$$q(\pi\otimes\chi_T)=q(\pi)d_T^2$$

et

$$Q(\pi\otimes\chi_T)\ll d_T^2$$

de sorte que la borne de convexité donne

$$L(\Pi,\tfrac{1}{2})\ll_\epsilon d_T^{1/2+\epsilon}. \tag{21}$$

Sous nos hypothèses, d_T est majoré par le produit d'une constante fixe (dépendant de F) et de $|d|=|N_{F/\mathbb{Q}}d|$. Ceci implique que le théorème 5.1 est une conséquence de la proposition 5.2.

Notons que l'hypothèse de Lindelöf prévoit dans la situation précédente que

$$L(\Pi,\tfrac{1}{2})\ll_\epsilon d_T^{\epsilon}. \tag{22}$$

Par ailleurs la conjecture de Selberg prévoit que l'on peut prendre $\theta=0$. On s'attend donc à une borne de la forme :

$$\left|\int_{Z(\mathbb{A}_F)T(F)\backslash T(\mathbb{A}_F)/K_T} e(t)\,dt_{\mathrm{norm}}\right|\ll|d|^{-1/2+\epsilon}. \tag{23}$$

5.2 Intégrales toriques locales

Pour comprendre la variation des intégrales toriques globales à l'aide de la formule de Waldspurger (12), nous sommes amenés à étudier le comportement quand T varie des intégrales toriques locales intervenant dans le membre de droite de (12).

Nous le ferons sous des hypothèses simplificatrices. Nous considérons toujours une suite de tores standard de $GL(2,F)$ plongés dans $GL(2)$ par les plongements décrits dans les formules (14) et (15). Nous supposons en fait dans cette partie le tore standard donné par le plongement (14) et laissons au lecteur le soin de modifier l'argument pour le plongement (15).

Soit v une place de F, notons f_v le coefficient de π_v qui apparaît dans la formule (13). Nous voulons estimer, quand T_v varie, l'intégrale torique :

$$\Psi_{T_v}(f_v)=\int_{Z_v\backslash T_v} f_v(t)\,dt \tag{24}$$

où

$$f_v(t)=\frac{\langle\pi_v(t)e_v,e_v\rangle}{\langle e_v,e_v\rangle},$$

de sorte que

$$\alpha(e_v,T_v)=\frac{L(\chi_{T_v},1)L_2(\pi_v,1)}{\zeta_v(2)L(\Pi_v,\frac{1}{2})}\Psi_{T_v}(f_v).$$

Nous supposerons dans un premier temps que f_v est une fonction sphérique pour un compact maximal K_v de $GL(2,F_v)$, donc que e_v est K_v-invariant.

5.2.1 *Places complexes.* On notera simplement $G = GL(2,\mathbb{C})$ et T_d le tore en position standard,

$$T_d = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} : a,b \in \mathbb{C}, \quad a^2 - b^2 d \neq 0 \right\}.$$

On supposera que f est une fonction sphérique pour $K = U(2)$. En conjuguant T_d par $\left(\begin{smallmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ où $|u| = 1$, ce qui ne change pas l'intégrale (24), on remplace d par $\delta = u^{-2}d$; on supposera donc $d > 0$.

La mesure utilisée par Waldspurger sur T_d s'obtient en identifiant T_d à $(\mathbb{C}^*)^2$ par

$$(a,b) \longrightarrow (z,w) = (a + b\sqrt{d}, a - b\sqrt{d}) \in (\mathbb{C}^*)^2$$

et en utilisant une mesure fixe, par exemple $dz/|z|_{\mathbb{C}} = dx\,dy/|z|_{\mathbb{C}}$, sur les facteurs.

L'intersection $T_{0,d}$ de T_d avec $G_0 = SL(2,\mathbb{C})$ est donnée par

$$zw = a^2 - b^2 d = 1.$$

Le caractère central étant supposé trivial ou au moins unitaire, on calculera des intégrales sur $T_{0,d}$ en utilisant la variable z et la mesure $dz/|z|_{\mathbb{C}}$.

On peut écrire un élément de $T_{0,d}$ sous la forme $z = e^t u$ où $|u| = 1$ et $t \in \mathbb{R}$. Alors

$$a = \frac{1}{2}(e^t u + e^{-t}u^{-1}), \quad b = \frac{1}{2\sqrt{d}}(e^t u - e^{-t}u^{-1}). \tag{25}$$

La valeur de f en un élément $g = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right) \in G_0$ s'obtient à partir de la valeur de f en $x = \left(\begin{smallmatrix} T & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{smallmatrix}\right)$ par

$$f(g) = f(x)$$

où d'après la décomposition de Cartan

$$\mathrm{Tr}(xx^*) = \mathrm{Tr}(gg^*)$$

soit pour $g \in T_{0,d}$

$$2|a|^2 + |b|^2(d^2+1) = T^2 + T^{-2}. \tag{26}$$

Pour $\lambda \in \,]-1,1[\, \cup i\mathbb{R}$ le paramètre de π d'Harish-Chandra[1], la fonction sphérique $f = f_\lambda$ est donné par

$$f_\lambda(x) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{T^\lambda - T^{-\lambda}}{T - T^{-1}}\right) \quad (\lambda \neq 0)$$
$$f_0(x) = \frac{2\log T}{T - T^{-1}},$$

la seconde fonction, obtenue par prolongement analytique en λ n'étant autre que la fonction Ξ d'Harish-Chandra [Hel84].

L'intégrale torique est

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi} f_\lambda(g)\,dt\,d\theta \tag{27}$$

où $g \in T_{0,d}$ est défini par $z = e^t u = e^t e^{i\theta}$.

Nous calculons, à $u = e^{i\theta}$ fixé l'intégrale en t de (27) que l'on note $I_{\lambda,\theta}$. Utilisant la symétrie de f_λ, on calcule l'intégrale pour $t \in [0,\infty]$. Posons $A = d + \frac{1}{d}$, d'après (25), (26) :

$$T^2 + T^{-2} = (2+A)\cosh^2 t - A + C = (A+2)\sinh^2 t + 2 + C \geqslant 2 + C \tag{28}$$

[1] Normalisé comme chez Helgason [Hel84] de sorte que $\lambda = 1$ correspond à la représentation triviale.

où

$$C = \sin^2(\theta)\frac{(d-1)^2}{d} \geqslant 0.$$

En particulier $C \leqslant (d-1)^2/d = A-2$ donc $A-C \geqslant 2$.

Différentiant (28), on obtient

$$(T^2 - T^{-2})\frac{dT}{T} = (A+2)\cosh t \sinh t\, dt.$$

Utilisant (28) de nouveau on trouve

$$I_{\lambda,\theta} = \frac{2}{\lambda}\int_{T_0}^{\infty} \frac{(T^\lambda - T^{-\lambda})(T+T^{-1})}{\sqrt{T^2+T^{-2}+A-C}\sqrt{T^2+T^{-2}-2-C}}\frac{dT}{T} \tag{29}$$

où $T_0 > 1$ est donné par

$$T_0^2 + T_0^{-2} = 2 + C, \quad C \geqslant 0. \tag{30}$$

Posons

$$B = 2 + C = A\sin^2\theta + 2\cos^2\theta. \tag{31}$$

On a par ailleurs

$$A - C = 2\sin^2\theta + A\cos^2\theta.$$

Proposition 5.3. *Pour $d \to \infty$,*

(1) *Si $\lambda \neq 0$,*

$$\Psi_{T_d}(f_\lambda) = O(d^{-1+\mathrm{Re}(\lambda)/2})$$

(2) *Pour tout $\epsilon > 0$:*

$$\Psi_{T_d}(f_0) = O(d^{-1/2+\epsilon}).$$

Preuve. On suppose d'abord que $\lambda \in i\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dans ce cas $|T^\lambda - T^{-\lambda}| \leqslant 2$ et l'intégrale se borne à une constante près par

$$\int_0^\pi\int_{T_0}^\infty \frac{T+T^{-1}}{\sqrt{T^2+T^{-2}+A-C}\sqrt{T^2+T^{-2}-B}}\,\frac{dT}{T}\,d\theta$$

où T_0 est donné par (30). En prenant pour variable $w = 1/B(T^2+T^{-2}) \geqslant 1$ l'intégrale se réduit à

$$\int_0^\pi d\theta\int_1^\infty \frac{B\,dw}{\sqrt{Bw-2}\sqrt{Bw-B}\sqrt{Bw-B+A+2}},$$

l'intégrale en w étant elliptique de première espèce. En posant $s = w-1$, l'intégrale à θ fixé donne à une constante près

$$\frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{s+(B-2)/B}\sqrt{s+(A+2)/B}}. \tag{32}$$

Pour $A \to \infty$ et $\theta \neq 0, \pi$;

$$\frac{B-2}{B} \to 1$$
$$\frac{A+2}{B} \to \frac{1}{\sin^2\theta},$$

les membres de gauche étant fonction croissantes de A si $\theta \notin [\pi/4, 3\pi/4]$.

L'intégrale en θ de (32) est alors majorée par

$$A^{-\frac{1}{2}}\int_0^\pi \frac{d\theta}{|\sin\theta|}\int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{s+(B-2)/B}\sqrt{s+(A+2)/B}}.$$

Par convergence monotone (pour θ voisin de 0 ou π) et dominée (ailleurs), l'intégrale entre accolades converge pour $A \to \infty$ vers

$$\int_0^\pi d\theta \int_0^\infty \frac{ds}{\sqrt{s}\sqrt{s+1}\sqrt{s\sin^2\theta+1}} < \infty,$$

d'où la proposition pour $\lambda \in i\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Si $\lambda > 0$, on majore $T^\lambda - T^{-\lambda}$ par $2T^\lambda$, avec les notations précédentes $w \geqslant T^2/B$, d'où $T^\lambda \leqslant B^{\lambda/2} w^{\lambda/2}$ et enfin $w^{\lambda/2} \ll (s_+)^{\lambda/2}$ où $s_+ = \max(1, s)$.

L'intégrale totale est alors majorée par

$$A^{(-1+\lambda)/2} \int_0^\pi \int_0^\infty \frac{(s_+)^{\lambda/2} |\sin\theta|^\lambda \, d\theta \, ds}{\sqrt{s}\sqrt{s+1}\sqrt{s\sin^2\theta+1}}.$$

Ceci termine la preuve dans ce cas (et pour $\lambda < 0$ par symétrie) la double intégrale étant convergente. Enfin le résultat pour $\lambda = 0$ s'obtient en remarquant que pour tout $\lambda > 0$ et tout x, $f_0(x) \leqslant f_\lambda(x)$. □

5.2.2 *Places réelles.* Dans cette section $G = GL(2, \mathbb{R})$, $G_0 = SL(2, \mathbb{R})$ et on note encore

$$T_{0,d} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, \quad a^2 - b^2 d = 1 \right\}.$$

Soit $x = \left(\begin{smallmatrix} e^{r/2} & 0 \\ 0 & e^{-r/2} \end{smallmatrix}\right)$, $r > 0$ un élément du tore diagonal de G_0. Pour $\lambda \in \left]-1, 1\right[\cup i\mathbb{R}$, soit f_λ la fonction définie par

$$F_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cosh r + \sinh r \cos u)^{(\lambda-1)/2} \, du.$$

C'est la fonction sphérique de paramètre λ. En termes classiques [MOS66, p. 184], $f_\lambda(x) = \mathfrak{P}_\nu(v)$ (fonction de Legendre) où $\nu = (\lambda - 1)/2$ et $v = \cosh r$. Vu l'invariance de f_λ par $g \to -g$ et $g \to g^{-1}$, on a

$$\Psi_{T_d}(f_\lambda) = 4 \int_{T_{0,d,+}} f_\lambda(t) \, dt$$

où

$$T_{0,d,+} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ db & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, \ a^2 - b^2 d = 1 a > 0, b > 0 \right\}.$$

Proposition 5.4. *Pour* $|d| \to \infty$,

$$\Psi_{T_d}(f_\lambda) = O(|d|^{(\mathrm{Re}(\lambda)-1)/2+\epsilon}).$$

Supposons d'abord $d > 0$, on pose $a = \cosh t$, $b = \sinh t/\sqrt{d}$, $A = d + 1/d$. Si $z = a + b\sqrt{d} = e^t$ est la paramétrisation de $T_{0,d}$, la mesure invariante associée est $dz/z = dt$. On obtient dans cette situation

$$2\cosh r = (A+2)\cosh^2 t - A$$
$$\sinh r \ dr = (A+2) \sinh t \cosh t \, dt.$$

En posant $v = \cosh r$ comme ci-dessus, on trouve

$$\Psi_{T_d}(f_\lambda) = 4 \int_1^\infty \mathfrak{P}_\nu(v) \frac{dv}{\sqrt{2v+A}\sqrt{2v-2}}.$$

Supposons d'abord que $\mathrm{Re}(\lambda) = 0$. Alors $\Psi_{T_d}(f_\lambda)$ est majoré par l'intégrale correspondant à $\lambda = 0$; f_λ est alors la fonction Ξ d'Harish-Chandra. On a alors pour tout $\epsilon > 0$

$$A^{(1-\epsilon)/2} \Psi_{T_d}(f_\lambda) \leqslant 4 \int_1^\infty \mathfrak{P}_{-1/2}(v) \frac{dv}{(2v)^{\epsilon/2}\sqrt{2v-2}(1+2v/A)^{(1-\epsilon)/2}}.$$

Par convergence dominée, il suffit de montrer la convergence de

$$\int_1^\infty \mathfrak{P}_{-1/2}(v)\frac{dv}{v^{\epsilon/2}\sqrt{v-1}}. \tag{33}$$

La fonction sphérique n'ayant pas de singularités en 1, l'intégrale converge en $v=1$. Pour $v\to\infty$, on sait d'après Harish-Chandra que

$$f_0(x) \leqslant e^{-r/2}(\alpha+\beta r) \quad (\alpha>0, \beta>0).$$

En termes classiques, ceci se déduit du fait que

$$\mathfrak{P}_{-1/2}(v) = \frac{2}{\pi}K(k^2)\sqrt{1-k^2}, \quad k^2 = \frac{v-1}{v+1}$$

[MOS66, p. 370] où K est l'intégrale elliptique usuelle de première espèce. On déduit de la représentation intégrale de K que

$$K(k^2) = -\log(1-k^2) + O(1) \quad \text{pour } k\to 1$$
$$K(k^2) = \log(v) + O(1) \quad \text{pour } v\to\infty.$$

Comme $\sqrt{1-k^2} = \sqrt{2/(v+1)}$, pour tout $\epsilon>0$ l'intégrale (33) est convergente.

Si $\lambda>0$, les majorations nécessaires pour les fonctions de Legendre sont plus difficiles à trouver dans la littérature ; cependant la théorie des exposants d'Harish-Chandra implique que pour $r\to\infty$:

$$f_\lambda(x) \leqslant e^{((\lambda-1)/2)r}P(r)$$

pour un polynome P. Le même argument permet de conclure.

Le cas $d<0$ est très semblable, donnons brièvement l'argument. On pose $a=\cos t$, $b=\sin t/\sqrt{-d}$ ($t\in[0,\pi/2]$), $A=-(d+1/d)$. On paramètrise $T_{0,d}$ par $z=a+b\sqrt{d}=e^{it}$, la mesure invariante est (à une constante près) $dz=dt$. On obtient

$$2\cosh r = (2-A)\cos^2(t) + A = (A-2)\sin^2(t)+2,$$
$$\sinh r\, dr = (A-2)\sin t\cos t\, dt.$$

On pose encore $v=\cosh(r)\in[1,A/2]$. On se ramène ainsi à l'étude de l'intégrale

$$\int_1^{A/2}\mathfrak{P}_\nu(v)\frac{dv}{\sqrt{2v-2}\sqrt{A-2v}}.$$

On prouve la proposition dans ce cas en utilisant les majorations précédentes de la fonction sphérique et en découpant le domaine d'intégration en $[1,A/4]\cup[A/4,A/2]$. Le détail est laissé au lecteur.

5.2.3 *Places finies : Le cas décomposé.* Nous supposons maintenant que v est une place finie de F décomposée dans $E=F_{T_d}$ pour un tore T_d en position standard. Nous notons pour simplifier F le corps local. Soit ϖ une uniformisante. Soit π une représentation non ramifiée de $GL(2,F)$, de caractère central trivial. Soit (t,t^{-1}) les valeurs propres de sa matrice de Hecke ($q^{-1/2}\leqslant|t|\leqslant q^{1/2}$). Supposons $t\neq\pm 1$; la valeur de la fonction sphérique $f=f_t$ associée en $x=\left(\begin{smallmatrix}\varpi^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$: ($n\geqslant 0$) est égale à (cf. [Lang80, p. 40])

$$\begin{array}{ll} 1 & \text{pour } n=0 \\ \dfrac{q^{-n/2}}{1+1/q}\left(\dfrac{1-q^{-1}t^{-2}}{1-t^{-2}}t^n + \dfrac{1-q^{-1}t^2}{1-t^2}t^{-n}\right) & \text{pour } n>0. \end{array} \tag{34}$$

Considérons d'abord le tore diagonal T_0 de $G=GL(2,F)$. Le résultat suivant est implicite dans l'article de Waldspurger [Wal85].

Proposition 5.5.
$$\Psi_{T_0}(f) = \int_{Z\backslash T} f(x)\,dx = \frac{\zeta(2)L(\Pi,1/2)}{\zeta(1)L_2(\pi,1)}. \tag{35}$$

Comme dans [Wal85], ζ désigne la fonction zêta locale, $L_2(\pi,\cdot)$ est la fonction L locale associée au carré symétrique de π et $L(\Pi,\cdot)$ est la fonction L locale associée au changement de base quadratique. Puisque E/F est décomposée,
$$L(\Pi,s) = \frac{1}{(1-q^{-s}t)^2(1-q^{-s}t^{-1})^2}.$$
La mesure sur $Z\backslash T$ donne la valeur 1 au compact maximal O_F^*.

L'intégrale $\Psi_{T_0}(f)$ s'écrit alors
$$\sum_{-\infty}^{\infty} f\Big(\begin{pmatrix}\varpi^n & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Big) \tag{36}$$
où $f=f_t$ est donné par (34). Un calcul simple montre alors qu'elle est égale au membre de droite de (35) soit
$$\frac{1-q^{-1}}{1+q^{-1}}\frac{1+q^{-1/2}t}{1-q^{-1/2}t}\frac{1+q^{-1/2}t^{-1}}{1-q^{-1/2}t^{-1}}. \tag{37}$$

Enfin si $t=\pm1$, f_t est la limite des $f_{t'}$ pour t' régulier, $t'\to t$. Les estimées uniformes pour les fonctions sphériques impliquent que $\Psi_T(f)$ se calcule par passage à la limite, l'expression (37) étant continue en t.

Considérons maintenant le tore $T=T_d$ déduit en une place décomposée v de F d'un tore entier en position standard associé à $E=F[\sqrt{d}]$. On suppose d entier et sans facteur carré dans l'anneau d'entiers global. Le compact maximal de T est
$$\Big\{k=\begin{pmatrix}a & b\\ bd & a\end{pmatrix} : a+be, a-be\in O_F^*\Big\} \tag{38}$$
où l'on a posé $d=e^2$ dans F. (F, O_F sont de nouveaux locaux). Si $e\in O_F^*$ et si $v\nmid 2$, ceci équivaut à $a,\ b\in O_F$ et $a^2-db^2\in O_F^*$. Dans ce cas le compact maximal de T est $T\cap GL(2,O_F)$ et l'intégrale torique est calculée par la proposition (5.5).

Si F n'est pas principal, on ne peut supposer en général que d ou e est une unité en v. Soit $\delta=v(e)$; Noter que pour les tores standard (d sans facteur carré) δ sera majoré par h_F-1. Alors l'élément k donné par (38) est conjugué à $\left(\begin{smallmatrix}a-be & 0\\ O & a+be\end{smallmatrix}\right)$ par la matrice
$$\mathcal{E}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -e & e\end{pmatrix}.$$

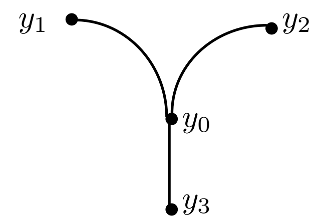
Soit $\mathcal{X}$ l'immeuble de Tits de $SL(2,F)$ et p le point base fixé par $K_p=GL(2,O_F)$. Nous utilisons la méthode de Langlands [Lang80, ch. 5] pour l'analyse des fonctions sphériques. Notons T_0 le tore diagonal ; on a alors
$$T=\mathcal{E}T_0\mathcal{E}^{-1}.$$

Nous aurons besoin de faits simples, pour lesquels nous n'avons pas de référence commode, pour l'action des tores déployés de G sur $\mathcal{X}$ ([Ser77, p. 107]). Soit T un tel tore et T_c son sous-groupe compact maximal. Identifions T par conjugaison à
$$\Big\{\begin{pmatrix}x & 0\\ 0 & y\end{pmatrix} x,y\in F^*\Big\}.$$

On notera

$$\theta = \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et k le corps résiduel. Le groupe compact T_c fixe un sommet x_0 de $\mathcal{X}$; il fixe alors tous les sommet $x_\alpha = \theta^\alpha x_0$ ($\alpha \in \mathbb{Z}$). De plus T_c ne fixe aucun autre sommet de $\mathcal{X}$. En effet dans le cas contraire, il fixerait 3 sommets non alignés y_1, y_2, y_3 voisin d'un quatrième y_0 :



Alors $T_c \subset K_{y_0} \simeq GL(2, O_F)$ et T_c est plongé (à conjugaison près) par le plongement évident. Mais la réduction $\overline{T_c} \simeq k^2$ n'a que deux points fixes dans l'ensemble ($\simeq \mathbb{P}^1(k)$) des voisins de y_0.

Revenons à notre tore $T = \mathcal{E} T_0 \mathcal{E}^{-1}$. Il résulte de ces remarques que l'ensemble des points fixes de T_c est une géodésique Γ de $\mathcal{X}$ (un 'droit chemin' dans la terminologie de [Ser77]).

On supposera dorénavant $\delta > 0$.

Lemme 5.6. *Soit $d(\cdot,\cdot)$ la fonction distance sur $\mathcal{X}$. Alors*

$$d(p, \Gamma) = \delta = v(e).$$

Preuve. Soit $\Lambda_0 = O_F^2$ le réseau de base dont la classe de similitude est p. Alors T_c fixe le réseau $\mathcal{E}\Lambda_0$. La géodésique Γ est donc formée des classes de similitudes des réseaux

$$\Lambda(u,v) = \mathcal{E} \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{pmatrix} \Lambda_0 = \left\langle \begin{pmatrix} u \\ -eu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ ev \end{pmatrix} \right\rangle.$$

où $(u,v) \in (F^*)^2$. La distance entre la classe de $\Lambda(u,v)$ et p se calcule comme dans [Ser77, p. 98]. Si $u, v \in O_F$ et $(u,v) = 1$ alors $\Lambda(u,v) \subset \Lambda_0$ et est maximal parmi ses homothétiques pour cette propriété. Alors

$$d(\Lambda(u,v), \Lambda) = \left| \operatorname{val}\det \begin{pmatrix} u & v \\ -eu & ev \end{pmatrix} \right| = \delta + v(uv) \geqslant \delta.$$

Noter que cette distance est minimale pour $x_0 = \mathcal{E}\Lambda_0$ et vaut alors δ. Alors x_0 est la projection de p sur Γ, c'est à dire l'unique point de Γ à la distance $\delta = d(\Gamma, p)$ de p.

On peut considérer la fonction sphérique f comme une fonction sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{X}$ en posant

$$f(g.p) = f(g) \quad g \in G.$$

Elle est alors invariante par l'action de K_p sur $\mathcal{X}$. Nous voulons calculer

$$\int_T f(t)\, dt = \int_T f(t.p)\, dt. \tag{39}$$

Soit $T_1 = T \cap K_p \subset T_c$. On choisit un système de représentants $\tau \in T_c$ des éléments de T_c/T_1. L'intégrale (39) s'écrit alors

$$\frac{1}{|T_c/T_1|} \sum_\tau \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}} f(\theta^\alpha \tau p). \tag{40}$$

Puisque τ fixe x_0,

$$d(\tau \cdot p, x_0) = d(p, x_0) = \delta. \tag{41}$$

Enfin, pour $x \in \mathcal{X}$, $f(x)$ ne dépend que de $d(x,p)$. On note $\mathrm{proj}(x)$ la projection de $x \in \mathcal{X}$ sur Γ. $\square$

Lemme 5.7. *Pour tout $\tau \in T_c$, $\mathrm{proj}(\tau \cdot p) = x_0$. Plus généralement, pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}$,*

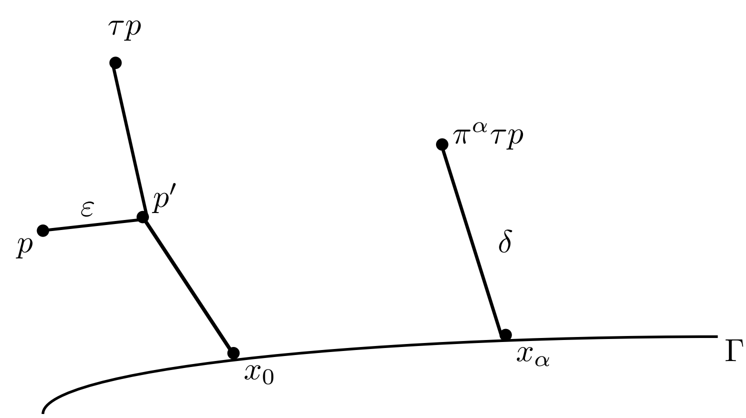
$$\mathrm{proj}(\theta^\alpha \tau \cdot p) = x_\alpha = \theta^\alpha \cdot x_0$$

et $d(\theta^\alpha \tau \cdot p, x_\alpha) = \delta$.

Preuve. La première assertion résulte des égalités

$$d(\tau \cdot p, \Gamma) = d(p, \Gamma) = \delta = d(\tau \cdot p, x_0)$$

où l'on a utilisé (41) et l'invariance de Γ par τ. On utilise l'invariance de Γ par θ^α pour obtenir l'énoncé général. $\square$



Soit $\epsilon = d(p,p') = d(\tau \cdot p, p')$, $[x_0, p']$ étant la partie commune aux géodésiques $[x_0, p]$ et $[x_0, \tau \cdot p]$. Il résulte alors du Lemme (5.7) et de la figure que

$$d(p, \theta^\alpha \tau \cdot p) = \begin{cases} 2\epsilon & \text{si } \alpha = 0 \\ 2\delta + |\alpha| & \text{si } \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Notons $\epsilon(\tau)$ la valeur (dépendant de τ) de ϵ et $f(n)$ la valeur de $f(x)$ pour un $x \in \mathcal{X}$ tel que $d(p,x) = n$. On a $0 \leqslant \epsilon \leqslant \delta$ et

$$\int_T f(t)\,dt = 2 \sum_{n > 2\delta} f(n) + \frac{1}{|T_c/T_1|} \sum_\tau f(2\epsilon(\tau)). \tag{42}$$

On en déduit alors

Proposition 5.8. (a) *Pour un tore déployé en position standard $T_d = T \subset GL(2, F_v)$, et f un coefficient non ramifié d'une composante locale d'une représentation cupidale, on a*

$$|\Psi_T(f)| \leqslant \Psi_{T_0}(f)$$

sauf peut-être pour un nombre fini de places de F. Pour les autres places $|\Psi_T(f)|$ est uniformément borné (pour δ borné).

(b) *Si $d \in O_F^*$, alors $\alpha_v(e_v, T_v) = 1$. A part peut-être pour un nombre fini de places de F (ne dépendant pas de d)*

$$\alpha_v(e_v, T_v) \leqslant 1.$$

Pour les autres places $\alpha_v(e_v, T_v)$ est uniformément borné.

Preuve. Pour $d \in O_F^*$ on a vu que $\Psi_T(f) = \Psi_{T_0(f)}$. On peut donc supposer $\delta > 0$. D'après (36) et (42)

$$\Psi_{T_0}(f) - \Psi_T(f) = 1 + 2\sum_{n=1}^{2\delta} f(n) - \frac{1}{|T_c/T_1|}\sum_{\tau} f(2\epsilon(\tau)).$$

□

Soit par ailleurs ρ la constante de Ramanujan pour $GL(2,F)$, donc $\rho \geqslant 0$ et minimal tel que

$$q_v^{-\rho} \leqslant |t| \leqslant q_v^{\rho}$$

pour toute matrice de Hecke $\left(\begin{smallmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1}\end{smallmatrix}\right)$ d'une forme parabolique non ramifiée en v, (v étant arbitraire). On sait que $\rho < \frac{1}{2}$ (en fait $\rho \leqslant \frac{7}{64}$ d'après Kim–Sarnak [KS03] et la conjecture de Ramanujan prévoit $\rho = 0$). D'après Langlands [Lang80, p. 41] on sait que pour $n > 0$

$$|f(n)| \leqslant q^{n(\rho-1/2)}\left(1 + \frac{1}{q}\right) n. \tag{43}$$

On en déduit

$$\left|2\sum_{n=1}^{2\delta} f(n)\right| \leqslant C(\delta) q^{\rho-1/2}$$

où $C(\delta)$ désigne une constante ne dépendant que de δ pouvant varier d'une ligne à l'autre. Par ailleurs $\epsilon(\tau) > 0$ pour $\tau \notin T_1$. On en déduit

$$\frac{1}{|T_c/T_1|}\sum_{\tau} f(2\epsilon(\tau)) \leqslant \frac{1}{|T_c/T_1|} + \max_{0<n\leqslant\delta} |f(2n)|.$$

d'après (43) $\max_{0<n\leqslant\delta} |f(2n)| \leqslant C(\delta)q^{\rho-1/2}$. Par ailleurs, si $a,\ a' \in O_F^*$ ont des réductions différentes modulo l'idéal maximal les matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & 1 \\ d & a\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} a' & 1 \\ d & a'\end{smallmatrix}\right)$ de T_c sont dans des classes distinctes modulo T_1. On en déduit

$$\frac{1}{|T_c/T_1|} \leqslant q^{-1}.$$

Finalement on trouve

$$\Psi_{T_0}(f) - \Psi_T(f) - 1 \leqslant C(\delta) q^{\rho-1/2}. \tag{44}$$

Or d'après (37) $\Psi_{T_0}(f) - 1 = O(q^{\rho-1/2})$. On a donc enfin

$$\Psi_T(f) = O_\delta(q^{\rho-1/2}).$$

Ceci démontre la partie (a) de la proposition ; la partie (b) s'en déduit.

Il est en fait possible de calculer explicitement $\Psi_T(f)$ mais nous n'aurons pas besoin de ce résultat plus précis.

5.2.4 *Places finies : Le cas inerte non ramifié.* Nous supposons maintenant que le corps local est $E = F(\sqrt{d})$ où d est entier et non carré dans F. On note encore $T = T_d$ le tore standard de $GL(2,F)$ associé. La fonction f et l'intégrale $\Psi_T(f)$ sont définis comme dans § 5.2.3. On suppose encore la caractéristique residuelle $\neq 2$.

Proposition 5.9.

(a) *Si d est une unité et si E/F est non ramifié,*

$$\Psi_T(f) = \frac{\zeta(2)L(\Pi,\frac{1}{2})}{L(\epsilon_{E/F},1)L_2(\pi,1)} = 1.$$

Dans tous les cas on a

$$|\Psi_T(f)| \leqslant 1.$$

(b) *Si $d \in O_F^*$ alors $\alpha_v(e_v, T_v) = 1$; de manière générale*

$$\alpha_v(e_v, T_v) \leqslant 1.$$

Comme dans le début de § 5.2.3, les fonctions L sont locales ; $\epsilon_{E/F}$ est le caractère non ramifié de F^* d'ordre 2. L'élément

$$k = \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix}$$

est associé à $z = a + b\sqrt{d} \in E$. L'extension étant non ramifiée, on peut écrire $z = \varpi^\alpha u$ où ϖ est l'uniformisante commune (associée à un élément du centre) et $u \in O_E^*$. On a donc de manière générale

$$|\Psi_T(f)| = \left| \int_{O_E^*} f(z)\, dz \right| \leqslant 1.$$

Supposons de plus $d \in O_F^*$. Dans cette situation le compact maximal O_E^* de E^* est contenu dans le compact maximal standard $GL(2, O_F)$ de $GL(2, F)$. En effet si $z = a + b\sqrt{d} \in O_E^*$, $2a = z + \overline{z} \in O_F$, $2b = (\overline{z} - z)d^{-1} \in O_F$ et $a^2 - db^2 = N(z) \in O_F^*$. La matrice

$$k = \begin{pmatrix} a & b \\ bd & a \end{pmatrix}$$

associée est donc dans $GL(2, O_F)$. Dans cette situation comme la fonction sphérique est $GL(2, O_F)$-invariante, on obtient

$$\Psi_T(f) = 1.$$

5.2.5 *Places finies : Le cas ramifié.* Nous supposons maintenant que le corps local est $E = F(\sqrt{d})$ où $v(d) = 1$. On peut donc prendre d pour l'uniformisante ϖ de F et $\sqrt{d} = \varpi_E$ est une uniformisante de E. Le tore T est isomorphe à E^* et on peut écrire (à l'aide de cette isomorphisme)

$$T = \coprod_{\alpha \in \mathbb{Z}} \varpi^\alpha \Big(O_E^* \coprod O_E^* \varpi_E \Big).$$

Les normalisations de mesures de Waldspurger sont celles de Tate de sorte que T est muni d'une mesure donnant masse $N(\mathcal{D}_v)^{-1/2}$ à O_E^*. Notons dans cette partie

$$\Psi_T'(f) = N(\mathcal{D}_v)^{1/2} \Psi_T(f) = \int_{Z_v \backslash T_v} f_v(t)\, dt_{\text{norm}}$$

où la mesure donne masse 1 à O_E^*.

Proposition 5.10. *Supposons v impaire, $v(d) = 1$. Alors*

$$\Psi_T'(f) = \zeta(2) L\left(\pi, \frac{1}{2}\right) L_2(\pi, 1)^{-1} = \frac{(1 + q^{-1/2}t)(1 + q^{-1/2}t^{-1})}{1 + q^{-1}}.$$

Noter que le facteur de droite a la forme habituelle car $L(\epsilon, s) = 1$, $\epsilon = \epsilon_{E/F}$ étant ramifié.

Supposons en effet $t \in T$ associé à $z = a + b\sqrt{d} \in O_E^*$. Alors t s'écrit (à un facteur dyadique près)

$$\begin{pmatrix} z + \overline{z} & \dfrac{z - \overline{z}}{\varpi_E} \\ \varpi_E(z - \overline{z}) & z + \overline{z} \end{pmatrix}.$$

En particulier t est entier ; son déterminant $4z\overline{z}$ étant une unité, $t \in GL(2, O_v)$, donc l'intégrale sur O_E^* est 1.

On en déduit aussi que tout élément de $\varpi_E O_E^*$ (plongé dans $GL(2)$ par le plongement standard) est le produit d'un élément entier par

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varpi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La valeur de $f(\varpi_E)$ est alors égale à $T_q f(1)/(q+1) = q^{1/2}(t + t^{-1})/(q+1)$. La somme des deux intégrales donne le facteur désiré.

Majorons $\Psi'_T(f)$ quand $v(d) > 1$. On peut supposer que $d = \varpi^\delta$ avec $\delta = 2\gamma + 1$ impair, $\gamma > 1$. Alors $\sqrt{d} = \varpi_E^\delta$ où $\varpi_E = \sqrt{\varpi}$ est une uniformisante et

$$t = \begin{pmatrix} a & b \\ b\varpi^\delta & a \end{pmatrix}$$

est associé à $z = a + b\varpi_E^\delta \in E^*$.

On calcule séparément les intégrales associées à $z \in O_E^*$ et $z \in \varpi_E O_E^*$. Pour $z \in O_E^*$, t est de la forme

$$\begin{pmatrix} z + \overline{z} & \dfrac{z - \overline{z}}{\varpi_E^\delta} \\ \varpi_E^\delta (z - \overline{z}) & z + \overline{z} \end{pmatrix} \tag{45}$$

et on vérifie que

$$d(t\Lambda_0, \Lambda_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } v(z - \overline{z}) \geqslant \gamma + \frac{1}{2} \\ 2\gamma + 1 - 2v(z - \overline{z}) & \text{si } 0 \leqslant v(z - \overline{z}) \leqslant \gamma + \frac{1}{2} \end{cases}$$

où l'on a étendu v à E.

Si $n = d(t\Lambda_0, \Lambda_0) \geqslant 1$, on a d'après Langlands [Lang80, p. 41]

$$|f(t)| \leqslant q^{n(\rho - 1/2)} \left(1 + \frac{1}{q}\right) n. \tag{46}$$

Le volume de $\{z \in O_E^* : d(t\Lambda_0, \Lambda_0) = 0\}$ est $q^{-2\gamma+2}/(q-1)$. On en déduit aisément que

$$\int_{O_E^*} f(t)\, dt_{\mathrm{norm}} = O_\gamma(q^{\rho - 1/2}). \tag{47}$$

Si $z \in \varpi_E O_E^*$, t est le produit de $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \varpi & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et d'un élément de la forme (45). On en déduit que $d(t\Lambda_0, \Lambda_0)$ est impair donc $\neq 0$. Alors (46) donne de nouveau

$$\int_{\varpi_E O_E^*} f(t)\, dt_{\mathrm{norm}} = O_\gamma(q^{\rho - 1/2}).$$

On a enfin démontré la proposition suivante.

Proposition 5.11.

(a) *Pour γ fixé et $v(d) = 2\gamma + 1$, $\gamma > 0$*

$$\Psi'_T(f) = O_\gamma(q^{\rho - 1/2})$$

pour tout $\epsilon > 0$. L'intégrale associée à $\gamma = 0$ est uniformément minorée.

(b) *Si $v(d) = 1$ alors*

$$\alpha(e_v, T_v) = N(\mathcal{D}_v)^{-1/2}.$$

Si $v(d)$ est arbitraire sauf peut-être pour un nombre fini de places v de F, on a

$$\alpha(e_v, T_v) \leqslant N(\mathcal{D}_v)^{-1/2}.$$

La deuxième partie du théorème découle de la première quand on tient compte des normalisations.

5.2.6 *Places où $\boldsymbol{\pi}$ est ramifiée et preuve du théorème 5.1.* Considérons enfin un coefficient $f_v(t) = \langle te_v, e_v\rangle$ où e_v est un coefficient K-fini mais arbitraire de π_v. On considère les tores T, standard, associés à $d \in O_F$ sans facteur carré. En une place finie v, on a donc $0 \leqslant v(d) \leqslant h-1$.

Proposition 5.12. *Fixons v et $f = f_v$ et faisons varier T parmi les tores standard.*

(1) *Si v est finie, $\Psi_T(f)$ et $\alpha_v(e_v, T_v)$ sont uniformément bornés.*

(2) *Si v est archimédienne, λ le paramètre d'Harish-Chandra de π_v, alors pour tout $\epsilon > 0$, $\Psi_T = O(d^{-1/2+\epsilon})$ si π_v est tempérée et $\Psi_T = O(d^{(-1+\mathrm{Re}(\lambda))/2+\epsilon})$ si π_v est non tempérée. On a de même*

$$\alpha_v(e_v, T_v) = O(d^{(-1+\mathrm{Re}(\lambda))/2+\epsilon}).$$

Les résultats concernant $\Psi_T(f)$ et $\alpha_v(e_v, T_v)$ sont équivalents.

La partie (1) découle du fait qu'il n'y a qu'un nombre fini de tores standard possibles modulo conjugaison par $G(O_F)$ et que f est invariante par un sous-groupe d'indice fini de $G(O)$.

Pour (2), notons que π_v ne peut être non-tempérée que si elle est sphérique (modulo un twist). Si π_v est une série principale, (2) résulte des §§ 5.2.1 et 5.2.2 et de la majoration d'un coefficient arbitraire par la fonction Ξ (dans le cas tempéré) ou par la fonction sphérique de π_v (si λ est réel). Si v est réelle et si π_v appartient à la série discrète, ses coefficients sont d'après Harish-Chandra majorés par $C_1 \Xi P(r)$ avec les notations de § 5.2.2. La formule donnant les fonctions sphériques montre que $\Xi(x) \leqslant f_\lambda(x)$ où $\lambda > 0$. La formule asymptotique pour f_λ montre que $f_\lambda P(r) \leqslant C_2 f_{\lambda'}$ pour tout $\lambda' > \lambda$. Donc le résultat est conséquence de la proposition 5.4.

On a vu que le théorème 5.1 est conséquence de la proposition 5.2. La proposition 5.2 s'obtient en combinant les résultats des propositions 5.8, 5.9, 5.11 et 5.12. Noter que pour les résultats archimédiens de 5.2.1 et 5.2.2, d et d^{-1} jouent un rôle symétrique. On en déduit

$$\begin{aligned}\left|\prod_{v|\infty} \Psi_{T_v}(f_v)\right| &\ll \prod_{|d|_v \geqslant 1} |d|_v^{(-1+\theta)/2+\epsilon} \prod_{|d|_v<1} |d|_v^{1/2-\epsilon} \\ &\ll \prod_v |d|_v^{(-1+\theta)/2+\epsilon} \ll |d|^{(-1+\theta)/2+\epsilon}\end{aligned}$$

donc (18) se déduit de (19).

6. Intégrales toriques de séries d'Eisenstein

Soit F un corps de nombres, $G = GL(2, F)$, on cherche dans cette partie à évaluer l'intégrale d'une série d'Eisenstein (intervenant dans le spectre continu) le long d'un tore standard de G.

Soit χ un caractère unitaire de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$, soit $s \in \mathbb{C}$, on note $V_s(\chi)$ l'ensemble des fonctions lisses K-finies sur $GL_2(\mathbb{A}_F)$ telles que

$$f\left(\begin{pmatrix} y_1 & x \\ 0 & y_2 \end{pmatrix} g\right) = \left|\frac{y_1}{y_2}\right|^s \chi\left(\frac{y_2}{y_1}\right) f(g)$$

pour tout $g \in GL_2(\mathbb{A}_F)$ et $b = \left(\begin{smallmatrix} y_1 & x \\ 0 & y_2 \end{smallmatrix}\right)$ dans le sous-groupe de Borel standard $B(\mathbb{A}_F)$.

Pour une fonction f dans $V_s(\chi)$ on forme alors la série d'Eisenstein

$$E_f(g,s)=\sum_{\gamma\in B(F)\backslash GL_2(F)} f(\gamma g),$$

la somme étant convergente pour $\mathrm{Re}(s)>1$.

Soit $V=F\oplus F$ un espace vectoriel de dimension 2 sur F. Soit $\Phi=\bigotimes_v \Phi_v$ une fonction de Schwartz sur $V\otimes \mathbb{A}_F\simeq \mathbb{A}_F\oplus\mathbb{A}_F$. On pose alors

$$f_\Phi(g,s)=\chi(\det(g))|\det(g)|^s\int_{\mathbb{A}_F^*}\Phi((0,z)g)\chi^2(z)|z|^{2s}\,d^*z. \tag{48}$$

On vérifie alors que $f_\Phi(g,s)$ est dans $V_s(\chi)$ et on note

$$E_\Phi(g,s)=E_{f_\Phi}(g,s)=\sum_{\gamma\in B(F)\backslash GL_2(F)} f_\phi(\gamma g).$$

En notant $\omega=\chi|\ |^s$, où $|\ |$ désigne la norme d'idèle, on dispose [Wie85, proposition 7] de la formule intégrale suivante pour la série d'Eisenstein

$$E_\Phi(g,s)=\int_{F^*\backslash\mathbb{A}_F^*}\omega(\det(zg))\sum_{\xi\in V\backslash\{0\}}\Phi(\xi zg)\,d^*z. \tag{49}$$

Soit E/F une extension quadratique $E=F\oplus F\sqrt{d}$ avec $d\in O_F$ sans facteur carré et

$$T_d=T=\left\{\begin{pmatrix} a & bd\\ d & a\end{pmatrix}, a^2-b^2d\neq 0\right\}$$

le tore standard de $GL(2,F)$ associé.

On fixe l'isomorphisme

$$i_E: E\otimes\mathbb{A}_F\simeq\mathbb{A}_F\oplus\mathbb{A}_F\sqrt{d}\longrightarrow \mathbb{A}_F\oplus\mathbb{A}_F$$
$$a+b\sqrt{d}\mapsto (a,b)$$

prolongeant $i_E: E=F\oplus F\sqrt{d}\to F\oplus F$. On notera par ailleurs

$$j_E: E\otimes\mathbb{A}_F\longrightarrow \mathbb{A}_E$$

l'isomorphisme canonique.

Pour toute fonction de Schwartz Φ sur $\mathbb{A}_F\oplus\mathbb{A}_F$ on note $\Phi_E=\Phi\circ i_E$. Par abus de notation on notera encore Φ_E la fonction sur $\mathbb{A}_E$ $\Phi_E\circ j_E^{-1}$. On peut alors réécrire (49) sous la forme

$$E_\Phi(g,s)=\int_{F^*\backslash\mathbb{A}_F^*}\omega(\det(zg))\sum_{\xi\in E\backslash\{0\}}\Phi_E(\xi zg)\,d^*z\,; \tag{50}$$

dans cette formule E est vu comme un espace vectoriel de dimension 2 sur F de base $(1,\sqrt{d})$ et on identifie $M(F\oplus F)$ à $M(E)$ via cette base.

La formule de Wielonsky [Wie85] donnant l'intégrale torique de la série d'Eisenstein est alors pour $g\in GL_2(\mathbb{A}_F)$ et $e_0=(1,0)\in E$

$$\int_{T(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash T(\mathbb{A}_F)}E_\Phi(tg,s)\,d\mu_T=|\det(g)|^s\chi(\det(g))\int_{\mathbb{A}_E^*}\Phi_E(e_0zg)\omega(N_{E/F}(z))\,d^*z \tag{51}$$

$N_{E/F}$ désignant la norme.

Quand $g=1$ la formule est donc

$$\int_{T(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash T(\mathbb{A}_F)}E_\Phi(t,s)\,d\mu_T=\int_{\mathbb{A}_E^*}\Phi_E(z)\chi_E(z)|z|_E^s\,d^*z$$

où χ_E est le caractère $\chi \circ N_{E/F}$ de $E^*\backslash\mathbb{A}_E^*$ et $|\ |_E$ désigne la norme d'idèle sur E. Le membre de droite est donc la fonction ζ à la Tate

$$Z(\Phi_E, \chi_E, s) = \prod Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, s)$$
$$Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, s) = \int_{E_w^*} \Phi_{E_w}(z)\chi_{E_w}(z)|z|^s\, d^*z.$$

le produit portant sur les places w de E.

Soit $K \subset GL_2(\mathbb{A}_F^f)$ un sous-groupe ouvert compact. On suppose E_Φ invariant par K (ce qui impose des conditions de ramification à χ et Φ). On veut calculer dans la suite l'intégrale

$$I_T(s) = \int_{T(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash T(\mathbb{A}_F)/T(\mathbb{A}_F^f)\cap K} E_\Phi(t,s)\, d\mu_{T,\mathrm{norm}} \tag{52}$$

sur la droite critique $s = \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\tau$ avec la normalisation :

$$\int_{T(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash T(\mathbb{A}_F)/T(\mathbb{A}_F^f)\cap K} d\mu_{T,\mathrm{norm}} = 1.$$

Dans cette situation

$$I_T(s) = c(E)L(2s, 1_F)Z(\Phi_E, \chi_E, s) \tag{53}$$

où $c(E)$ est une constante dépendant de E et non de χ. Pour calculer $c(E)$, on utilise le fait que $E_\Phi(g,s)$ a, si $\chi^2 = 1$, un résidu $c_0 = c_0(\phi)$ en $s = 1$ indépendant de g. Si on choisit $\chi = \mathbf{1}$ et $\phi = \phi^{\mathbf{1}}$ de manière convenable ce rèsidu est non nul et

$$c(E) = \frac{c_0}{L(2, 1_F)\,\mathrm{Res}_{s=1} Z(\Phi_E^{\mathbf{1}}, \mathbf{1}, s)}. \tag{54}$$

Nous decrivons dans la suite pour chaque caractère χ une fonction de Schwartz Φ^χ sur $\mathbb{A}_F \oplus \mathbb{A}_F$ normalisée, associée à χ. Pour calculer c_E on prendra la fonction $\Phi_E^{\mathbf{1}}$ associée à $\Phi^{\mathbf{1}}$ dans la formule précédente.

Pour calculer la fonction $Z(\Phi_E, \chi_E, s)$, on utilise les normalisations standard de Tate. On note $\psi_{\mathbb{Q}}$ le caractère additif standard de $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ et $\psi_E = \psi \circ \mathrm{Tr}_{E/\mathbb{Q}}$ le caractère associé de $E\backslash\mathbb{A}_E$. Les mesures de Haar locales sur E_w sont autoduales : dx est la mesure de Lebesgue en une place réelle, deux fois la mesure de Lebesgue en une place complexe et en une place finie w, on a $\mu_w(O_{E_w}) = (N\mathcal{D}_w)^{-\frac{1}{2}}$ où $\mathcal{D}_w$ désigne la différente locale et N la norme absolue.

D'après [Lan94, théorème 12, p. 295]

$$\mathrm{Res}_{s=1} Z(\Phi_E, \chi_E, s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} h_E R_E}{\omega_E d_E^{1/2}} \hat{\Phi}_E(0), \tag{55}$$

où h_E est le nombre de clase de E, R_E son régulateur, d_E la valeur absolue de son discriminant et r_1, r_2 les nombres de places réelles et complexes de E. La transformée de Fourier $\hat{\Phi}_E$ de Φ_E est calculée avec les normalisations précédentes donc

$$\hat{\Phi}_E(0) = \int_{\mathbb{A}_E} \Phi_E(x)\, dx.$$

On normalise la série d'Eisenstein en prenant la fonction de Schwarz Φ^χ (que l'on notera simplement Φ si cela ne prête pas à confusion) sur $\mathbb{A}_F^2$ définie par les expressions suivantes.

Cas (a) : v est réelle.

$$\Phi_v(a,b) = (ab)^\delta e^{-\pi(a^2+b^2)} \tag{56}$$

avec $\delta = 0$ si χ_v est trivial, et $\delta = 1$ si χ_v est le caractère signe sur $\{\pm 1\}$.

Cas (b) : v est complexe. On note $|\ |$ la valeur absolue usuelle de sorte que la composante locale $|\ |_v$ de la norme d'idèle est $|\ |_v = |\ |^2$. Si $\chi_v(z) = |z|^{2\nu}(z/|z|^2)^m$, $\nu \in \sqrt{-1}\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\Phi_v(a,b) = \begin{cases} \dfrac{\overline{a}^m \overline{b}^m}{2\pi} e^{-2\pi(|a|^2+|b|^2)} & m \geqslant 0 \\ \dfrac{a^{-m} b^{-m}}{2\pi} e^{-2\pi(|a|^2+|b|^2)} & m \leqslant 0. \end{cases} \tag{57}$$

On note c_χ le conducteur de χ.

Cas (c) : v est une place finie non ramifiée de F ne divisant pas c_χ.

$$\Phi_v(a,b) = 1_{O_{F_v}}(a)\ 1_{O_{F_v}}(b). \tag{58}$$

Cas (d) : v est une place ramifiée de F ne divisant pas c_χ.

$$\Phi_v(a,b) = 1_{\mathcal{D}_v^{-1}}(a)\ 1_{\mathcal{D}_v^{-1}}(b). \tag{59}$$

Cas (e) : v est une place divisant c_χ.

$$\Phi_v(a,b) = f_{m_\chi}(a) f_{m_\chi}(b)$$

où m_χ est l'ordre du conducteur de χ en v et f_{m_χ} la fonction définie dans [Lan94, p. 284] ; nous n'utiliserons pas l'expression explicite de f_{m_χ}.

Ceci détermine la fonction $\Phi_E(a+b\sqrt{d}) = \Phi(a,b)$ sur $E \otimes \mathbb{A}_F$ ainsi que la fonction correspondante sur $\mathbb{A}_E$. Nous pouvons enfin énoncer le

Théorème 6.1. *Soit $d \in O_F$ sans facteur carré, T_d un tore standard associé. Soit $E = F[\sqrt{d}]$ et d_E la valeur absolue de son discriminant. Soit χ un caractère de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$, $\Phi = \Phi^\chi$ la fonction de Schwarz sur $\mathbb{A}_F \oplus \mathbb{A}_F$ associée par le procédé précédent.*

Pour tout $\epsilon > 0$ il existe une constante $A > 0$ telle que

$$\left| \int_{T(F)Z(\mathbb{A}_F)\backslash T(\mathbb{A}_F)/K_T} E_\Phi\left(t, \frac{1}{2} + i\tau\right) d\mu_{T,\mathrm{norm}} \right| \ll |d|^{-1/4+\epsilon} |\tau|^A |L_\infty(\chi^2, 1+2i\tau)| \tag{60}$$

et

$$\left| \frac{Z(\Phi_E, \chi_E, \frac{1}{2}+i\tau)}{\hat{\Phi}_E^{\mathbf{1}}(0)} \right| \ll |d|^{-1/4+\epsilon} |\tau|^A |L_\infty(\chi^2, 1+2i\tau)|. \tag{61}$$

Nous faisons les calculs pour les tores données par le plongement (15) et laissons le cas du plongement (14) au lecteur. Les deux énoncés sont équivalents d'après les équations (53), (54), (55) et le théorème de Brauer–Siegel [Lan94, théorème 4, p. 260] qui nous assure que

$$d_E^{-\epsilon} \ll \frac{h_E R_E}{d_E^{\frac{1}{2}}} \ll d_E^\epsilon.$$

Pour prouver le théorème, on cherchera dans les prochaines sections à comparer

$$\left| \frac{Z(\Phi_E, \chi_E, \frac{1}{2}+i\tau)}{\hat{\Phi}_E^{\mathbf{1}}(0)} \right|$$

à la fonction

$$L(\chi_E, s) = \prod_{w \in S_E^f} L_w(\chi_E, s) \qquad \left(s = \frac{1}{2} + it\right)$$

où le produit porte sur les places finies de E.

6.1 Places réelles de F

Soit v une place réelle de F et

$$\Phi_v(a,b) = (ab)^\delta e^{-\pi(a^2+b^2)} \quad \delta = 0 \text{ ou } \delta = 1.$$

Quand cela ne prête pas à confusion on supprime les indices v des notations.

Cas (a) : on suppose $d = d_v < 0$. Dans cette situation

$$\mathbb{C} \simeq E_v \simeq F_v \oplus F_v\sqrt{d} \longrightarrow F_v \oplus F_v$$
$$z = a + b\sqrt{d} \mapsto (a,b)$$

et

$$\Phi_{E_v}(z) = \Phi_v(a,b) = (ab)^\delta e^{-\pi(a^2+b^2)}.$$

Lemme 6.2. *Pour tout* $\epsilon > 0$ *et tout* $\tau \in \mathbb{R}$*, on a pour* $|d| \geqslant 1$

$$|Z(\Phi_{E_v}, \chi, \tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}\tau)| \ll |d|^\epsilon. \tag{62}$$

Par ailleurs pour $\chi = \mathbf{1}$

$$\hat{\Phi}_E^{\mathbf{1}}(0) = \alpha\sqrt{|d|} \tag{63}$$

pour une constante $\alpha \neq 0$ *indépendante de* E *(donc de* d*).*

Preuve. On a les majorations

$$\begin{aligned}
\left|Z\left(\Phi_{E_v}, \chi, \frac{1}{2} + \sqrt{-1}\tau\right)\right| &\leqslant \int_{\mathbb{C}^*} |\Phi_E(z)| \frac{dz}{|z|_{\mathbb{C}}^{1/2}} \\
&= \int_{\mathbb{C}^*} |\Phi_E(z)| \frac{dz}{|z|} \\
&= \int_{\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} |ab|^\delta e^{-\pi(a^2+b^2)} \frac{\sqrt{|d|}\,da\,db}{(a^2+b^2|d|)^{1/2}} \\
&\leqslant \left(\int_0^\infty r^{2\delta} e^{-\pi r^2}\,dr\right) \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{|d|}\,d\theta}{(\cos^2\theta + |d|\sin^2\theta)^{1/2}} \ll |d|^\epsilon. \qquad \square
\end{aligned}$$

Un calcul plus précis (en comparant à l'intégrale $\int_0^\pi \sqrt{|d|}d\theta/(1+|d|\theta^2)^{1/2}$) donne en fait une majoration en $\log|d|$.

Pour $\chi = \mathbf{1}$ (donc $\delta = 0$) et $\Phi = \Phi^{\mathbf{1}}$ la formule pour $\hat{\Phi}_E(0)$ s'obtient directement à partir de la définition

$$\hat{\Phi}_E(0) = \int_{\mathbb{C}} \Phi_E(z)\,dz = \sqrt{|d|}\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\pi(a^2+b^2)}\,da\,db.$$

Cas (b) : on suppose $d = d_v > 0$. On a les isomorphismes :

$$i_v : E_v = E \otimes F_v = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}\sqrt{d} \longrightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$
$$a + b\sqrt{d} \mapsto (a,b)$$

et

$$j_v : E_v \longrightarrow E_{w_1} \times E_{w_2}$$
$$a + b\sqrt{d} \mapsto (z_1 = a + b\sqrt{d}, z_2 = a - b\sqrt{d})$$

où w_1 et w_2 sont les places (réelles) de E au dessus de v.

Dans cette situation

$$\Phi_{E_{w_1}} \times \Phi_{E_{w_2}}(z_1, z_2) = \Phi(a, b) = (ab)^{\delta} e^{-\pi(a^2+b^2)}.$$

LEMME 6.3. *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a pour $d \geqslant 1$*

$$|Z_{w_1}(\Phi_{E_{w_1}}, \chi_{E_{w_1}}, \tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}\tau)||Z_{w_2}(\Phi_{E_{w_2}}, \chi_{E_{w_2}}, \tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}\tau)| \ll d^{\epsilon}. \tag{64}$$

Pour $\chi = \mathbf{1}$ on a

$$\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_1}}(0)\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_2}}(0) = \alpha\sqrt{|d|} \tag{65}$$

pour une constante $\alpha \neq 0$.

Preuve. Le produit des fonctions zêtas locales est majoré par

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*} |\Phi_{E_{w_1}}(z_1)||\Phi_{E_{w_2}}(z_2)| \frac{dz_1\, dz_2}{|z_1|^{1/2}|z_2|^{1/2}} &= \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus \{a^2 - b^2 d = 0\}} |ab|^{\delta} e^{-\pi(a^2+b^2)} \frac{\sqrt{d}\, da\, db}{|a^2 - b^2 d|^{1/2}} \\ &\ll \sqrt{d} \int_O^{\pi/2} \frac{d\theta}{(\cos^2\theta - d\sin^2\theta)^{1/2}} \ll d^{\epsilon}\end{aligned}$$

la dernière intégrale étant une intégrale impropre convergente.

Le calcul de $\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_1}}(0)\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_2}}(0)$ résulte des définitions. □

6.2 Places complexes de *F*

Soit v une place complexe de F. On peut changer d en $de^{i\theta}$ et supposer que $d \in \mathbb{R}$, $d > 0$. On a les isomorphismes

$$\begin{aligned} i_v :\ E_v = E \otimes F_v = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}\sqrt{d} &\longrightarrow \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \\ a + b\sqrt{d} &\mapsto (a, b)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} j_v : E_v &\longrightarrow E_{w_1} \times E_{w_2} \\ a + b\sqrt{d} &\mapsto (z_1 = a + b\sqrt{d}, z_2 = a - b\sqrt{d}).\end{aligned}$$

où w_1 et w_2 sont les places (complexes) de E au dessus de v.

Sous ces hypothèses,

$$\Phi_{E_{w_1}} \times \Phi_{E_{w_2}}(z_1, z_2) = \Phi_v(a, b);$$

$$\Phi_v(a, b) = \begin{cases} \dfrac{\overline{a}^m \overline{b}^m}{2\pi} e^{-2\pi(|a|^2+|b|^2)} & m \geqslant 0 \\ \dfrac{a^{-m} b^{-m}}{2\pi} e^{-2\pi(|a|^2+|b|^2)} & m \leqslant 0. \end{cases}$$

LEMME 6.4. *Pour tout $\epsilon > 0$ et tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a pour $d \geqslant 1$*

$$|Z_{w_1}(\Phi_{E_{w_1}}, \chi_{E_{w_1}}, \tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}\tau)||Z_{w_2}(\Phi_{E_{w_2}}, \chi_{E_{w_2}}, \tfrac{1}{2} + \sqrt{-1}\tau)| \ll d^{\epsilon}. \tag{66}$$

Pour $\chi = \mathbf{1}$ on a

$$\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_1}}(0)\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_2}}(0) = \alpha d = \alpha|d|_v^{1/2} \tag{67}$$

pour une constante $\alpha \neq 0$ (et $|\ |_v = |\ |^2$ désigne la norme locale).

Preuve. Le produit de fonctions zêta est majoré par

$$I_v = \int_{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*} |ab|^{|m|} e^{-2\pi(|a|^2+|b|^2)} \frac{dz_1}{|z_1|} \frac{dz_2}{|z_2|}.$$

On peut donc supposer $m \geqslant 0$. Donc

$$I_v \ll d \iint |ab|^m e^{-2\pi(|a|^2+|b|^2)} \; \frac{da \; db}{|a^2 - b^2 d|}.$$

En coordonées polaires $a = r_1 e^{i\theta_1}$, $b = r_2 e^{i\theta_2}$, $\theta = 2(\theta_1 - \theta_2)$ on obtient une intégrale triple

$$I_v \ll d \iiint \frac{(r_1 r_2)^{m+1} e^{-2\pi(r_1^2 + r_2^2)}}{|r_1^2 - r_2^2 e^{i\theta} d|} \, dr_1 \, dr_2 \, d\theta.$$

Posons $r_1 = R\cos\phi$, $r_2 = R\sin\phi$, $\phi \in [0, \pi/2]$

$$I_v \ll d \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi \frac{R^{2m+1}(\cos\phi\sin\phi)^{m+1} e^{-2\pi R^2}}{|\cos^2\phi - \sin^2\phi \, e^{i\theta} d|} \, dR \, d\phi \, d\theta,$$

d'où

$$I_v \ll d \int_0^{\pi/2} \int_0^\pi \frac{\sin\phi\cos\phi}{|\cos^2\phi - \sin^2\phi \, e^{i\theta} d|} \, d\phi \, d\theta.$$

Prenant $t = \tan\phi$ comme variable, il vient

$$I_v \ll d \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{t}{(t^2+1)|1 - t^2 e^{i\theta} d|} \, d\theta \, dt,$$

soit

$$I_v \ll I(d) := \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{dv \, d\theta}{(1 + v/d)|1 - v e^{i\theta}|}.$$

La seule singularité de l'intégrale est en $v = 1$, $\theta = 0$; on vérifie qu'elle est convergente. Fixons $\alpha > 0$. Pour $v \leqslant 1 + \alpha$, l'intégrale est bornée. Pour $v \geqslant 1 + \alpha$, $|1 - v e^{i\theta}| \geqslant v - 1$. L'intégrale correspondante est majorée par

$$\int_{1+\alpha}^\infty \frac{dv}{(1 + v/d)(v-1)} \sim \log d$$

quand $d \to \infty$.

Ceci termine la preuve de la première partie du lemme. Le calcul de $\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_1}}(0)\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_2}}(0)$ résulte des définitions. □

6.3 Contrôle en τ

Nous aurons en fait besoin de contrôler plus précisément les majorations des §§ 6.1 et 6.2 quand τ varie. Ecrivons par exemple l'intégrale zêta du lemme 6.2

$$Z\left(\Phi_{E_v}, \chi, \frac{1}{2} + i\tau\right) = \int_{\mathbb{C}^*} \Phi_{E_v}(z)(z\overline{z})|z|_{\mathbb{C}}^{-1/2 + i(\sigma_v + \tau)} \, dz$$

où on a écrit dans ce calcul $i = \sqrt{-1}$ et où

$$\chi_v(x) = \operatorname{sgn}(x)^\delta |x|^{i\sigma_v}.$$

Considérons (plus généralement que dans le lemme 6.2) une fonction

$$\phi_v(a, b) = a^{\delta_1} b^{\delta_2} e^{-\pi(a^2 + b^2)}$$

où $\delta_i \in \mathbb{N}$ a la même parité que χ_v. L'intégrale s'écrit alors

$$\begin{aligned}
&\sqrt{|d|}\iint a^{\delta_1} b^{\delta_2} e^{-\pi(a^2+b^2)}(a^2+b^2|d|)^{-1/2+i(\sigma_v+\tau)}\,da\,db\\
&= \int_0^\infty r^{\delta_1+\delta_2+2i(\sigma_v+\tau)} e^{-\pi r^2}\,dr\\
&\quad\times \sqrt{|d|}\int_0^{2\pi} \cos^{\delta_1}\theta\ \sin^{\delta_2}\theta(\cos^2\theta+|d|\sin^2\theta)^{-\frac{1}{2}+i(\sigma_v+\tau)}\,d\theta\\
&= C\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+i(\sigma_v+\tau)\right) I_\theta
\end{aligned} \tag{68}$$

où C est une constante ne dépendant que de δ_1 et δ_2. L'intégrale I_θ se borne comme précédemment.

Pour $\tau \to \infty$, l'intégrale Γ tend vers 0 en $e^{-\pi/2|\tau|}$ à des termes polynomiaux en τ près. Dans § 7 nous devrons la comparer au facteur local

$$\begin{aligned}
L_v(\chi^2, 2s) &= L_v(|x|^{2i\sigma_v}, 1+2i\tau)\\
&= \pi^{-1/2-i\sigma_v-i\tau}\Gamma(\tfrac{1}{2}+i\sigma_v+i\tau).
\end{aligned}$$

Il résulte alors d'estimations connues [MOS66, p. 13] et, par exemple, du théorème de Phragmén-Lindelöf que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta_1+\delta_2}{2}+i(\sigma_v+\tau)\right) L_v(\chi^2,2s)^{-1} = O(\sigma_v+\tau)^{(\delta_1+\delta_2)/2}.$$

Des considérations analogues s'appliquent aux lemmes 6.3 et 6.4. On obtient ainsi.

Lemme 6.5. *Soit $\Phi_v(a,b) = P_v(a,b)\Phi_{E_v}(a,b)$ où Φ_{E_v} est la fonction définie dans les équations (56) et (57) et $P_v(a,b)$ un polynôme de degré borné. Alors pour $|d| \geqslant 1$:*

$$|Z(\Phi_v, \chi_v, \tfrac{1}{2}+\sqrt{-1}\tau)| \ll d^\epsilon |\sigma_v+\tau|^A |L_v(\chi^2, 1+2\sqrt{-1}\tau)|,$$

la puissance ne dépendant que du degré de P_v.

6.4 Places non ramifiées de F

On fixe dans cette partie une place finie v de F, non ramifiée au dessus de $\mathbb{Q}$ et en laquelle χ n'est pas ramifié. On rappelle que d désigne un élément de O_F sans facteur carré.

Places inertes. On suppose ici que v est inerte dans E, soit w la place de E au dessus de v et ϖ une uniformisante commune à F_v et E_w. On choisit ϖ de sorte que $d = \varpi^{2r}u$, $(r \in \mathbb{N},\ u \in O_v^*)$.

Lemme 6.6.

(a) *Si $d \in O_v^*$ alors*

$$Z(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, s) = \frac{1}{1-\chi_{E_w}(\varpi)/N(w)^s} \tag{69}$$

et $\hat{\Phi}_{E_w}(0) = 1$.

(b) *De manière générale si $d = \varpi^{2r}u$, Il existe une constante absolue C telle que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$*

$$|Z(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, \tfrac{1}{2}+\sqrt{-1}\tau)| \leqslant CN(v)^{-r} \tag{70}$$

et

$$\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_w}(0) = N(v)^{-r}.$$

Preuve. Si $d \in O_{F_v}^*$ alors $O_{F_v} + \sqrt{d}O_{F_v} \simeq O_{E_w}$ et

$$\Phi_{E_w}(a+b\sqrt{d}) = \mathbf{1}_{O_{F_v}} \times \mathbf{1}_{O_{F_v}}(a,b) = \mathbf{1}_{O_{E_w}}(a+b\sqrt{d}).$$

On en déduit

$$Z(\Phi_{E_w},\chi_{E_w},s)=Z(\mathbf{1}_{O_{E_w}},\chi_{E_w},s)=\frac{1}{1-\chi_{E_w}(\varpi)/N(w)^s}.$$

Si on ne suppose plus $d\in O_{F_v}^*$, on a pour tout $\tau\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\left|Z\left(\Phi_{E_w},\chi_{E_w},\frac{1}{2}+\sqrt{-1}\tau\right)\right| &\leqslant \int_{E_w\backslash\{0\}}\Phi(a+b\sqrt{d})\frac{dz}{|z|_w^{1/2}(1-1/N(w))}\\ &=\iint_{O_{F_v}\times O_{F_v}\backslash\{0\}}|\sqrt{d}|_w\frac{da\,db}{|a+b\sqrt{d}|_w^{1/2}(1-1/N(w))}\\ &=\iint_{O_{F_v}\times[m_v]^r\backslash\{0\}}\frac{da\,db}{|a+b|_w^{1/2}(1-1/N(w))}\\ &=\iint_{\substack{0\leqslant v(a)<r\\ v(b)\geqslant r}}\frac{da\,db}{|a|_w^{1/2}(1-1/N(w))}\\ &\quad+\iint_{\substack{v(a)\geqslant r\\ v(b)\geqslant r}}\frac{da\,db}{|a+b|_w^{1/2}(1-1/N(w))}.\end{aligned}$$

Un calcul simple montre alors que

$$|Z(\Phi_{E_w},\chi_{E_w},\tfrac{1}{2}+\sqrt{-1}\tau)|\leqslant CN(v)^{-r}.$$

On finit la preuve du lemme en calculant

$$\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_w}(0)=\iint_{O_{F_v}\times[m_v]^r}da\,db=N(v)^{-r}.\qquad\square$$

Places décomposées. On suppose maintenant v finie, non ramifiée sur $\mathbb{Q}$, décomposée dans E et de caractéritique rèsiduelle distincte de 2. Soient w_1, w_2 les places de E au dessus de v. On choisit l'uniformisante ϖ de sorte que $d=\varpi^{2r}$, $r\in\mathbb{N}$.

On a les isomorphismes :

$$\begin{gathered}i_v: E\otimes F_v=F_v\oplus F_v\sqrt{d}\longrightarrow F_v\oplus F_v\\ a+b\sqrt{d}\mapsto(a,b)\end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered}j_v: E_v\longrightarrow E_{w_1}\times E_{w_2}\\ a+b\sqrt{d}\mapsto(z_1=a+b\sqrt{d},z_2=a-b\sqrt{d}).\end{gathered}$$

Par hypothèse

$$\Phi_{E_{w_1}}\times\Phi_{E_{w_2}}(z_1,z_2)=\Phi(a,b)=\mathbf{1}_{O_{F_v}+O_{F_v}}.$$

Lemme 6.7.

(a) *Si $d\in O_{F_v}^*$ alors*

$$Z(\Phi_{E_{w_1}},\chi_{E_{w_1}},s)Z(\Phi_{E_{w_2}},\chi_{E_{w_2}},s)=\frac{1}{(1-\chi_{E_{w_1}}(\varpi)/N(w_1)^s)(1-\chi_{E_{w_2}}(\varpi)/N(w_2)^s)}\tag{71}$$

(b) *De manière générale si $d=\varpi^{2r}$, il existe une constante absolue C telle que pour tout $\tau\in\mathbb{R}$*

$$|Z_{w_1}(\Phi_{E_{w_1}},\chi_{E_{w_1}},\tfrac{1}{2}+\sqrt{-1}\tau)||Z_{w_2}(\Phi_{E_{w_2}},\chi_{E_{w_2}},\tfrac{1}{2}+\sqrt{-1}\tau)|\leqslant CN(v)^{-r}\tag{72}$$

et

$$\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_1}}(0)\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_2}}(0)=N(v)^{-r}.$$

La démonstration de (a) est similaire au cas précédent.

De manière générale pour tout $\tau \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\left|Z_{w_1}\left(\Phi_{E_{w_1}}, \chi_{E_{w_1}}, \frac{1}{2}+\sqrt{-1}\tau\right)\right|\left|Z_{w_2}\left(\Phi_{E_{w_2}}, \chi_{E_{w_2}}, \frac{1}{2}+\sqrt{-1}\tau\right)\right| \\
&\leqslant \frac{1}{(1-1/N(v))^2}\iint_{E^*_{w_1}\times E^*_{w_2}} \Phi_{E_{w_1}} \times \Phi_{E_{w_2}}(z_1,z_2)\frac{dz_1\,dz_2}{|z_1z_2|^{1/2}} \\
&= \frac{1}{(1-1/N(v))^2}\iint_{O_{F_v}\times O_{F_v}-\{(0,0)\}} N(v)^{-r}\frac{da\,db}{|a^2-b^2d|^{1/2}} \\
&= \frac{1}{(1-1/N(v))^2}\iint_{O_{F_v}\times m_v^r-\{(0,0)\}} \frac{da\,db}{|a^2-b^2|^{1/2}} \\
&= \frac{1}{(1-1/N(v))^2}\left[\iint_{\substack{0\leqslant v(a)<r\\ v(b)\geqslant r}}\frac{da\,db}{|a^2-b^2|^{1/2}} + \iint_{\substack{v(a)\geqslant r\\ v(b)\geqslant r}}\frac{da\,db}{|a^2-b^2|^{1/2}}\right] \\
&\leqslant CN(v)^{-r}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_1}}(0)\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_{w_2}}(0) = \iint_{O_{F_v}\times O_{F_v}} N(v)^{-r}\,da\,db = N(v)^{-r}.$$

Places ramifiées dans E. On suppose maintenant que v est une place non ramifiée de F qui se ramifie dans E. On choisit l'uniformisante ϖ_E de E de sorte que $\sqrt{d} = \varpi_E^{2k+1}$, $k \in \mathbb{N}$, alors $\varpi_F = \varpi_E^2$ est une uniformisante de F. On note par ailleurs $\mathcal{D} = \mathcal{D}_v$ la différente. Rappelons [Lan94, proposition 4, p. 280] que si dx est la mesure de Haar autoduale sur E telle que le volume de O_E est $N(\mathcal{D})^{-1/2}$ alors le volume de O_E^* pour la mesure $d^*x = \frac{dx}{(1-1/N(v))|x|_v}$ est aussi $N(\mathcal{D})^{-1/2}$.

Par définition

$$\Phi_E(a+b\sqrt{d}) = \Phi(a,b) = \mathbf{1}_{O_F\oplus O_F}(a,b).$$

On écrit $E = \coprod_{\alpha\in\mathbb{Z}} O_E^*\varpi_E^\alpha$, alors

$$\Phi_E(\varpi_E^\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 2\beta \geqslant 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 2\beta+1 \geqslant 2k+1 \\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

et Φ_E est O_E^*-invariante. Un calcul simple utilisant ces définitions donne le lemme.

Lemme 6.8. *Pour tout $s \in \mathbb{C}$,*

$$Z(\Phi_E, \chi_E, s) = N(\mathcal{D}_v^{-1/2})\left[\frac{1}{1-\chi_E(\varpi_E)^2/N(v)^{2s}} + \frac{(\chi_E(\varpi_E)/N(v)^s)^{2k+1}}{1-\chi_E(\varpi_E)^2/N(v)^{2s}}\right] \tag{73}$$

et

$$\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_E(0) = N(\mathcal{D}_v^{-1/2})\frac{1+1/N(v)^{2k+1}}{1+1/N(v)}. \tag{74}$$

Notons que si $k \neq 0$ les formules précédentes donnent

$$Z(\Phi_E, \chi_E, s) = \frac{N(\mathcal{D}_v^{-1/2})}{1-\chi_E(\varpi_E)/N(v)^s}$$

et

$$\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_E(0) = N(\mathcal{D}_v^{-1/2}).$$

6.5 Preuve du théorème 6.1

Le but de cette section est de prouver le théorème 6.1 dont on reprend les notations. La preuve repose sur le lemme suivant.

Lemme 6.9. *Pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\left|\frac{Z(\Phi_E, \chi_E, 1/2 + i\tau)}{\hat{\Phi}_E^{\mathbf{1}}(0)}\right| \ll \frac{1}{|N_{F/\mathbb{Q}}(d)|^{1/2-\epsilon}} \left|L\left(\chi_E, \frac{1}{2} + i\tau\right)\right| |L_\infty(\chi^2, 1 + 2i\tau)|. \tag{75}$$

Preuve. Notons d'abord que pour toute place finie v de F première au discriminant de F, au conducteur de χ et à 2 telle que $d \in O_{F_v}^*$, on a d'après les lemmes (6.6), (6.7) et (6.8)

$$\prod_{w|v} \frac{Z(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, 1/2 + i\tau)}{\hat{\Phi}_{E_w}^{\mathbf{1}}(0)} = \prod_{w|v} L\left(\chi_{E_w}, \frac{1}{2} + i\tau\right). \tag{76}$$

Par ailleurs, pour d fixé et pour presque toute place w on a $\hat{\Phi}_{E_w}^{\mathbf{1}}(0) = 1$ et l'intégrale zêta en w coïncide pour presque tout w avec $L(\chi_{E_w}, s)$. Pour comparer les deux produits eulériens (infinis) il suffit donc de comparer les facteurs locaux aux autres places.

Pour l'ensemble S_∞ des places à l'infini de E les lemmes (6.2), (6.3) et (6.4) nous assurent que si pour tout $v \in S_\infty$, $|d_v| \geqslant 1$; alors pour tout $\epsilon > 0$

$$\left|\prod_{w \in S_\infty} \frac{Z(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, 1/2 + i\tau)}{\hat{\Phi}_{E_w}^{\mathbf{1}}(0)}\right| \ll \frac{1}{|N_{F/\mathbb{Q}}(d)|^{1/2-\epsilon}} |L_\infty(\chi^2, 1 + 2i\tau)||\tau|^A. \tag{77}$$

Nos hypothèses impliquent que $|N_{F/\mathbb{Q}}(d)| = \prod_{v|\infty} |d|_v \to \infty$ mais ceci n'implique pas que $|d|_v \to \infty$. (Ce cas plus restrictif était déjà étudié en 4.2 par la méthode ergodique.) Pour toute place $v|\infty$, il faut donc envisager la possibilité que $|d|_v \to 0$. Considérons par exemple le lemme 6.2 (et le lemme 6.5), en supposant donc $d > 0$, $|d| \to 0$. En posant $\delta = d^{-1}$, on vérifie aisément par changement de variables que

$$Z(\Phi, \chi, \tfrac{1}{2} + i\tau) \ll |d|^{1/2-\epsilon} \quad \text{(multiplié par le facteur } \Gamma)$$

alors qu'on a toujours

$$\hat{\Phi}_E^{\mathbf{1}}(0) = \alpha |d|^{1/2}.$$

Les corrections aux lemmes 6.3, 6.4 et donc 6.5 sont analogues. Le calcul du membre de droite de (77) est alors remplacé par

$$\prod_{|d|_v < 1} |d|_v^\epsilon \prod_{|d|_v \geqslant 1} |d|_v^{-1/2+\epsilon} \leqslant \prod_v |d|_v^{-1/2+\epsilon} = |N_{F/\mathbb{Q}}(d)|^{-1/2+\epsilon}$$

multiplié par le terme archimédien. Le résultat est donc inchangé.

Soit S_m l'ensemble des places finies de F divisant 2, le discriminant de F ou le conducteur de χ. Les lemmes (6.6), (6.7) et (6.8) nous assurent l'existence d'une constante abolue B_1 telle que pour toute place v finie de F, $v \notin S_m$ telle que $d \notin O_{F_v}^*$

$$\left|\prod_{w|v} \frac{Z(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, 1/2 + i\tau)}{\hat{\Phi}_{E_w}^{\mathbf{1}}(0)}\right| \leqslant B_1. \tag{78}$$

Soit v une place de S_m, comme il n'y a qu'un nombre fini d'extensions de degré 2 de F_v, que la valuation de d est bornée, il n'y a qu'un nombre fini de choix pour $\prod_{w/v} \Phi_{E_w}$ et donc pour le produit de fonctions zêta locales associé. Les fonctions zêta locales $Z(\Phi_{E_w},\chi_{E_w},\frac{1}{2}+i\tau)$ sont bornées supèrieurement sur la droite $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$. Comme l'ensemble S_m est fini, il existe une constante B_2 telle que

$$\left|\prod_{w|v,\ v\in S_m}\frac{Z(\Phi_{E_w},\chi_{E_w},1/2+i\tau)}{\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_w}(0)}\right|\leqslant B_2. \tag{79}$$

Les valeurs absolues des fonctions L locales sont bornées supérieurement et sont uniformément minorées (par une constante >0) sur la droite $\mathrm{Re}(s)=\frac{1}{2}$. On déduit alors de (78) l'existence d'une constante absolue B telle que pour toutes places v de S_m et toutes places finies v de F telles que $d\notin O^*_{F_v}$

$$\left|\prod_{w/v}\frac{Z(\Phi_{E_w},\chi_{E_w},1/2+i\tau)}{\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_w}(0)}\right|\leqslant B\left|\prod_{w/v}L_w\left(\chi_{E_w},\frac{1}{2}+i\tau\right)\right|. \tag{80}$$

On en déduit aussi l'existence d'une constante B' telle que pour tout $\epsilon'>0$

$$\prod_{d\notin O^*_v}\prod_{w|v}\left|\frac{Z(\Phi_{E_w},\chi_{E_w},\frac{1}{2}+i\tau)}{\hat{\Phi}^{\mathbf{1}}_{E_w}(0)L_w(\chi_{E_w},\frac{1}{2}+i\tau)}\right|\ll\prod_{p|N_{F/\mathbb{Q}}(d)}B'\ll|N_{F/\mathbb{Q}}(d)|^{\epsilon'}. \tag{81}$$

Le lemme s'obtient en combinant les équations (76), (77), (80) et (81). □

Le principe de convexité pour les fonctions L (brièvement décrit à la fin de la section 5.1) ainsi que l'équation fonctionnelle classique [Lan94, théorème 14, p. 209] nous assure l'existence d'une constante $A>0$ telle que

$$|L(\chi_E,\tfrac{1}{2}+i\tau)|\ll d_E^{1/4+\epsilon}|\tau|^A. \tag{82}$$

Ceci termine la preuve du théorème 6.1 quand on a remarqué que $d_E\leqslant|N_{F/\mathbb{Q}}(d)|$.

6.6 Généralisation

Dans § 7 on va utiliser la majoration (60) sous des hypothèses un peu plus générales que celles du théorème 6.1. Tout d'abord, rappelons que la théorie des séries d'Eisenstein montre que pour $s=\frac{1}{2}+i\tau$ la représentation unitaire $V_s(\chi)$ de $GL_2(\mathbb{A}_F)$ (début de § 6) apparaît dans l'espace des formes automorphes sur $GL_2(F)\backslash GL_2(\mathbb{A}_F)$. Un niveau $K\subset GL(2,\mathbb{A}_F^f)$ étant fixé, tout l'espace $V_s(\chi)^K$ apparaît dans les formes automorphes. Les majorations du théorème 6.1 n'ont été calculées que pour le vecteur le moins ramifié de $V_s(\chi)$. Pour utiliser la décomposition spectrale, il nous suffit d'obtenir des majorations analogues à (60) pour tout vecteur dans un sous-espace dense de $V_s(\chi)$. En reprenant les formules (48) et (51), on voit qu'il nous faut démontrer la majoration (60) pour des fonctions Φ produits de fonctions locales plus générales.

Aux places archimédiennes, nous devons considérer les fonctions Φ_v telles que l'intégrale (48) nous permette d'obtenir toutes les fonctions K_v-finies de l'induite locale $V_s(\chi)$; on prend K_v égal au compact standard $0(2,\mathbb{R})$ ou $U(2)$. Pour ceci, il suffit de multiplier la fonction minimale Φ_v indiquée par un polynôme $P(a,b)$. On vérifie aussitôt que les lemmes 6.2, 6.3, 6.4 et 6.5 restent valables.

Aux places finies, on a presque partout la fonction non ramifiée de (58) et (59). Aux autres places l'argument de § 6.5 s'applique et nous donne pour chaque choix de Φ_v, des estimées analogues ; pour chaque place de ramification de K, il n'existe qu'un nombre fini de choix pour Φ_v.

7. Les propriétés $\mathcal{E}_a$ et $\mathcal{E}_a^S$ pour $PGL(2,F)$

7.1 La propriété $\mathcal{E}_a$ pour $PGL(2,F)$

Le but de cette partie est d'expliquer comment les résultats des deux parties précédentes permettent de prouver le théorème suivant qui donne la propriété $\mathcal{E}_a$ pour des suites de tores standard de $G_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} PGL(2,F)$ pour un corps de nombres F.

Théorème 7.1. *Soit $d_\alpha \in O_F$ une suite d'entiers sans facteur carré,*

$$T'_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ d_\alpha b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 - d_\alpha b^2 \neq 0 \right\}$$

ou

$$T'_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} a & bd_\alpha \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a^2 - d_\alpha b^2 \neq 0 \right\}$$

un tore standard de $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}} GL(2,F)$ associé et T_α son image dans $G_{\mathbb{Q}}$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$,

$$S(G,K) = G(\mathbb{Q})^+ \backslash G(\mathbb{R})^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K$$

et S^+ la composante $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$ avec $\Gamma = G(\mathbb{Q})^+ \cap K$. Si $|d_\alpha| = |N_{F/\mathbb{Q}} d_\alpha| \to \infty$ T_α a la propriété $(\mathcal{E}_a)$ dans S^+.

Pour la démonstration, commençons par nous ramener au cadre adélique. Considérons l'application déterminant

$$\det : PGL(2,F)\backslash PGL(2,\mathbb{A}_F) \longrightarrow F^*\backslash \mathbb{A}_F^*/(\mathbb{A}_F^*)^2.$$

Soit $U \subset \mathbb{A}_{F,f}^*/(\mathbb{A}_{F,f}^*)^2$ l'image de K. C'est un sous-groupe compact ouvert et l'ensemble des composantes connexes du quotient est

$$\mathcal{E} = F^*(F_\infty^*)^+ \backslash \mathbb{A}_F^*/(\mathbb{A}_F^*)^2 U.$$

Le groupe dual $\hat{\mathcal{E}}$ est le groupe fini des caractères d'Artin ϵ, d'ordre 2, de $\mathbb{A}_F^*$, triviaux sur U.

Soit η la fonction constante égale à 1 sur $S(G,K)^+$, la composante neutre de $S(G,K) = G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$ et nulle sur les autres composantes. Alors

$$\eta = \frac{1}{|\mathcal{E}|} \sum_{\epsilon \in \hat{\mathcal{E}}} \epsilon,$$

et $\mu_G(\eta) = 1$ par définition.

Notons, pour $T = T_\alpha$, μ_α la mesure 'adélique' définie dans le corps de l'article (à support dans $S(G,K)^+$) et $\mu_{T,\mathbb{A}}$ la mesure normalisée sur $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A})$. On a un diagramme

$$\begin{tikzcd} T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A}) \arrow[r] \arrow[d] & G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A}) \arrow[d] \\ \mathcal{E}' \arrow[r, hook] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

où $\mathcal{E}'$ est un sous-groupe (qui peut être propre!) de $\mathcal{E}$. Alors par définition,

$$\begin{aligned} (\mu_\alpha, \eta) &= |\mathcal{E}'| \langle \mu_{T,\mathbb{A}}, \eta \rangle \\ &= \frac{|\mathcal{E}'|}{|\mathcal{E}|} \sum_{\epsilon \in \hat{\mathcal{E}}} \langle \mu_{T,\mathbb{A}}, \epsilon \rangle = \frac{|\mathcal{E}'|}{|\mathcal{E}|} \sum_{\epsilon \in \mathcal{E}'^\vee} 1 = 1 = \mu_G(\eta). \end{aligned}$$

Dans la dernière somme $\mathcal{E}'^\vee$ désigne l'ensemble des caractères $\epsilon \in \hat{\mathcal{E}}$ qui sont triviaux sur $\mathcal{E}'$.

Une fonction sur $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$ qui est une somme de caractères abéliens (i.e., invariante par $G(\mathbb{R})^+$, donc de la forme $\sum_{\epsilon\in\hat{\mathcal{E}}}\lambda_\epsilon\epsilon$, est à support dans $S(G,K)^+$ si et seulement si $\lambda_\epsilon=\lambda$ est indépendant de ϵ. Considérons alors une suite (T_α). Nous pouvons supposer le groupe $\mathcal{E}'$ constant. Si $f\in C_c^\infty(S(G,K)^+)$ est étendue par 0 à $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})$, et s'écrit donc

$$f=c\sum_{c\in\hat{\mathcal{E}}}\epsilon+g$$

où g est orthogonale aux caractères et C^∞, on voit que la convergence de $\langle\mu_\alpha,f\rangle$ vers $\langle\mu_G,f\rangle$ se réduit à celle de $\langle\mu_{T,\mathbb{A}},g\rangle$ vers 0.

Soit donc $f\in C_c^\infty(G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K)$. Notons $K_\infty=\prod_{v|\infty}K_v$ un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$. Puisque les composantes de Fourier (sous K_∞) convergent uniformément vers f, il nous suffira de tester la convergence sur des fonctions K_∞-finies (à droite). Nous faisons dorénavant cette hypothèse. Ecrivons, selon la décomposition spectrale (cf. [MW94])

$$f=\sum_\epsilon\hat{f}(\epsilon)\epsilon+\sum_\chi\sum_\Psi\int_{-\infty}^{\infty}E^*\left(\chi,\Psi,\frac{1}{2}+i\tau\right)\hat{f}(\chi,\Psi,\tau)\,d\tau+\sum_\phi\hat{f}(\phi)\phi. \tag{83}$$

La décomposition est orthogonale ; $\hat{f}(\epsilon)$ est la composante de f selon un caractère abélien ; ϕ parcourt une base des formes paraboliques (de niveau K, et dont on peut supposer le K_∞-type $\mathcal{T}$ fixé) ; $\hat{f}(\phi)=(f,\phi)$; on suppose que $\|\phi\|_2=1$.

Dans la somme médiane, χ parcourt les caractères de $\mathbb{R}_+^*F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$ de conducteur $U\subset\mathbb{A}_{F_f}^*$ fixé et déterminé par K ; Ψ parcourt une base orthogonale de la partie de l'induite

$$\mathrm{ind}_{B(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\chi)$$

formée des fonctions K-finies et de type $\mathcal{T}$ sous K_∞ (ensemble fini, pour tout χ). On munit l'induite (unitaire si $\chi=\chi_0|\ |^{1/2}$ et χ_0 unitaire, avec notre normalisation) de son produit scalaire canonique.

$E^*(\chi,\Psi,s)$ est la série d'Eisenstein avec sa *normalisation usuelle*

$$E^*(\chi,\Psi,s,g)=\sum_{\gamma\in B(F)\backslash G(F)}\Psi_s(\gamma g)$$

où $\Psi_s=\Psi$ appartient à l'espace (constant) de $\mathrm{ind}(\chi|\ |^s)$. Cette série diffère de celle de § 6, où E était une 'série d'Epstein' au sens de la théorie classique.

Reportons nous à la formule (48) définissant E_Φ. Notre fonction Ψ est f_Φ *à la normalisation près*. Dans le cas non ramifié, si Φ est la fonction caractéristique de $O_{F_v}\times O_{F_v}$ aux places finies, et la fonction de Schwartz usuelle aux places infinies, on trouve que

$$f_\Phi=\Lambda(2s,\chi^2)\Psi_0 \tag{84}$$

où Ψ_0 est le vecteur non ramifié usuel, 'constant', de l'induite et Λ désigne la fonction L *totale* (avec ses facteurs archimédiens). Donc dans ce cas

$$E(\chi,\Phi,s)=\Lambda(2s,\chi^2)E^*(\chi,\Psi_0,s).$$

Rappelons que l'ensemble des places de ramification est ici fixé. Si v est une place de ramification finie, Jacquet–Langlands [JL70, p. 98] montrent qu'on peut choisir Φ_v telle que f_{Φ_v}est la fonction 'fixe' Ψ_v. Aux places archimédiennes, un choix convenable de Φ_v donne la variante locale de (84), le facteur de proportionalité est alors un produit de fonctions Γ. Si S est l'ensemble des places de ramification finies, on aura ainsi en général

$$\begin{aligned}E(\chi,\Phi,s)&=L_\infty(2s,\chi^2)L^S(2s,\chi^2)E^*(\chi,\Psi,s)\\&=\frac{\Lambda(2s,\chi^2)}{L_S(2s,\chi^2)}E^*(\chi,\Psi,s)\end{aligned}$$

Le facteur $L_S(2s,\chi^2)$, la ramification étant fixée, est uniformément borné ainsi que son inverse pour $\mathrm{Re}(s) > \epsilon > 0$. On pourra donc le négliger dans les arguments qui suivent.

Enfin dans (83) $\hat{f}(\chi,\Psi,s)$ est le produit scalaire $\langle f, E^*(\chi,\Psi,s)\rangle$.

Il nous sera nécessaire de comprendre plus précisément les caractères χ qui interviennent. χ est un caractère de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*/U$. Puisqu'on considère les twists de χ par $|\ |^{1/2+it}$, on peut supposer en fait, selon la décomposition usuelle, que c'est un caractère de $F^*\backslash\mathbb{A}_{F,1}^*/U$ (idèles de norme 1) ; χ détermine donc un caractère χ_∞ de $\mathcal{U}\backslash F_{\infty,1}^*$ où $\mathcal{U}$ est un sous-groupe du groupe des unités de F. Puisque le K_∞-type $\mathcal{T}$ est fixé, on peut supposer la restriction de χ_∞ à $\prod_{v|\infty} F_v^*(1)$ fixée où $F_v^*(1) = \{x \in F_v^* : |x|_v = 1\}$. Donc χ_∞ s'écrit sous la forme

$$x = (x_v) \mapsto \chi_0(x)\prod_v |x_v|^{i\sigma_v}$$

où χ_0 est un caractère fixe, σ_v est réel, et $\sigma = (\sigma_v)$ parcourt le dual Σ du réseau image de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}^r$ $(r = r_1 + r_2 - 1)$ par l'application de Dirichlet. Enfin, χ_∞ étant fixé, il y a un nombre fini de possibilités pour χ, données par torsion par un ensemble fini, fixe, de caractères d'Artin (dépendant de la ramification).

La norme L^2 d'une fonction f décomposée selon (83) s'écrit

$$\|f\|_2^2 = \sum_\epsilon |\hat{f}(\epsilon)|^2 + \sum_\chi\sum_\Psi c_\chi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\chi,\Psi,t)|^2\,dt + \sum_\phi |\hat{f}(\phi)|^2, \tag{85}$$

c_χ (l'ordre d'un stabilisateur) étant une constante > 0 inessentielle, uniformément majorée et minorée.

Considérons sur $G(\mathbb{R})$ le laplacien, invariant à gauche et elliptique

$$\omega_G = C_G - 2C_K$$

où C_G, C_K sont les éléments de Casimir de $G(\mathbb{R})$ et K_∞ ([CU04, § 8]) ; $-\omega_G$ est alors un opérateur positif ; il opère sur les composantes non constantes de (83) de la façon suivante : il multiplie $\hat{f}(\phi)$ par $\lambda_\phi = -C_G(\phi) + 2C_K(\phi)$ où C_G, C_K sont les actions des éléments de Casimir (C_K étant du reste constant). Il opère sur la composante $\hat{f}(\chi,\Psi,\tau)$ par le scalaire

$$\|\lambda_c\|^2 + \sum_v |\lambda_v + \sigma_v|^2 + \tau^2 = \|\lambda_c\|^2 + \|\lambda+\sigma\|^2 + \tau^2\,;$$

$\lambda_{\chi_0} = (\lambda_c, \lambda_v)$ étant le paramètre d'Harish-Chandra de la représentation induite de χ_0, décomposé en sa partie compacte et non compacte.

Puisque f est C^∞, on voit que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\sum_{\sigma\in\Sigma}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{\Psi,\chi} c_\chi(\|\lambda+\sigma\|^{2n} + \tau^{2n})|\hat{f}(\chi,\Psi,\tau)|^2\,d\tau + \sum_\phi \lambda_\phi^{2n}|\hat{f}(\phi)|^2 < \infty. \tag{86}$$

Dans la première somme on a remplacé, pour avoir une vision plus géométrique des paramètres, les données (χ,Ψ) par (σ,χ,Ψ) où $\sigma\in\Sigma$ et χ est associé à σ de sorte que le nombre de χ est fini pour σ fixé.

Considérons d'abord la partie cuspidale de (85). On a les propriétés bien connues suivantes.

Lemme 7.2. *Pour ϕ cuspidale et N assez grand,*

$$\|\phi\|_\infty = O(\lambda_\phi^N)\|\phi\|_2.$$

Rappelons brièvement la démonstration. Si $\alpha \in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ et si ϕ est une forme parabolique L^2 sur $G(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{A})/K$, on sait que

$$\|\phi \star \alpha\|_\infty \leqslant \nu(\alpha)\|\phi\|_2,$$

$\nu(\alpha)$ étant une semi-norme continue en α, de la forme $\sum_i \|\alpha \star u_i\|_\infty$ où $u_i \in U\mathfrak{g}$ (Harish-Chandra [Har68, p. 14]).

Par ailleurs, soit δ la mesure de Dirac à l'origine et $d = \dim(G(\mathbb{R}))$. Pour tout $N \geqslant (d+1)/2$, on peut trouver (cf. [DL71]) $\alpha \in C_c^{2N-d-1}(G(\mathbb{R}))$ et $\beta \in C_c^\infty(G(\mathbb{R}))$ tels que

$$\alpha \star \omega_G^N = \delta + \beta.$$

Pour N assez grand, ν s'étend continûment en α, et on en déduit si ϕ est fonction propre de ω_G de valeur propre λ_G

$$\|\phi\|_\infty \leqslant (\lambda_\phi^N \nu(\alpha) + \nu(\beta))\|\phi\|_2.$$

Par ailleurs, la 'loi de Weyl' est vraie pour les valeurs propres[2] λ_ϕ. Il nous suffira d'une forme faible due pour un groupe arbitraire à Donnelly, cf. Müller [Mul89].

Lemme 7.3. *Pour $X > 0$ soit*

$$N(X) = \#\{\phi \mid |\lambda_\phi|^2 < X\}.$$

Soit $d = \dim(G(\mathbb{R})/K_\infty)$, alors $N(X) \leqslant c(1 + X^{2d})$ pour une constante $c > 0$.

D'après (85), la série des dérivées (images par $\star\omega_G^n$) des fonctions du développement (83) converge dans L^2 pour tout n. Il en résulte que ce développement converge uniformément, ainsi que toutes ses dérivées, sur tout compact de $S(G,K)^+$.

Par ailleurs le lemme 7.3 implique que, si l'on ordonne les ϕ de façon que $|\lambda_\phi|$ soit croissant,

$$|\lambda_{\phi_m}| \gg m^{1/2d} \quad (m \to \infty).$$

L'équation (86) implique que $|\hat{f}(\phi)| \ll |\lambda_\phi|^{-n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_\phi |\hat{f}(\phi)|\|\phi\|_\infty &\ll \sum_\phi |\lambda_\phi|^N |\hat{f}(\phi)| \quad (\text{lemme } 7.2)\\ &\ll \sum_\phi |\lambda_\phi|^{N-n} \ll \sum_m m^{(N-n)/2d} < \infty\end{aligned}$$

pour n assez grand. Il en résulte que dans le développement (83), la somme portant sur ϕ est uniformément convergente[3].

Considérons alors $\mu_{\alpha,\mathbb{A}}(f)$ où $\mu_{\alpha,\mathbb{A}}$ est l'intégrale normalisée sur $T_\alpha(\mathbb{Q})\backslash T_\alpha(\mathbb{A})$. L'intégrale (contre $d\mu_{\alpha,\mathbb{A}}$) de $\sum_{\epsilon\in\mathcal{E}} \hat{f}(\epsilon)\epsilon$ (avec $\hat{f}(\epsilon)$ ici constant puisque f est à support dans $S(G,K)^+$) est égale comme on l'a vu à $\mu_G(f)$. On doit vérifier que l'intégrale des autres termes de (83) tend vers 0.

Pour les termes cuspidaux, on a d'après le théorème 5.1

$$\mu_{\alpha,\mathbb{A}}(\phi) \ll |d_\alpha|^{-1/4+\theta/2+\epsilon}.$$

Donc $\mu_{\alpha,\mathbb{A}}(\phi) \to 0$ d'après les approximations connues de la conjecture de Selberg ($\theta < \frac{1}{2}$). Par convergence uniforme, l'intégrale de la dernière somme dans (83) tend vers 0.

Si F est $\mathbb{Q}$ ou un corps quadratique imaginaire, la démonstration est alors complète. En effet, il n'y a qu'un nombre fini de couples (χ, Ψ) et pour chacun, Φ étant associé à Ψ.

$$\mu_{\alpha,\mathbb{A}}(E(\chi, \Phi, \tfrac{1}{2} + i\tau)) \ll |d_\alpha|^{-1/4+\epsilon}|\tau|^A |L_\infty(\chi^2, 1 + 2i\tau)|$$

[2]Mais nous ne connaissons pas de référence pour un corps de nombres arbitraire.

[3]Noter que tout cet argument s'applique à un groupe arbitraire.

d'après le théorème 6.1. L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} E\left(\chi, \Phi, \frac{1}{2} + i\tau\right) \hat{f}(\chi, \Psi, \tau)\, d\tau$$

est limite de ses intégrales sur $[-T, T]$, la convergence étant uniforme sur tout compact. L'intégration commute donc avec l'évaluation de $\mu_{\alpha,\mathbb{A}}$; (86) donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tau^A \left|\hat{f}\left(\chi, \Psi, \frac{1}{2} + i\tau\right)\right| d\tau < \infty$$

pour tout A. Enfin on a

$$E^*(\chi, \Psi, s) = \frac{1}{L_\infty(2s, \chi^2)} \frac{L_S(2s, \chi^2)}{L(2s, \chi^2)} E(\chi, \Phi, s).$$

L'estimation classique : $|L(1 + i\tau, \chi^2)^{-1}| \ll \tau^A$ permet de terminer la démonstration.

Pour un corps F arbitraire, nous devons contrôler l'uniformité de telles estimées. Rappelons que la somme (83) porte sur des caractères χ de $\mathbb{A}_F^*$ de ramification fixée (aux places finies). En particulier le nombre de caractères d'ordre 2 est fini. Pour les autres, on a l'estimée uniforme suivante.

Lemme 7.4. *Soit $\chi \neq \overline{\chi}$ un caractère de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$. On note $q_f(\chi)$ son conducteur arithmétique, $q(\chi) = |q_f(\chi)| \prod |\mu_i + 3|$ où μ_i désigne les paramètres archimédiens de χ et $q(\chi, t) = q(\chi)(|t| + 3)$. On a*

$$|L(\chi, 1 + it)|^{-1} \ll q(\chi, t)$$

avec une constante implicite ne dépendant que de F.

Preuve. Cela résulte de techniques classiques de théorie analytique des nombres. Donnons cependant la preuve.

On dispose d'une zone sans zéros pour $L(\chi, s)$: par [Iwa04, théorème 5.10], il existe une constante c ne dépendant que de $[F : \mathbb{Q}]$ tel que si $s = \sigma + it$ et $\sigma \geqslant 1 - c/q(\chi, t)$ alors $L(s, \chi) \neq 0$. D'après des arguments bien connus, ceci donne des estimations sur $L'(\chi, s)/L(\chi, s)$. Soit $s_1 = 1 + it$, $\sigma_0 = 1/\log q(\chi, t)$ et $s_0 = s_1 + \sigma_0$. Il résulte de [Iwa04, proposition 5.7, (1) et (2)] que pour tout $s \in [s_0, s_1]$

$$\left|\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}\right| \ll (\log q(\chi, t))^2.$$

On en déduit que

$$|\log L(\chi, 1 + it) - \log L(\chi, 1 + \sigma_0 + it)| \ll \int_{[s_0, s_1]} \left|\frac{L'(\chi, s)}{L(\chi, s)}\right| ds \ll \log q(\chi, t).$$

Par ailleurs en s_0, on a un produit eulerien uniformément convergent

$$L(\chi, s_0) = \prod_{\mathfrak{P}} \left(1 - \frac{\chi(\mathfrak{P})}{N(\mathfrak{P})^{s_0}}\right)^{-1}.$$

D'où

$$|\log|L(\chi, s_0)|| \ll \sum_{\mathfrak{P}} \frac{1}{N(\mathfrak{P})^{1+\sigma_0}}.$$

Pour $s = 1 + \sigma > 1$ on a

$$-\log \zeta_F(s) = \sum_{\mathfrak{P}} \frac{1}{N(\mathfrak{P})^{1+\sigma}} + \phi(s)$$

avec $\phi(s)$ continue en $s = 1$.

On déduit du développement de ζ_F au voisinage de 1 que

$$\sum_{\mathfrak{P}} \frac{1}{N(\mathfrak{P})^{1+\sigma_0}} \ll \log q(\chi, t).$$

Finalement

$$|\log|L(\chi, 1+it)|| \ll \log q(\chi, t)$$

d'où

$$\frac{1}{q(\chi, t)} \ll |L(\chi, 1+it)| \ll q(\chi, t). \qquad \square$$

Pour chaque donnée (χ, ψ), la démonstration du théorème 6.1 donne l'estimée suivante, uniforme en χ, Ψ et τ

$$\mu_{\alpha,\mathbb{A}}(E(\chi, \Phi, \tfrac{1}{2} + i\tau)) \ll |d_\alpha|^{-1/4+\epsilon}(1 + |\tau|^2 + \|\sigma\|^2)^A |L_\infty(\chi^2, 1 + 2i\tau)|,$$

la constante A ne dépendant que de la ramification (y compris à l'infini, c'est à dire des K_∞-types). Cela résulte des arguments de § 6, avec les modifications suivantes. Aux places archimédiennes, on a utilisé le contrôle en τ donné par le lemme 6.5. Aux places finies (cf. les arguments à la fin de § 6.5 et de § 6.6), il suffit de vérifier que les estimées sont uniformes quand la ramification de χ est fixé.

Notons f_{Eis} le terme médian de (83), il résulte de ce qui précède qu'il est C^∞ et borné. Vu la convergence uniforme de la série (d'intégrales) sur tout compact, on a pour α fixé :

$$\mu_{\alpha,\mathbb{A}}(f_{\mathrm{Eis}}) \ll |d_\alpha|^{-1/4+\epsilon} \sum_\sigma \sum_{\Psi,\chi} \int (1 + |\tau|^2 + \|\sigma\|^2)^A |L(\chi^2, 1 + 2i\tau)|^{-1} |\hat{f}(\chi, \Psi, \tau)| \, d\tau.$$

D'après le lemme 7.4,

$$\mu_{\alpha,\mathbb{A}}(f_{\mathrm{Eis}}) \ll C|d_\alpha|^{-1/4+\epsilon}$$

où

$$C = \sum_\sigma \sum_{\Psi,\chi} \int (1 + |\tau|^2 + \|\sigma\|^2)^A |\hat{f}(\chi, \Psi, \tau)| \, d\tau$$

quitte à changer la constante A. Mais il résulte de (86) et de Cauchy–Schwartz que $C < \infty$. Ceci termine la preuve du théorème 7.1.

7.2 La propriété $\mathcal{E}_a^S$ pour $PGL(2, F)$

Dans cette partie nous expliquons les modifications nécessaires pour étudier la propriété $\mathcal{E}_a^S$ pour des suites strictes de couples admissibles (T_α, b_α) quand F est un corps totalement réel et T_α est un tore standard tel que $T_\alpha(\mathbb{R})$ est compact.

Nous reprenons les notations de § 1.2. On pose $G = \mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}\, PGL(2, F)$, $r = [F : \mathbb{Q}]$, $G(\mathbb{R}) = PGL(2, \mathbb{R})^r$ et

$$K_\infty = SO(2)^r.$$

La motivation pour une telle étude est que dans cette situation

$$S(G, K, K_\infty) = G(\mathbb{Q})^+ \backslash [G(\mathbb{R})^+ / K_\infty \times G(\mathbb{A}_F^f)/K]$$

est une variété de Shimura (une variété modulaire de Hilbert) et la mesure $\nu_\alpha = \nu_{T_\alpha, b_\alpha}$ associée à (T_α, b_α) est une moyenne de mesures de Dirac de support l'ensemble des points à multiplication complexe associés au tore T_α. Ce cas est traité par Duke [Duk88] pour $F = \mathbb{Q}$ et des résultats sont annoncés par Cohen [Coh] et par Zhang [Zha01] dans cette direction.

Pour utiliser des notations plus raisonables dans ce contexte, nous notons $X = G(\mathbb{R})^+/K_\infty = \mathcal{H}^{[F:\mathbb{Q}]}$ et

$$Sh_K(G, X) = S(G, K, K_\infty).$$

Le but de cette partie est de montrer que la conjecture $(\mathcal{E}_a^S)$ serait une conséquence de la sous-convexité pour $L(\Pi_\alpha, \frac{1}{2})$ et $L(\chi_{E_\alpha}, \frac{1}{2} + i\tau)$.

Soit $d \in O_F$ un entier sans facteur carré et soit T_d un tore standard associé. On suppose que $T_d(\mathbb{R})$ est compact, alors pour toute place à l'infini v de F, $d_v < 0$ et le corps associé $E = E_d$ est à multiplication complexe.

On suppose dans la suite que T_d est le tore standard $\left(\begin{smallmatrix} a & bd \\ b & a \end{smallmatrix}\right)$ on note

$$b_d \in G(\mathbb{R})^+ = \bigoplus_{v:F\to\mathbb{R}} PGL(2, \mathbb{R})$$

l'élément dont la composante v est

$$(b_d)_v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{-d_v} \end{pmatrix}.$$

On vérifie alors que (T_d, b_d) est un couple admissible, autrement dit pour toute place à l'infini v de F,

$$(b_d)_v^{-1} T_d(\mathbb{R})^+ (b_d)_v \subset K_\infty.$$

(Si $T_d = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ bd & a \end{smallmatrix}\right)$ on prend $(b_d)_v = \left(\begin{smallmatrix} \sqrt{-d_v} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$; on laisse au lecteur le soin d'adapter l'argument.)

On identifie $L^2(Sh_K(G, X), d\mu_0) \simeq L^2(S(G, K), d\mu_0)^{K_\infty}$. Soit S^+ la composante neutre de $S(G, K)$ et $f \in C_c^\infty(S^+)$, K_∞-invariante. On a selon la décomposition spectrale

$$f = \sum_\epsilon \hat{f}(\epsilon)\epsilon + \sum_\chi \sum_\Psi \int_{-\infty}^{\infty} E^*\left(\chi, \Psi, \frac{1}{2} + i\tau\right) \hat{f}(\chi, \Psi, \tau)\, d\tau + \sum_\phi \hat{f}(\phi)\phi. \tag{87}$$

Chaque terme à la même signification que dans (83), mais les caractères ϵ, les formes paraboliques ϕ et les series d'Eisenstein $E^*(\chi, \Psi, s)$ sont de plus K_∞-invariants. En particulier les caractères χ de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$ intervenant dans la somme du milieu sont non ramifiés aux places à l'infini.

On note $\underline{b}_d \in G(\mathbb{A})$ l'élément dont les composantes finies sont l'identité et dont la composante en une place v archimédienne est $(b_d)_v$. Pour $T = T_d$, on note $\mu_{d,\mathbb{A}}$ la mesure normalisée sur $T(\mathbb{Q})\backslash T(\mathbb{A})/K \cap T(\mathbb{A}_f)$.

On écrit $f = \sum_\epsilon \hat{f}(\epsilon)\epsilon + g$ avec g orthogonale aux caractères. Les considérations de § 7.1 montre que pour obtenir la propriété $\mathcal{E}_a^S$ dans ce cadre il faut montrer que

$$\int_{S^+} g(z\underline{b}_d)\, d\mu_{d,\mathbb{A}} \to 0$$

quand $|d| \to \infty$.

Soit ϕ une forme cuspidale intervenant dans la décomposition (87). On réalise ϕ comme un vecteur $e = \otimes e_v$, $K \times K_\infty$-invariant d'une représentation $(\pi = \otimes\pi_v, V)$ automorphe cuspidale de $GL(2, \mathbb{A}_F)$ de caractère central trivial.

Pour toute place à l'infini v

$$\begin{aligned} &\int_{Z_v\backslash T_v} \frac{\langle \pi_v(tb_v)e_v, \pi_v(b_v)e_v\rangle}{\langle e_v, e_v\rangle}\, dt \\ &\quad = \int_{Z_v\backslash T_v} \frac{\langle \pi_v(b_v^{-1}tb_v)e_v, e_v\rangle}{\langle e_v, e_v\rangle}\, dt = 1. \end{aligned} \tag{88}$$

En utilisant l'équation (19), on en déduit que pour tout $\epsilon > 0$

$$\prod_{v\in S_F} \alpha_v(e_v, b_v, T_v) \ll |d|^{-1/2+\epsilon}. \tag{89}$$

D'après les équations (16), (89) et la discussion de la section (5.1), pour tout $\epsilon > 0$

$$\left| \int_{S(G,K)} \phi(z\underline{b}_d)\, d\mu_{d,\mathbb{A}} \right| \ll |d|^{-1/4+\epsilon} \left| L\left(\Pi, \frac{1}{2}\right)\right|^{1/2}.$$

On écrit alors $g = g_{\text{cusp}} + g_{\text{Eis}}$ où g_{cusp} désigne la partie discrète de g et g_{Eis} la partie continue. On montre comme dans la section précédente que dans la décomposition spectrale (87) on a convergence uniforme de la somme sur les formes cuspidales ϕ vers g_{cusp}. On en déduit que

$$\left| \int_{S(G,K)} g_{\text{cusp}}(z\underline{b}_d)\, d\mu_{d,\mathbb{A}} \right| \ll |d|^{-\frac{1}{4}+\epsilon} \left| L\left(\Pi, \frac{1}{2}\right)\right|^{1/2}.$$

Cette intégrale est donc inconditionnellement $\ll |d|^{\epsilon}$ pour tout $\epsilon > 0$, la sous-convexité pour $L(\Pi, \frac{1}{2})$ nous donnerait la majoration $\ll |d|^{-\epsilon}$, enfin l'hypothèse de Lindelöf nous donnerait la majoration $|d|^{-1/4+\epsilon}$.

D'après l'équation (51) et la discussion qui suit (51), pour tout caractère χ de $F^*\backslash\mathbb{A}_F^*$ (non ramifié en l'infini) intervenant dans la décomposition spectrale (87)

$$\left| \int_{S(G,K)} E\left(\Phi, \chi, \frac{1}{2} + i\tau\right)(z\underline{b}_d)\, d\mu_{d,\mathbb{A}} \right| = \frac{a_0 N_{F/\mathbb{Q}}(d)^{1/4} \omega_E d_E^{1/2}}{h_E R_E} \left| \frac{Z(\Phi_E, \chi_E, \underline{b}_d, 1/2 + i\tau)}{\hat{\Phi}_E^{\mathbf{1}}(0)} \right| \tag{90}$$

où a_0 est une constante absolue, et

$$Z(\Phi_E, \chi_E, \underline{b}_d, s) = \prod_{w\in S_E} Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, b_{dw}, s)$$

avec

$$Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, b_{dw}, s) = Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, s)$$

si w est une place finie de E et en une place à l'infini w de E,

$$Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, b_{dw}, s) = \int_{E_w^*} \Phi_{E_w}(e_0 z b_{dw}) \chi_{E_w}(z) |z|^s\, d^*z. \tag{91}$$

D'après les calculs faits dans le lemme (6.9), on a pour tout $\epsilon > 0$ la majoration

$$\left| \prod_{w\in S_{E,fin}} \frac{Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, b_w, 1/2 + i\tau)}{\hat{\Phi}_{E_w}^{\mathbf{1}}(0)} \right| \ll N_{F/\mathbb{Q}}(d)^{\epsilon} \left| L\left(\chi_E, \frac{1}{2} + i\tau\right)\right|. \tag{92}$$

Pour calculer la fonction zêta de l'équation (91) en une place w de E au dessus d'une place à l'infini v de F, rappelons que $E_w = \mathbb{C}$ et que χ_v est un caractère non ramifié de $F_v^* = \mathbb{R}^*$, donc de la forme $\chi_v = |\ |^{i\sigma_v}$. Dans cette situation $\Phi_v(a, b) = e^{-\pi(a^2+b^2)}$.

Lemme 7.5. *Pour tout tore standard T_d, pour tout caractère $\chi_v = |\ |^{i\sigma_v}$, pour toute place à l'infini v de F et pour tout $\tau \in \mathbb{R}$*

$$Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, b_{dw}, s) = \pi^{1-s-i\sigma_v}\Gamma(s + i\sigma_v) = \pi L_v(\chi^2, 2s). \tag{93}$$

Preuve. Par définition si $z = a + b\sqrt{-d_w}$,

$$\begin{aligned} Z_w(\Phi_{E_w}, \chi_{E_w}, b_{d_w}, s) &= \int_{\mathbb{C}^*} \Phi_v(a, b\sqrt{-d_w})|z|_w^{s+i\sigma_v} \frac{dz}{|z|} \\ &= \int e^{-\pi(a^2+b^2|d_w|)}(a^2+b^2|d_w|)^{s+i\sigma_v-1}\sqrt{-d_w}\, da\, db \\ &= 2\pi \int_0^\infty e^{-\pi r^2} r^{2(s+i\sigma_v-1)} r\, dr = \pi^{1-s-i\sigma_v}\Gamma(s+i\sigma_v) = \pi L_v(\chi^2, 2s). \qquad \square \end{aligned}$$

Par ailleurs, on a (avec les notations de § 7.1) la relation

$$E^*(\chi, \Psi, s) = \frac{L_S(2s, \chi^2)}{L(2s, \chi^2)} \frac{E(\chi, \Phi, s)}{L_\infty(2s, \chi^2)}.$$

D'après l'équation (90), le théorème de Brauer–Siegel, le lemme précédent et la preuve de lemme 6.9, pour tout $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} I(\tau) &= \left| \int_{S(G,K)} E^*\left(\chi, \Psi, \frac{1}{2} + i\tau\right)(z\underline{b}_d)\, d\mu_{d,\mathbb{A}} \right| \\ &\ll \frac{1}{|L(1+2i\tau, \chi^2)|}|d|^{-1/4+\epsilon} \left| L\left(\chi_E, \frac{1}{2} + i\tau\right)\right|. \end{aligned}$$

On obtient donc inconditionnellement la borne $I(\tau) \ll |d|^\epsilon |\tau|^A / |L(1+2i\tau, \chi^2)|$, la sous-convexité pour $L(\chi_E, \frac{1}{2} + i\tau)$ nous donnerait $I(\tau) \ll |d|^{-\epsilon}|\tau|^A/|L(1+2i\tau,\chi^2)|$ et l'hypothèse de Lindelöf nous donnerait $I(\tau) \ll |d|^{-1/4+\epsilon}|\tau|^A/|L(1+2i\tau,\chi^2)|$.

Le lemme 7.4 et le raisonnement fait à la fin de § 7.1 donne inconditionellement

$$\left| \int_{S^+} g(z\underline{b}_d)\, d\mu_{d,\mathbb{A}} \right| \ll |d|^\epsilon.$$

La sous-convexité pour $L(\chi_E, \frac{1}{2} + i\tau)$ nous donnerait

$$\left| \int_{S^+} g(z\underline{b}_d)\, d\mu_{d,\mathbb{A}} \right| \ll |d|^{-\epsilon}.$$

Enfin l'hypothèse de Lindelöf nous donnerait

$$\left| \int_{S^+} g(z\underline{b}_d)\, d\mu_{d,\mathbb{A}} \right| \ll |d|^{-1/4+\epsilon}.$$

Appendice A

Pour la convenance du lecteur, nous avons regroupé dans cet appendice des résultats et des références qui nous sont utiles dans ce texte et qui, quoique 'bien connus des spécialistes' sont difficiles à trouver dans la litérature. Le lecteur est invité à ne s'intéresser aux résultats présentés ici qu'en cas de besoin.

Dans tout l'appendice, comme dans le reste de l'article, X est le quotient $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})$ ou $\Gamma\backslash G(\mathbb{R})^+$ (que l'on note parfois X^+ dans ce cas), Γ étant un sous-groupe de congruence et $G_{\mathbb{Q}}$ un groupe algébrique de type $\mathcal{F}$. On munit X de la mesure de Haar μ_G normalisée de sorte que $\mu_G(X) = 1$.

A.1 Equidistribution

Nous considérons des suites μ_α de mesures de probabilité sur X (les mesures de probabilités sur $\Gamma_{H_\alpha}\backslash H_\alpha(\mathbb{R})^+$, $H_\alpha \subset G$ étant un $\mathbb{Q}$-sous-groupe de type $\mathcal{H}$, ou des moyennes finies de telles mesures). Rappelons le fait simple suivant [Bou65, ch. 4.5, proposition 22].

Proposition A.1. *Si $\mu_\alpha \to \mu_G$ pour la topologie vague et si $E \subset X$ est un sous-ensemble mesurable tel que $\mu_G(\partial E) = 0$, alors*

$$\mu_\alpha(E) \to \mu_G(E).$$

Il est parfois commode d'utiliser une réciproque. Soit $\mathcal{E}$ une famille d'ouvert de X telle que l'espace vectoriel engendré par les fonctions caractéristiques des $E \in \mathcal{E}$ permet d'approcher uniformément toute fonction $f \in C_c(X)$. Alors $\mu_\alpha \to \mu_G$ si pour tout $E \in \mathcal{E}$, $\mu_\alpha(E) \to \mu_G(E)$. (Voir § 2.2.)

Enfin d'après Weyl, il suffit, pour vérifier la convergence vague de μ_α vers μ_G de vérifier que pour tout compact $K \subset X$, $(\mu_\alpha, f) \to (\mu_G, f)$ pour un sous-ensemble dense dans $C^0(K)$.

A.2 Distribution

Soit $\mathcal{D}'(X)$ l'epace des distributions sur X, dual de $\mathcal{D}(X)$ avec sa topologie usuelle [Sch66]. Si $T \in \mathcal{D}'(X)$ et si $Z \in \mathfrak{g} = Lie(G(\mathbb{R}))$, nous noterons parfois $T * Z$ la dérivée de T selon Z pour la représentation naturelle de $\mathfrak{g}$ à droite sur $\mathcal{D}'$ (Bruhat [Bru56], voir en particulier proposition 2.4).

On a donc par définition

$$T * Z = \frac{d}{dt}(R(e^{tZ}T - T))_{t=0} \tag{94}$$

où R est la représentation à droite de G sur $\mathcal{D}'$, et l'existence de la dérivée implique en particulier que pour tout $f \in \mathcal{D}(X)$

$$(T * Z, f) = -(T, f * Z).$$

Rappelons que l'application $(f, T) \mapsto (T, f)$ n'est pas continue sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}'$. On a cependant [Sch66, p. 73, après le théorème XI] le lemme suivant.

Lemme A.2. *Si $f_\alpha \to f$ (dans $\mathcal{D}$) et $T_\alpha \to T$ (dans $\mathcal{D}'$) sont des suites convergentes alors*

$$(T_\alpha, f_\alpha) \to (T, f).$$

En particulier, dans la situation de § A.1, soit $Z_\alpha \in \mathfrak{g}$ et soit μ_α une suite de mesures de probabilité tendant vers une mesure de probabilité ν pour la convergence vague. Alors $\mu_\alpha \to \nu$ dans $\mathcal{D}'$ ([Sch66, p. 70]). Si $f \in \mathcal{D}$ et si $Z_\alpha \to Z$ dans $\mathfrak{g}$ alors $f * Z_\alpha \to f * Z$ dans $\mathcal{D}$. On en déduit donc par transposition le lemme suivant.

Lemme A.3. *Sous ces hypothèses, $\mu_\alpha * Z_\alpha \to \nu * Z$.*

Enfin soit $Z \in \mathfrak{g}$ et

$$U = \{e^{tZ},\ t \in \mathbb{R}\}$$

le sous-groupe analytique de $G(\mathbb{R})$ engendré par Z. (Nous ne supposons pas U fermé ; U est un groupe de Lie immergé. Dans le cas qui nous intéresse, Z sera nilpotent et U fermé). Alors il résulte de (94) que pour tout $T \in \mathcal{D}'$

$$T * Z = 0 \iff R(u)T = T \quad \text{pour tout } u \in U. \tag{95}$$

Remerciement

Nous voudrions remercier Ofer Gabber qui nous a permis de corriger une assertion erronée dans la première version de ce texte.

Bibliographie

Bor69 A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques*, Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg, vol. XV (Hermann, Paris, 1969).

BP89 A. Borel et G. Prasad, *Finiteness theorems for discrete subgroups of bounded covolume in semi-simple groups*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **69** (1989), 119–171 ; Addendum : *ibid* **71** (1990), 173–177.

Bou65 N. Bourbaki, *Intégration*, deuxième édition (Hermann, Paris, 1965), chap. 1–4.

Bru56 F. Bruhat, *Sur les représentations induites de groupes de Lie*, Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 97–205.

Clo03 L. Clozel, *Démonstration de la conjecture* τ, Invent. Math. **151** (2003), 297–328.

CU04 L. Clozel et E. Ullmo, *Equidistribution des points de Hecke*, dans *Contributions to automorphic forms, geometry and arithmetic*, volume en l'honneur de J. Shalika, eds A. Hida, D. Ramakrishnan et F. Shaidi (Johns Hopkins University Press, Baltimore, MD, 2004).

CU L. Clozel et E. Ullmo, *Equidistribution de sous-variétés spéciales*, Ann. of Math. (2), à paraître.

Coh P. Cohen, *Hyperbolic distribution problems on Siegel* 3*-folds and Hilbert modular varieties*, Duke. Math. J., à paraître.

DL71 M. Duflo et J.-P. Labesse, *Sur la formule des traces de Selberg*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **4** (1971), 193–284.

Duk88 W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms*, Invent. Math. **92** (1988), 73–90.

EMS96 A. Eskin, S. Mozes et N. Shah, *Unipotent flows and counting lattice points on homogeneous varieties*, Ann. of Math. (2) **143** (1996), 253–299.

GJ78 S. Gelbart et H. Jacquet, *A relation between automorphic representation of* GL_2 *and* GL_3, Ann. Sci. École Norm. Sup. **11** (1978), 471–542.

Har68 D. Harish-Chandra, *Automorphic forms on semi-simple Lie groups*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 62 (Springer, Berlin, 1968).

Hel84 S. Helgason, *Groups and geometric analysis* (Academic Press, Reading, MA, 1984).

Iwa04 H. Iwaniec et E. Kowalski, *Analytic number theory*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., vol. 53 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2004).

JL70 H. Jacquet et R. Langlands, *Automorphic forms on* $GL(2)$, Lecture Notes in Mathematics, vol. 114 (Springer, Berlin, 1970).

KS03 H. Kim et P. Sarnak, *Refined estimates towards the Ramanujan Conjecture*, Appendix to H. Kim, *Functoriality for the exterior square of* GL_4 *and the symmetric fourth of* GL_2, J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 139–183.

Lan94 S. Lang, *Algebraic number theory*, deuxième édition, Graduate Texts in Mathematics, vol. 110 (Springer, Berlin, 1994).

Lang80 R. Langlands, *Base change for* $GL(2)$, Ann. of Math. Stud., vol. 96 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1980).

MOS66 W. Magnus, F. Oberhettinger et R. P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*, troisième édition (Springer, Berlin, 1966).

Mic P. Michel, *Analytic number theory and families of automorphic L-functions*, IAS/Park City Mathematics Series (American Mathematical Society, Providence, RI), to appear.

MW94 C. Moeglin et J.-L. Waldspurger, *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein* (Birkhäuser, Basel, 1994).

MS95 S. Mozes et N. Shah, *On the space of ergodic invariant measures of unipotent flows*, Ergodic Theory and Dynam. Systems **15** (1995), 149–159.

Mul89 W. Müller, *The trace class conjecture in the theory of automorphic forms*, Ann. of Math. (2) **130** (1989), 473–529.

PR94 V. Platonov et A. Rapinchuk, *Algebraic groups and number theory* (Academic Press, Reading, MA, 1994).

Pra91 G. Prasad, *Semi-simple groups and arithmetic subgroups*, in *Proc. int. congress of mathematicians*, Kyoto, Japan, 1990 (Math. Soc. Japan, Tokyo, 1991), 821–832.

Rat91a M. Ratner, *On Raghunathan's measure conjecture*, Ann. of Math. (2) **134** (1991), 545–607.

Rat91b M. Ratner, *Raghunathan's topological conjecture and distribution of unipotent flows*, Duke Math. J. **63** (1991), 235–280.

Rat95 M. Ratner, *Interaction between ergodic theory, Lie groups and number theory*, in *Proc. int. congress of mathematicians*, Zürich, 1994, vol. 1 (Birkhäuser, Basel, 1995), 157–182.

Sch66 L. Schwartz, *Théorie des distributions* (Hermann, Paris, 1966).

Ser77 J.-P. Serre, *Arbres, Amalgames,* SL_2, Astérisque **46** (1977).

Sha91 N. Shah, *Uniformly distributed orbits of certain flows on homogeneous spaces*, Math. Ann. **289** (1991), 315–334.

Wal85 J.-L. Waldspurger, *Sur les valeurs de certaines fonctions L automorphes en leur centre de symétrie*, Compositio. Math. **54** (1985), 173–242.

Wie85 F. Wielonsky, *Séries d'Eisenstein, intégrales toroïdales et une formule de Hecke*, Enseign. Math. (2) **31** (1985), 93–135.

Zha01 S. Zhang, *Gross-Zagier formula for* GL_2, Asian J. Math. **5** (2001), 183–290.

Laurent Clozel laurent.clozel@math.u-psud.fr
Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France

Emmanuel Ullmo emmanuel.ullmo@math.u-psud.fr
Laboratoire de Mathématiques, Université Paris-Sud, Bâtiment 425, 91405 Orsay cedex, France