Can. J. Math., Vol. XXXVII, No. 3, 1985, pp. 488-550

OPÉRATIONS EN K-THÉORIE ALGÉBRIQUE

CHRISTOPHE SOULÉ

Introduction. C'est pour étendre le théorème de Riemann-Roch à un morphisme projectif arbitraire que Grothendieck a introduit le groupe $K(X)$ (noté aujourd'hui $K_0(X)$), construit à l'aide des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres sur un schéma X[**14**]. La somme directe et le produit tensoriel de modules font de $K_0(X)$ un anneau, et les opérations de puissances extérieures lui fournissent une structure supplémentaire, que Grothendieck appelle λ-anneau. Un λ-anneau est muni d'une filtration décroissante, la γ-filtration, et un des principaux résultats de Grothendieck est que, si X est lisse sur un corps, le groupe

$$F_\gamma^i K_0(X)/F_\gamma^{i+1} K_0(X)$$

est isomorphe, à la torsion près, au groupe de Chow $CH^i(X)$ des cycles de codimension i sur X, modulo l'équivalence linéaire.

Le but de ce texte est d'étendre les résultats de Grothendieck aux groupes $K_m(X)$ définis par Quillen [**24**]. Si X est quasi-projective sur un schéma régulier (resp. si $X \to M$ est une immersion fermée de X dans un schéma régulier), on munit $K_m(X)$(resp. la K-théorie à support $K_m^X(M)$) d'une structure de $K_0(X)$-λ-algèbre (resp. $K_0^X(M)$). Le cas affine était déjà connu ([**15**] et [**16**]).

On utilise deux méthodes pour étudier cette λ-structure. La première, dans le cas affine $X = \mathrm{Spec}(A)$, consiste à utiliser des résultats sur l'homologie du groupe linéaire. C'est ainsi que les résultats de stabilité pour cette homologie [**33**] se reflètent sur $K_m(A)$ par une borne supérieure sur la longueur de la γ-filtration, en fonction de m et du rang stable de A (Théorème 1). Si A est un corps (ou un anneau local contenant un corps infini) le dernier cran de la γ-filtration correspond au premier défaut de stabilité qui est égal, grâce à un résultat de Suslin [**35**], à la K-théorie de Milnor $K_m^M(A)$ de l'anneau A, à torsion près (Théorème 2). Enfin on conjecture une borne inférieure pour le début de la γ-filtration (2.9; cette conjecture est due aussi à Beilinson [**5**]), dont on donne en 2.10 une traduction concernant l'homologie du groupe linéaire.

La deuxième méthode utilisée consiste à montrer des théorèmes de Riemann-Roch pour la K-théorie de Quillen. La technique suivie est celle

Reçu le 19 mars 1984.

de [**12**] et [**28**]. Le théorème de Riemann-Roch sans dénominateurs pour une immersion fermée (Théorème 3) a d'intéressantes conséquences. L'une d'elles est la dégénérescence de la suite spectrale de Quillen sur les trois premières diagonales à torsion près (Théorème 4), un résultat montré différemment par Schechtman [**28**] et utilisé par Merkurjev et Suslin [**21**]. Combinant ce résultat avec le Théorème 2, on obtient que, à torsion près, le groupe $CH^i(X)$ est égal à $H^i(X, \mathcal{K}_i^M)$ si X est une variété régulière sur un corps infini ($\mathcal{K}_i^M$ est le faisceau associé à la K-théorie de Milnor dans la topologie de Zariski) (Théorème 5; l'idée de ce résultat est due à Gillet). Le lien entre cycles algébriques et λ-structure semble s'étendre à la K-théorie de Quillen, grâce à la suite spectrale récemment introduite par S. Landsburg [**18**], dont on montre qu'elle converge vers la γ-filtration, à torsion près (Théorème 6).

Le théorème de Riemann-Roch avec dénominateurs étudie le comportement de la λ-structure par un morphisme projectif quelconque, modulo torsion (Théorème 7). Il permet de définir sur $K'_m(X) \otimes \mathbf{Q}$ (où K' est la K-théorie des faisceaux cohérents) une filtration croissante et covariante pour les morphismes projectifs notée F_j. D'après Beilinson [**5**], les théories

$$Gr_j K'_m(X) \otimes \mathbf{Q} \quad \text{et} \quad Gr^i_\gamma K^X_m(M) \otimes \mathbf{Q}$$

doivent être vues comme des théories d'homologie et de cohomologie "universelles", dont les propriétés sont étudiées dans le Théorème 9.

On donne pour finir une application à la p-torsion de la K-théorie d'un schéma régulier de caractéristique p (Théorème 10).

Les applications de la λ-structure en K-théorie sont d'ores et déjà nombreuses: comparaison entre K-théorie et cohomologie étale [**29**], K-théorie des variétés sur les corps finis [**30**], valeurs de fonctions zêta ([**5**], [**31**]).

Je tiens aussi à signaler que divers auteurs ont travaillé simultanément sur le sujet traité ici. H. Gillet m'a fait part de résultats non publiés (repris en particulier dans les Théorèmes 5 et 7). V. Shechtman a aussi étudié la λ-structure; il a montré récemment que les opérations d'Adams (et les caractères de Chern) peuvent s'étendre au délaçage connexe de la K-théorie; ses résultats ainsi que le Théorème 7 et 9 sont annoncés par Beilinson dans [**5**]. Enfin, dans [**13**], H. Gillet et l'auteur prévoient d'utiliser la K-théorie des schémas simpliciaux pour l'étude de la λ-structure en K-théorie de Quillen.

Je tiens à remercier O. Gabber, H. Gillet, J. Lannes, S. Lansburg, J-L. Loday, et L. Smith pour leur aide durant ce travail.

1. La λ-structure de la K-théorie d'un anneau.

1.1 Un λ-*anneau* R(appelé aussi λ-anneau spécial) est un anneau commutatif unitaire, muni d'applications $\lambda^k : R \to R$, $k \geqq 0$, vérifiant les propriétés suivantes:

$$\lambda^0(x) = 1, \lambda^1(x) = x$$

$$\lambda^k(x + y) = \sum_{i=0}^{k} \lambda^i(x)\lambda^{k-i}(y)$$

$$\lambda^k(1) = 0 \quad \text{si } k \geqq 2$$

$$\lambda^k(xy) = P_k(\lambda^1(x), \dots, \lambda^k(x); \lambda^1(y), \dots, \lambda^k(y))$$

$$\lambda^k(\lambda^l(x)) = P_{k,l}(\lambda^1(x), \dots, \lambda^{kl}(x)),$$

où P_k et $P_{k,l}$ sont des polynômes universels à coefficients entiers [**14**].

Soient N un entier, $N \geqq 1$, GL_N le schéma en groupe linéaire de rang N sur $\mathbf{Z}$, et $R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$ l'anneau de Grothendieck des représentations de GL_N définies sur $\mathbf{Z}$ (muni du produit tensoriel). Serre a montré [**27**] que $R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$, muni des opérations de puissances extérieures, est un λ-anneau. Plus précisément, si T_N est le sous-groupe diagonal de GL_N, le morphisme de restriction

$$R_{\mathbf{Z}}(GL_N) \to R_{\mathbf{Z}}(T_N)$$

est injectif et son image est le sous-groupe de $R_{\mathbf{Z}}(T_N)$ formé des invariants sous l'action du groupe symétrique Σ_N. Il en résulte que $R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$ est l'algèbre

$$\mathbf{Z}[\lambda^0(\mathrm{id}_N), \dots, \lambda^N(\mathrm{id}_N), \lambda^N(\mathrm{id}_N)^{-1}],$$

où $\lambda^k(\mathrm{id}_N)$ est la k-ième puissance extérieure de la représentation identique de id_N. L'unité de $R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$ est la représentation triviale $1 \in R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$.

Notons aussi que le λ-anneau $R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$ est muni d'une involution $x \mapsto \check{x}$, qui associe à une représentation la représentation duale. On a

$$\lambda^k(x)^\vee = \lambda^k(\check{x}) \quad \text{si } x \in R_{\mathbf{Z}}(GL_N),$$

et $\check{x} = x^{-1}$ quand x est la classe d'une représentation de rang un.

1.2. Soit A un anneau commutatif unitaire. On sait [**19**] que le produit tensoriel et les opérations de puissances extérieures munissent le groupe de Grothendieck $K_0(A)$ des A-modules projectifs de type fini d'une structure de λ-anneau. On va voir ([**15**], [**16**]) qu'on peut étendre cette λ-structure aux groupes $K_m(A)$, $m \geqq 0$, définis par Quillen ([**25**], [**19**]).

Une représentation

$$\rho: GL_N \to GL_M$$

du schéma en groupes GL_N induit un morphisme de groupes abstraits

$$GL_N(A) \to GL_M(A)$$

et donc une application entre espaces classifiants

$$BGL_N(A) \to BGL_M(A).$$

Si

$$GL(A) = \lim_{\overrightarrow{M}} GL_M(A)$$

désigne le groupe linéaire infini, $BGL(A)$ son espace classifiant, et $BGL(A)^+$ l'espace défini par Quillen **[25]**, on a des morphismes canoniques

$$BGL_M(A) \to BGL(A) \to BGL(A)^+.$$

On peut donc associer à ρ une application continue

$$\widetilde{\rho}: BGL_N(A) \to BGL(A)^+.$$

Deux représentations $\rho, \rho' : GL_N \to GL_M$ sont isomorphes si et seulement si elles sont conjuguées par un élément de $GL_M(\mathbf{Z})$ (**[17]**, Lemme 2.1). Il en résulte alors que $\widetilde{\rho}$ et $\widetilde{\rho}'$ sont homotopes **[19]**. Désignons par $[BGL_N(A), BGL(A)^+]$ l'ensemble des applications pointées, à homotopie près, de $BGL_N(A)$ dans $BGL(A)^+$. La structure de H-espace de $BGL(A)^+$ (donnée par la somme directe, **[19]**) munit cet ensemble d'une structure de groupe abélien. Si $0 \to \rho' \to \rho \to \rho'' \to 0$ est une suite exacte de reprèsentation, on montre **[16]** que $\widetilde{\rho}$ est homotope à la somme de $\widetilde{\rho}'$ et $\widetilde{\rho}''$ On obtient ainsi un morphism de groupes abeliens

$$R_{\mathbf{Z}}(GL_N) \to [BGL_N(A), BGL(A)^+].$$

L'inclusion standard $GL_N \to GL_{N+1}$ induit un morphisme de restriction compatibles au morphisme ci-dessus. On pose

$$R_{\mathbf{Z}}(GL) = \lim_{\overleftarrow{N}} R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$$

et

$$[BGL(A), BGL(A)^+] = \lim_{\overleftarrow{N}} [BGL_N(A), BGL(A)^+]$$

(classes d'homotopie faible d'applications continues pointées de $BGL(A)$ dans $BGL(A)^+$). D'après la propriété universelle de la construction + on a

$$[BGL(A), BGL(A)^+] = [BGL(A)^+, BGL(A)^+].$$

On obtient donc un morphisme canonique

$$r_A : R_{\mathbf{Z}}(GL) \to [BGL(A)^+, BGL(A)^+].$$

On appelle *opération naturelle sur les λ-anneaux* la donnée, pour tout λ-anneau R, d'une application

$$\tau : R \to R$$

telle que, si $\phi : R \to R'$ est un morphisme de λ-anneaux, on a $\tau \circ \phi = \phi \circ \tau$ ([2], Section 3). Si R est un λ-anneau muni d'une involution $x \mapsto \check{x}$ on a donc

$$\tau(\check{x}) = \tau^{\vee}(x).$$

On désigne par $\mathcal{T}$ la réunion disjointe de deux copies de l'ensemble des opérations naturelles sur les λ-anneaux, la première opérant sur R comme ci-dessus et la seconde par $x \mapsto \tau(\check{x})$. Si $\tau \in \mathcal{T}$, la restriction à $R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$ de l'élément $\tau(\mathrm{id}_{N+1} - (N + 1))$ de $R_{\mathbf{Z}}(GL_{N+1})$ est égale à

$$\tau(\mathrm{id}_N + 1 - (N + 1)) = \tau(\mathrm{id}_N - N).$$

La famille $(\tau(\mathrm{id}_N - N))$ est donc un élément de $R_{\mathbf{Z}}(GL)$. On pose

$$\tau_A = r_A((\tau(\mathrm{id}_N - N))) \in [BGL(A)^+, BGL(A)^+].$$

L'application τ_A induit, pour tout entier m, un morphisme

$$\tau : K_m(A) = \pi_m(BGL(A)^+) \to K_m(A).$$

Si $m = 0$ on note aussi

$$\tau : K_0(A) \to K_0(A)$$

l'application définie par τ sur le λ-anneau involutif $K_0(A)$.

1.4. Les opérations $\lambda^k \in \mathcal{T}$ induisent donc des morphismes

$$\lambda^k : K_m(A) \to K_m(A), \quad m \geqq 0.$$

D'après [**15**] et [**16**], ceci munit les groupes $K_m(A)$, $m \geqq 0$, d'une structure de $K_0(A)-\lambda$-algèbre. Autrement dit, si

$$K(A) = \bigoplus_{m \geqq 0} K_m(A)$$

est muni du produit nul entre deux éléments de degré positif et du produit usuel (induit par le produit tensoriel, [**19**]):

$$K_0(A) \times K_m(A) \to K_m(A),$$

les opérations λ^k font de $K(A)$ un λ-anneau. Ce λ-anneau est aussi muni d'une involution, induite par l'involution de $GL(A)$ qui envoie une matrice sur l'inverse de sa transposée. Tout ceci se vérifie en déduisant des identités sur $K(A)$ des mêmes identités sur $R_{\mathbf{Z}}(GL)$ (via r_A).

1.5. Outre les opérations λ^k, $\mathcal{T}$ contient les opérations γ^k définies par Grothendieck [**14**]:

$$\gamma^k(x) = \lambda^k(x + k - 1), \quad k \geqq 0,$$

et les opérations d'Adams ψ^k, $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$, définies par

$$\psi^k(x) = \psi^{-k}(\check{x}), \quad \text{et, si } k \geqq 1,$$

$$\psi^k - \lambda^1\psi^{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1}\lambda^{k-1}\psi^1 + (-1)^k k\lambda^k = 0.$$

On a $\gamma^0 = 1$, $\gamma^1 = \psi^1 = \mathrm{id}$, $\psi^k \circ \psi^{k'} = \psi^{kk'}$, et ψ^k est un endomorphisme de λ-anneaux.

Si A est un anneau commutatif unitaire, $K(A)$ admet une augmentation

$$\epsilon : K(A) \rightarrow \mathbf{Z}^{\pi_0(\mathrm{Spec}\, A)}$$

qui consiste à projeter $K(A)$ sur $K_0(A)$ et à associer à un A-module projectif de type fini son rang sur chaque composante connexe de $\mathrm{Spec}(A)$. On peut donc définir la γ-filtration du λ-anneau augmenté $K(A)$. On pose $F^0_\gamma K(A) = K(A)$, et, si $i \geqq 1$, on désigne par $F^i_\gamma K(A)$ le sous-groupe de $K(A)$ engendré par les produits

$$\gamma^{i_1}(x_1) \ldots \gamma^{i_\alpha}(x_\alpha)$$

où $\epsilon(x_1) = \ldots = \epsilon(x_\alpha) = 0$ et $i_1 + \ldots + i_\alpha \geqq i$.

On note

$$Gr^i_\gamma K(A) = F^i_\gamma K(A)/F^{i+1}_\gamma K(A)$$

le gradué associé à cette filtration.

Si $\tau \in \mathcal{T}$, l'action de τ sur $K(A)$ respecte la γ-filtration. L'action de τ sur $Gr^i_\gamma K(A)$ est la multiplication par une constante universelle $\omega_i(\tau) \in \mathbf{Z}$ [**29**]. On a

$$\omega_i(\psi^k) = k^i, \quad \omega_i(\lambda^k) = (-1)^{k-1}k^{i-1},$$

$$\omega_i(\gamma^i) = (-1)^{i-1}(i-1)!, \quad \omega_i(\gamma^k) = 0 \quad \text{si } i < k,$$

$$\omega_i(\gamma^k) \neq 0 \quad \text{si } k \leqq i$$

(pour la formule exacte, cf. [**16**] et [**29**]).

1.6. Loday [**19**] a défini un produit

$$K_m(A) \times K_n(A) \rightarrow K_{m+n}(A)$$

pour tout couple (m, n) d'entiers naturels. On a, pour ce produit,

$$\psi^k(xy) = \psi^k(x)\psi^k(y) \quad \text{si } k \in \mathbf{Z} - \{0\}, \text{ et}$$

$$\gamma^k(xy) = \sum_{k'+k''=k} -((k-1)!/(k'-1)!(k''-1)!)\gamma^{k'}(x)\gamma^{k''}(y)$$

si $mn \neq 0$. Si $'F^i_\gamma K_m(A)$ est le sous-groupe de $K_m(A)$ engendré par tous les produits de Loday

$$\gamma^{i_1}(x_1) \dots \gamma^{i_\alpha}(x_\alpha)$$

avec $\epsilon(x_1) = \dots = \epsilon(x_\alpha) = 0$, et $i_1 + \dots + i_\alpha \geqq i$, la filtration $'F^i_\gamma$ a les mêmes propriétés que celles décrites pour F^i_γ dans 1.5. Il en est de même, si $m \geqq 1$, pour la filtration $''F^i_\gamma K_m(A)$ obtenue en désignant par $''F^i_\gamma K_m(A)$ le sous-groupe de $K_m(A)$ engendré par les éléments $\gamma^j(x)$, $j \geqq i$. On en déduit que F^i_γ, $'F^i_\gamma$, et $''F^i_\gamma$ coïncident à torsion près (cf. [**16**]). Ceci indique que la γ-filtration n'est une bonne notion qu'à condition de négliger les groupes de torsion.

2. Longueur de la γ-filtration.

2.1. Soit A un anneau commutatif unitaire. Rappelons la définition du *rang stable* de A. C'est le plus petit des entiers r' qui ont la propriété suivante: si des éléments $a_1, \dots, a_{r'+1}$ de A vérifient

$$a_1A + \dots + a_{r'+1}A = A,$$

il existe des éléments $\lambda_1, \dots, \lambda_{r'}$ de A tels que, si l'on pose

$$b_1 = a_1 + \lambda_1 a_{r'+1}, \dots, b_{r'} = a_{r'} + \lambda_{r'} a_{r'+1},$$

on ait

$$b_1A + \dots + b_{r'}A = A.$$

Soit $r = r.s.A$ cet entier (s'il existe), et $r = +\infty$ sinon.

Par ailleurs, soient R un anneau commutatif unitaire et d un entier tels quel l'espace $\mathrm{Max}(R)$ des idéaux maximaux de R(muni de la topologie de Krull) est union finie de sous-espaces de dimension inférieure à d. On note $\dim \mathrm{Max}(R)$ le plus petit des entiers d vérifiant cette condition. Soit A une R-algèbre finie, on sait alors ([**3**], V, 3.5) que

$$r.s.A \leqq \dim \mathrm{Max}(R) + 1 \leqq \dim(A) + 1,$$

où $\dim(A)$ désigne la dimension de Krull de l'anneau A.

THÉORÈME 1. i) *Soit A une R-algèbre finie avec* $\dim \mathrm{Max}(R) < +\infty$. *Si $x \in K_0(A)$, $\epsilon(x) = 0$ et $k \geqq$* $\dim \mathrm{Max}(R) + 1$, *on a*

$$\gamma^k(x) = 0.$$

ii) *Soient A un anneau commutatif unitaire tel que $r.s.A < +\infty$ et $m \geqq 1$ un entier. Si $x \in K_m(A)$ et $k \geqq m + r.s.(A)$ on a*

$$\gamma^k(x) = 0.$$

2.2. *Preuve de* i). Désignons par $[P] \in K_0(A)$ la classe dans $K_0(A)$ du A-module projectif de type fini P. Tout élément x de $K_0(A)$ est de la forme

$$x = [P] - [A^n]$$

pour un certain module P. On a donc, si $\epsilon(x) = 0$,

$$x = x - \epsilon(x) = [P] - \epsilon[P].$$

D'après un théorème de Serre ([3], IV, Cor. 2.7), on peut écrire

$$[P] = [Q] + [A^m],$$

où Q est un A-module projectif de rang r inférieur ou égal à dim Max(R). On a donc

$$x = [Q] - r.$$

Par conséquent

$$\gamma^k(x) = \lambda^k([Q] + k - 1 - r).$$

Si $k \geqq r + 1$, l'élément $[Q] + k - 1 - r$ est la classe d'un module projectif de rang $k - 1$, et donc

$$\gamma^k([Q] + k - 1 - r) = 0.$$

2.3. Nous aurons besoin pour la démonstration du Théorème 1.ii) de la définition de la K-théorie de A due à Volodin (cf. par exemple [**33**]). Si $\sigma \in \Sigma_N$ est une permutation de l'ensemble à N éléments $\{1, \dots, N\}$, on note $T_N^\sigma(A)$ le sous-groupe de $GL_N(A)$ formé des matrices (g_{ij}) telles que $g_{ij} = 1$ et $g_{ij} = 0$, si $\sigma(i) > \sigma(j)$. On appelle $V_N(A)$ l'ensemble simplicial (et aussi sa réalisation géométrique) dont les n-simplexes sont les suites $(g_0, \dots, g_n)$ telles que: $g_i \in GL_N(A)$ et il existe $\sigma \in \Sigma_N$ avec, pour tout couple (i, j), $g_i g_j^{-1} \in T_N^\sigma(A)$. Les faces et dégénérescences de $V_N(A)$ sont données par oubli ou répétition d'une coordonnée. L'inclusion

$$GL_N(A) \to GL_{N+1}(A)$$

induit une application

$$V_N(A) \to V_{N+1}(A).$$

On pose:

$$V(A) = \lim_{\overrightarrow{N}} V_N(A)$$

et

$$K_m^V(A) = \pi_{m-1} V(A).$$

2.4. Suslin montre dans [**33**] que la K-théorie de Volodin définie ci-dessus coïncide avec celle de Quillen. Pour le voir, soient $EGL_N(A)$

l'ensemble simplicial dont les n-simplexes sont les suites $(g_0, \ldots, g_n)$, $g_i \in GL_N(A)$, et dont les faces et dégénérescences sont obtenues par oubli ou répétition d'une coordonnée, et $BGL_N(A)$ son quotient par l'action de $GL_N(A)$. Par définition de $V_N(A)$ on a un diagramme cartésien

$$\begin{array}{ccc} V_N(A) & \longrightarrow & EGL_N(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigcup_\sigma BT_N^\sigma(A) & \longrightarrow & BGL_N(A) \end{array}$$

et, après stabilisation,

$$\begin{array}{ccc} V(A) & \longrightarrow & EGL(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigcup_\sigma BT^\sigma(A) & \longrightarrow & BGL(A) \end{array}$$

Notons $\mathbf{Z}_\infty$ le foncteur de complétion entière d'un ensemble simplicial de Bousfield et Kan [7]. Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}_\infty V(A) & \longrightarrow & \mathbf{Z}_\infty EGL(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}_\infty(\bigcup_\sigma BT^\sigma(A)) & \longrightarrow & \mathbf{Z}_\infty BGL(A) \end{array}$$

est cartésien. On sait que $\mathbf{Z}_\infty BGL(A)$ est faiblement équivalent à $BGL(A)^+$. Comme $V(A)$ est un H-espace [**33**], l'application $V(A) \to \mathbf{Z}_\infty V(A)$ est une équivalence d'homotopie. Comme $EGL(A)$ est contractile il en est de même de $\mathbf{Z}_\infty EGL(A)$. Enfin Suslin montre dans [**33**], Théorème 7.1., que $\mathbf{Z}_\infty(\bigcup_\sigma BT^\sigma(A))$ est contractile. Il en résulte une équivalence d'homotopie faible

$$\Omega BGL(A)^+ \to V(A).$$

On voit donc que

$$K_m^V(A) = K_m(A) \quad \text{si } m \geqq 1.$$

2.5. Si $m \geqq 1$ posons

$$K_{m,N}(A) = \pi_{m-1}(V_N(A)).$$

Une représentation irréductible

$$\lambda : GL_N \to GL_M$$

du schéma en groupes GL_N est un produit tensoriel de puissances extérieures de la représentation identique [**27**]. Il en résulte que l'image par λ de T_N^σ est contenue dans un conjugué du groupe triangulaire standard. Donc λ induit une application

$$\lambda : V_N(A) \to V(A)$$

et des morphismes

$$\lambda_* : K_{m,N}(A) \to K_m(A), \quad m \geqq 1.$$

Si λ et μ sont isomorphes, elles sont conjuguées par un élément de $GL(A)$, donc $\lambda_* = \mu_*$. L'application $\lambda \mapsto \lambda_*$ s'étend donc au groupe $R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$ (puisque $K_m^V(A) = K_m(A)$ cela résulte de 1.2). Si $\rho \in R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$ a pour restriction $\rho' \in R_{\mathbf{Z}}(GL_{N-1})$ au groupe GL_{N-1}, la restriction de ρ_* à $K_{m,N-1}(A)$ est égale à ρ'_*. Si $\tau \in \mathscr{T}$ on peut donc définir

$$\tau : K_m(A) = \varinjlim_{N} K_{m,N}(A) \to K_m(A)$$

comme étant le morphisme induit par la famille de représentations virtuelles $(\tau(\mathrm{id}_N - N)) \in R_{\mathbf{Z}}(GL)$. Il est clair que cette définition coïncide avec celle donnée au paragraphe 1.2.

2.6. *Preuve du Théorème* 1, ii). Soit N un entier tel que le morphisme

$$K_{m,N}(A) \to K_m(A)$$

est surjectif. Si $k > N$ on a

$$\gamma^k(\mathrm{id}_N - N) = \lambda^k(\mathrm{id}_N - N + k - 1) = 0,$$

puisque $\mathrm{id}_N - N + k - 1$ est une (vraie) représentation de rang $k - 1$. Le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
K_{m,N}(A) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "\gamma^k(\mathrm{id}_N - N)"'] & & K_m(A) \arrow[dl, "\gamma^k"] \\
& K_m(A) &
\end{tikzcd}$$

montre donc que $\gamma^k = 0$. Or Suslin a montré [**33**] que

$$K_{m,N}(A) \to K_m(A)$$

est surjectif si $N \geqq m + r - 1$. Donc $\gamma^k = 0$ si $k > m + r - 1$.

2.7. Nous aurons à considérer plusieurs sous-catégories de Serre de la catégorie des groupes abéliens. La catégorie $\mathscr{S}_{\mathrm{tors}}$ est celle des groupes abéliens de torsion. La catégorie $\mathscr{S}$ est la catégorie des groupes abéliens d'exposant fini.

Si $n \geqq 1$ est un entier, la catégorie $\mathcal{S}_n$ est formée des groupes X tels qu'il existe un entier m avec:

$mx = 0$ si $x \in X$
si p est un nombre premier divisant m on a $p = 2$ ou $p < n$.

On a $\mathcal{S}_n \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{S}_{\text{tors}}$. On écrira parfois $X = Y$ (modulo torsion) au lieu de $X = Y$ (modulo $\mathcal{S}_{\text{tors}}$).

Remarquons que $X = Y$ (mod $\mathcal{S}_n$), $n \geqq 3$, implique

$$X \otimes \mathbf{Z}[1/(n-1)!] \simeq Y \otimes \mathbf{Z}[1/(n-1)!].$$

2.8. Désignons par $K_m(A)^{(i)}$ le sous-groupe de $K_m(A)$ formé des éléments x tels que $\psi^k(x) = k^i x$ pour tout entier $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$.

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du Théorème* 1, ii), *on a, en posant* $r = r.s.A < +\infty$,

$$K_m(A) = \bigoplus_{i=2}^{m+r-1} K_m(A)^{(i)} \quad (\textit{modulo } \mathcal{S}_{m+r-1}) \textit{ si } m \geqq 2, \textit{ et}$$

$$K_1(A) = \bigoplus_{i=1}^{r} K_1(A)^{(i)} \ (\textit{modulo } \mathcal{S}_{r+1}).$$

Preuve. Kratzer a montré ([**16**], cf. 2.9. ci-dessous) que

$$K_m(A) = {}''F_\gamma^2 K_m(A) \quad \text{si } m \geqq 2, \text{ et que}$$

$$K_1(A) = A^* \times {}''F_\gamma^2 K_1(A).$$

L'action de ψ^k sur A^* est la multiplication par k. On va voir que, modulo $\mathcal{S}_{m+r-1}$,

$${}''F_\gamma^2 K_m(A) = \bigoplus_{i=2}^{m+r-1} K_m(A)^{(i)}.$$

Si $i \geqq 1$ est un entier et N un entier assez grand par rapport à i on note

$$w_i = \underset{k \geqq 2}{\text{p.g.c.d.}}\ k^N(k^i - 1).$$

Cet entier ne dépend pas de N, il est pair et égal à 2 si i est impair. Quand i est pair, un nombre premier p divise w_i si et seulement si $p - 1$ divise i (cf. par exemple [**23**], Appendice).

Si $i \neq j$ sont deux entiers positifs, choisissons une famille finie d'entiers A_{ijk}, $k \geqq 2$, telle que

$$w_{|j-i|} = \sum_{k \geqq 2} A_{ijk}(k^i - k^j).$$

Considérons le morphisme composé

$$\phi: \bigoplus_{i=2}^{m+r-1} K_m(A)^{(i)} \to K_m(A) \to {}''F_\gamma^2 K_m(A).$$

On sait, d'après le Théorème 1, que $''F_\gamma^{m+r}K_m(A) = 0$. Par conséquent, pour toute suite d'entiers $k_j \neq 0$, $2 \leqq j \leqq m + r - 1$, on a l'identité suivante sur $''F_\gamma^2 K_m(A)$:

$$\prod_{j=2}^{m+r-1} (\psi^{k_j} - k_j^j) = 0.$$

Si $i \geqq 2$ on note Φ_i l'opérateur

$$\Phi_i = \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq i}}^{m+r-1} \left(\sum_{k \geqq 2} A_{ijk}(\psi^k - k^j) \right).$$

Si $x \in K_m(A)$ et $k \geqq 2$, l'élément

$$(\psi^k - k^i)\Phi_i(x)$$

est nul. Donc $\Phi_i(x) \in K_m(A)^{(i)}$.

Par ailleurs, si $x \in {}''F_\gamma^i K_m(A)$, $i \geqq 2$, on a

$$\Phi_i(x) \equiv \prod_{j \neq i} \left(\sum_{k \geqq 2} A_{ijk}(k^i - k^j) \right) x \text{ (modulo } {}''F_\gamma^{i+1} K_m(A)\text{)}.$$

Donc

$$\Phi_i(x) - \left(\prod_{j \neq i} w_{|i-j|} \right) x$$

est dans $''F_\gamma^{i+1} K_m(A)$.

Désignons par A_m le produit

$$A_m = \prod_{j \neq i} w_{|i-j|}$$

pris sur tous les couples $i \neq j$ d'entiers entre 2 et $m + r - 1$. On voit en utilisant ce qui précède et le fait que $''F_\gamma^{m+r}K_m(A) = 0$, que si $x \in K_m(A)$, l'élément $A_m x$ peut s'écrire comme une somme:

$$A_m x = \Phi_2(x_2) + \Phi_3(x_3) + \ldots + \Phi_{m+r-1}(x_{m+r-1}).$$

Donc le conoyau de ϕ est annulé par A_m.

Enfin, si $x \in K_m(A)^{(i)} \cap K_m(A)^{(j)}$, avec $i \neq j$, on a, pour tout entier $k \geqq 2$,

$$\psi^k(x) = k^i x = k^j x,$$

donc

$$(k^i - k^j)x = 0 \quad \text{et} \quad w_{|j-i|}x = 0.$$

Donc le noyau de ϕ est annulé par A_m.

De même $K_1(A)^{(1)} \cap K_1(A)^{(i)}$ est annulé par A_2.

D'après le paragraphe précédent, les nombres premiers p qui divisent A_m vérifient $p = 2$ ou $p < m + r - 1$. D'où l'énoncé.

Remarque. La preuve du corollaire ci-dessus montre aussi que, si $m \geqq 1$,

$$K_m(A) = \bigoplus_{i=1}^{m+r-1} {}''Gr_\gamma^i K_m(A) \text{ (modulo } \mathscr{S})$$

et que, sous les hypothèses du Théorème 1, ii), on a

$$K_m(A) = \bigoplus_{i=1}^{m+r-1} Gr_\gamma^i K_m(A) = \bigoplus_{i=1}^{m+r-1} {}'Gr_\gamma^i K_m(A) \text{ (modulo } \mathscr{S}).$$

2.9. *Minoration.* Il est clair que si $m > 0$ on a

$$K_m(A) = F_\gamma^1 K_m(A),$$

puisque $F_\gamma^1 = \mathrm{Ker}(\epsilon)$ et que l'augmentation ϵ se factorise par $K_0(A)$. Comme nous l'avons rappelé ci-dessus, C. Kratzer ([**16**], Cor. 6.8) a montré

PROPOSITION 1. *Si $m \geqq 2$, on a*

$$K_m(A) = F_\gamma^2 K_m(A), \quad \textit{et}$$

$$K_1(A) = A^* \times F_\gamma^2 K_1(A).$$

La preuve consiste à remarquer que, si $m \geqq 2$, on a

$$K_m(A) = \pi_m BE(A)^+,$$

et que

$$K_1(A) = A^* \times \pi_1 BE(A)^+,$$

où $E(A)$ désigne le groupe des matrices élémentaires.

On a $E(A) \subset SL(A)$, où

$$SL = \lim_{\overrightarrow{N}} SL_N$$

est le groupe spécial linéaire. Mais l'identité

$$\text{dét}(\mathrm{id}_N) = 1$$

dans $R_{\mathbf{Z}}(SL_N)$ s'écrit aussi

$$\gamma^1(\mathrm{id}_N - N) + \gamma^2(id_N - N) + \ldots + \gamma^N(\mathrm{id}_N - N) = 0.$$

D'où l'identité $\gamma^1 + \gamma^2 + \ldots = 0$ sur $K_m(A)$, $m \geqq 2$, qui permet de conclure puisque $\gamma^1(x) = x$.

Plus généralement, on peut faire la conjecture suivante, qui a aussi été formulée, indépendamment, par A. A. Beilinson [**5**]:

CONJECTURE. *Si* $m \geqq \operatorname{Sup}(2i - 1, 1)$ *on a*

$$K_m(A) = F^i_\gamma K_m(A) \text{ (modulo torsion)}.$$

2.10. La conjecture faite au paragraphe précédent aurait la conséquence suivante sur l'homologie du groupe linéaire. La somme directe et l'application diagonale munissent le **Q**-espace vectoriel

$$\bigoplus_{m \geqq 0} H_m(GL(A), \mathbf{Q})$$

d'une structure d'algèbre de Hopf. Si la conjecture ci-dessus est vraie pour A, l'image du morphisme de stabilisation

$$H_m(GL_N(A), \mathbf{Q}) \to H_m(GL(A), \mathbf{Q})$$

a une intersection nulle avec la partie primitive de $H_m(GL(A), \mathbf{Q})$, dès que $m \geqq 2N + 1$.

En effet, d'après le Théorème de Cartan-Milnor-Moore appliqué au H-espace $BGL(A)^+$ ([**24**], cf. aussi 3.3 ci-dessous) la partie primitive de $H_m(GL(A), \mathbf{Q})$ est l'image du groupe $K_m(A) \otimes \mathbf{Q}$ par le morphisme d'Hurewicz h. Soit $x \neq 0$ un élément de

$$h(K_m(A) \otimes \mathbf{Q}) \cap \operatorname{Im}(H_m(GL_N(A), \mathbf{Q}))$$

avec $m \geqq 2N + 1$. D'après la conjecture du paragraphe 2.9 on a

$$\gamma^k(x) \neq 0 \quad \text{quand } m \geqq \operatorname{Sup}(2k - 1, 1)$$

(cf. 1.5). Mais, si $N < k$, on a

$$\gamma^k(x) = \lambda^k(\mathrm{id}_N - N + k - 1)_*(x) = 0.$$

Comme $m \geqq 2N + 1$ il existe un entier k tel que $N < k$ et $m \geqq 2k - 1$. D'où une contradiction.

Remarque. Cette conjecture tire son origine du lien entre γ-filtration et classes de Chern (cf. par ex. [**13**]). Il se peut d'ailleurs que l'hypothèse $m \geqq \operatorname{Sup}(2i - 2, 1)$ (au lieu de $m \geqq \operatorname{Sup}(2i - 1, 1)$) suffise.

3. *K*-théorie des corps et des anneaux locaux.

3.1. Si A est un anneau commutatif unitaire on désigne par $K_i^M(A)$ les groupes de *K-théorie de Milnor* de l'anneau A définis comme suit: le groupe $K_i^M(A)$ est engendré par des symboles $\{x_1, \ldots, x_i\}$, $x_1, \ldots, x_i \in A^*$, soumis aux relations suivantes:

$$\{x_1, \ldots, x_j x'_j, \ldots, x_i\} = \{x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i\} + \{x_1, \ldots, x'_j, \ldots, x_i\}$$

$$\{x_1, \ldots, x, \ldots, 1 - x, \ldots, x_i\} = 0.$$

Si A est un anneau local (i.e., n'a qu'un seul idéal maximal) on a

$$K_1(A) = K_1^M(A) = A^*.$$

Comme la relation $x.(1 - x) = 0$ est vérifiée dans $K_2(A)$, si $x \in A^*$ et $1 - x \in A^*$([**22**, Lemma 9.8), le produit de Loday en K-théorie induit un morphisme

$$K_i^M(A) \to K_i(A).$$

L'image de ce morphisme est le sous-groupe Symb $K_i(A)$ des éléments "symboliques" de $K_i(A)$.

D'après le Théorème 1 (cf. 2.1), pour un anneau local A, on a

$$F_\gamma^{i+1} K_i(A) = 0,$$

car $r.s.A = 1$ et $K_0(A) = \mathbf{Z}$. Par ailleurs, si $x_1, \ldots, x_i \in K_1(A) = A^*$, on a (1.6):

$$\gamma^i(x_1 \ldots x_i) = \pm(i - 1)!\gamma^1(x_1) \ldots \gamma^1(x_i) = \pm(i - 1)!x_1 \ldots x_i.$$

Donc

$$(i - 1)! \text{ Symb } K_i(A) \subset F_\gamma^i K_i(A).$$

On va s'intéresser à l'inclusion inverse:

THÉORÈME 2. *Si A est un corps ou un anneau local contenant un corps infini, le morphisme $K_i^M(A) \to K_i(A)$ induit un isomorphisme*

$$K_i^M(A) \xrightarrow{\sim} F_\gamma^i K_i(A) \text{ (modulo } \mathcal{S}_i).$$

La preuve de ce résultat consiste à traduire un résultat de Suslin selon lequel la K-théorie de Milnor d'un corps est facteur direct de la K-théorie de Quillen (à un factoriel près). Suslin a donné deux démonstrations de ce résultat et chacune d'elles peut être utilisée comme on va le voir.

3.2. *Premiere methode, symboles de Mennicke.* Soit A un anneau noethérien de dimension de Krull d. On note $MS(A)$ le groupe engendré par les éléments $[a_1, \ldots, a_{d+1}]$, où les éléments $a_1, \ldots, a_{d+1}$ de A forment un vecteur unimodulaire, i.e.,

$$a_1A + \ldots + a_{d+1}A = A,$$

soumis aux relations suivantes:

$$[a_1, \ldots, a_{d+1}] = [a_1, \ldots, a_i + ta_j, \ldots, a_{d+1}] \text{ si } t \in A \text{ et } i \neq j$$

$$[a_1, \ldots, a_ia_i', \ldots, a_{d+1}] = [a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_{d+1}] + [a_1, \ldots, a_i', \ldots, a_{d+1}].$$

Ce groupe $MS(A)$ des symboles de Mennicke universels a été introduit par Suslin dans [**34**].

PROPOSITION 2. i) *Si A est comme ci-dessus, il existe un morphisme*

$$ms: K_1(A) \to MS(A)$$

et un morphisme

$$wt: MS(A) \to K_1(A)$$

qui rendent commutatif le diagramme:

$$\begin{tikzcd}
K_1A \arrow[rr, "\gamma^{d+1}"] \arrow[dr, "ms"'] & & K_1A \arrow[dr, "ms"] & \\
& MS(A) \arrow[ur, "wt"] \arrow[rr] & \arrow[u, phantom, "d!"] & MS(A)
\end{tikzcd}$$

ii) *Si F est un corps algébriquement clos, on a*

$$F_\gamma^i K_i F \subset \mathrm{Symb}(K_i F).$$

Preuve. i) Le fait que $ms \circ wt = d!$ est le Corollaire 2.6 de [**34**]. Par ailleurs soit $\alpha \in GL_{d+1}(A)$ et $\bar{\alpha}$ son image dans $K_1 A$. On a, par définition de ms,

$$ms(\bar{\alpha}) = e_1 \alpha,$$

où e_1 est le vecteur ligne $(1, 0, \ldots, 0)$. Donc, d'après 2.1 dans [**34**], on a

$$\begin{aligned} wt(ms(\bar{\alpha})) &= wt(e_1) + \sum_{i=0}^{d+1} (-1)^i \Lambda^i(\alpha) = \Lambda^{d+1}(\alpha - 1) \\ &= \Lambda^{d+1}(\alpha - (d+1) + d), \end{aligned}$$

i.e., compte tenu des définitions de 1.5,

$$wt(ms(\bar{\alpha})) = \gamma^{d+1}(\bar{\alpha}).$$

ii) Soit F un corps quelconque. Il existe un isomorphisme

$$\phi: K_i F \to SK_1(A_i),$$

où A_i est "l'anneau du cube"

$$A_i = F[X_1, \ldots, X_i]/(X_1^2 - X_1) \ldots (X_i^2 - X_i).$$

On va voir que ϕ préserve la λ-structure.

Considérons l'anneau simplicial $\Delta(F) = (\Delta_n(F))$ défini par

$$\Delta_n(F) = F[X_0, \ldots, X_n]/(X_0 + \ldots + X_n - 1)$$

et les faces et dégénérescences usuelles. On a des isomorphismes ([**1**], Section 2)

$$K_iF = \pi_i BGL^+(F) \xrightarrow{\alpha} KV_i(F)$$

$$= \pi_i BGL^+(\Delta(F)) \xleftarrow{\beta} \pi_i BGL(\Delta(F)) \xrightarrow{\gamma} \pi_{i-1} GL(\Delta(F)),$$

où KV_i désigne la K-théorie de Karoubi-Villamayor. Si N est un entier et

$$\rho : GL_N \to GL$$

une représentation du schéma en groupe GL_N, on associe à ρ des morphismes

$$\rho_* : \pi_* GL_N(\Delta(F)) \to \pi_* GL(\Delta(F))$$

et

$$\rho_* : \pi_* BGL_N(\Delta(F)) \to \pi_* BGL(\Delta(F)).$$

Le morphisme γ commute à ρ_* car il provient des fibrations

$$GL_N(P(F)) \to EGL_N(\Delta(F)) \to BGL_N(\Delta(F)).$$

De même α et β commutent à ρ_*.

Comme α, β et γ sont des isomorphismes on voit que si

$$0 \to \rho' \to \rho \to \rho'' \to 0$$

est une suite exacte de représentations on a

$$\rho_* = \rho'_* + \rho''_*.$$

Il en résulte qu'on peut définir ρ_* pour toute représentation virtuelle $\rho \in R_{\mathbf{Z}}(GL_N)$, et donc associer à tout élément $\tau \in \mathcal{T}$ une opération

$$\tau = \lim_{\overleftarrow{N}} \tau(\mathrm{id}_N - N)_*$$

sur chacun des groupes ci-dessus de façon compatible à α, β et γ.

Si A est anneau non nécessairement unitaire on note ΩA l'anneau sans unité $(X^2 - X)A[X]$, et $EA = XA[X]$. La suite exacte

$$(*)\ 0 \to \Omega F \to EF \to F \to 0$$

conduit à un isomorphisme

$$\pi_{i-1} GL(\Delta(F)) \to \pi_{i-2} GL(\Delta(\Omega F)), \quad i \geqq 2,$$

qui commute aux opérations τ. En itérant le procédé on obtient un isomorphisme

$$K_iF \to K_1(\Omega^{i-1}F)$$

qui commute à τ.

Par ailleurs si $0 \to A \to B \to C \to 0$ est une suite exacte d'anneaux (non nécessairement unitaires) il existe un morphisme bord

$$\partial : K_1 C \to K_0 A.$$

Pour voir que ∂ commute à τ on peut supposer que B et C ont une unité. Soit alors $A \oplus \mathbf{Z}$ l'anneau avec unité associé à A, et

$$\tilde{\partial} : K_1 C \to K_0(A \oplus \mathbf{Z})$$

le bord de la suite exacte de Mayer-Vietoris associée au carré cartésien

$$\begin{tikzcd} A \oplus \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \mathbf{Z} \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

Le morphisme $\tilde{\partial}$ se factorise par le morphisme

$$\partial : K_1 C \to K_0 A \overset{\text{déf.}}{=} \operatorname{Ker}(K_0(A \oplus \mathbf{Z}) \to K_0(\mathbf{Z})).$$

Or la définition de $\tilde{\partial}$, [**22**], p. 28, montre qu'il commute aux puissances extérieures, donc à τ. Par conséquent ∂ commute à τ.

Le morphisme

$$\phi : K_i F \to SK_1 A_i$$

s'obtient en composant les isomorphismes

$$K_i F \to K_1(\Omega^{i-1} F) \overset{\partial_1}{\to} K_0(\Omega^i F) \overset{\partial_2}{\leftarrow} SK_1 A_i$$

où ∂_1 est associé à la suite exacte $(*)$ et ∂_2 à la suite exacte

$$0 \to \Omega^i F \to F[X_1, \dots, X_i] \to A_i \to 0.$$

D'après ce qui précède le morphisme ϕ commute donc à τ.

On en déduit en particulier que ϕ induit un isomorphisme

$$F^i_\gamma K_i F = \gamma^i(K_i F) \to \gamma^i(K_1 A_i).$$

Par ailleurs Suslin montre dans [**34**], Section 4, que si $K_i^M F$ désigne la K-théorie de Milnor de F, l'application composée

$$K_i^M F \to K_i F \to SK_1 A_i$$

se factorise par wt:

$$K_i^M F \overset{u}{\to} MS(A_i) \overset{wt}{\to} SK_1 A_i.$$

D'après la partie i) du théorème, l'image de wt est contenue dans $\gamma^i(K_1(A_i))$, puisque $\dim A_i = i - 1$.

Pour voir que $\gamma^i(K_iF) \subset \mathrm{Symb}(K_iF)$ il suffit donc de savoir que u est surjectif. Suslin l'a montré quand F est algébriquement clos (loc. cit.)

Remarque. On pense que l'égalité

$$MS(A_i) = K_i^M(F)$$

est vraie pour tout corps F. Ce qui suit montre que c'est vrai modulo $\mathscr{S}_i$.

3.3. *Deuxième méthode, homologie du groupe lineaire.* Si F est un corps fini et $i \geqq 2$ on a $\mathrm{Symb}\, K_i(F) = 0$ (car $K_2(F) = 0$). Par ailleurs, l'action de γ^i sur $K_i(F)$ est le produit par $\omega_j(\gamma^i)$ si $i = 2j - 1$ (grâce à [**16**], Proposition 7.1). Donc si $i \geqq 2$, on a

$$\gamma^i(K_i(F)) = 0.$$

Si F est un corps infini, ce que nous supposerons désormais, Suslin a montré les résultats suivants [**35**]. Le groupe d'homologie à coefficients entiers $H_i(GL_i(F))$ est isomorphe (via le morphisme de stabilisation) à $H_i(GL(F))$.

Le quotient $H_i(GL_i(F))/H_i(GL_{i-1}(F))$ est isomorphe à $K_i^M(F)$. Soient

$$h:K_i(F) = \pi_i(BGL(F)^+) \to H_i(GL(F)) = H_i(GL_i(F))$$

le morphisme d'Hurewicz de $BGL(F)^+$ et

$$\phi:K_i(F) \to K_i^M(F)$$

le morphisme composé de h avec la projection

$$H_i(GL_i(F)) \to K_i^M(F).$$

L'application composée

$$K_i^M(F) \to K_i(F) \to K_i^M(F)$$

est, au signe près, la multiplication par $(i - 1)!$.

Les applications

$$\gamma^i(\mathrm{id}_N - N):BGL_N(F) \to BGL(F)^+$$

induisent des morphismes

$$\gamma^i:H_i(GL_N(F)) \to H_i(GL(F)).$$

Si $N = i - 1$ on a $\gamma^i(\mathrm{id}_N - N) = 0$, donc

$$\gamma^i:H_i(GL_{i-1}(F)) \to H_i(GL(F))$$

est l'application nulle.

Si $x \in K_i(F)$, il existe, d'après les résultats de Suslin rappelés ci-dessus, un élément $y \in \mathrm{Symb}(K_i(F))$ tel que $h((i - 1)!x - y)$ soit dans l'image de $H_i(GL_{i-1}(F))$. On en déduit que

$$h((i-1)!\gamma^i(x) - \gamma^i(y)) = \gamma^i(h((i-1)!x - y)) = 0.$$

Comme $\gamma^i(y) = (-1)^{i-1}(i-1)!y$ est un élément de $\mathrm{Symb}(K_i(F))$ il suffira, pour montrer le Théorème 2, de voir que le noyau de h est dans $\mathscr{S}_i$.

On sait que

$$BGL(F)^+ = BF^* \times BSL(F)^+,$$

donc pour étudier le morphisme d'Hurewicz pour $BGL(F)^+$ il suffit de le faire pour le H-espace simplement connexe $BSL(F)^+$. On peut alors utiliser le fait général suivant (qui étend un résultat de Cartan-Milnor-Moore [**24**]):

PROPOSITION 3. *Si X est un H-espace $(k-1)$-connexe avec $k \geqq 2$, le noyau du morphisme d'Hurewicz*

$$h:\pi_i(X) \to H_i(X)$$

est dans la catégorie $\mathscr{S}_n$, où n est la partie entière de $(i - k + 1)/2$.

Preuve de la Proposition 3. Cette preuve est due à L. Smith. Il s'agit de montrer que, si p est un nombre premier, si $i < k + 2p - 3$, et si $\mathbf{Z}_{(p)}$ désigne le localisé de $\mathbf{Z}$ en p, le morphisme d'Hurewicz

$$\pi_i(X) \otimes \mathbf{Z}_{(p)} \to H_i(X, \mathbf{Z}_{(p)})$$

est injectif (on montre de même que $\mathrm{Ker}(h)$ est dans $\mathscr{S}$).

Pour cela on remplace d'abord X par son localisé en p, au sens de Bousfield-Kan [**7**]. Considérons alors la tour de Postnikov de X:

$$\begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[dr] & X_{k+j} \arrow[d] \\ & X_{k+j-1} \arrow[d] \\ & \vdots \end{tikzcd}$$

$j \geqq 1$, $X_k = K(\pi_k(X), k)$.

On procède par récurrence sur j. Supposons que

$$X_{k+j-1} \simeq \prod_{i=1}^{j} K(\pi_{k+i-1}(X), k + i - 1)$$

où $\simeq$ désigne une équivalence d'homotopie (remarquons que c'est vrai si $j = 1$), et $k + j < k + 2p - 3$.

La fibration $X_{k+j} \to X_{k+j-1}$ a pour fibre $K(\pi_{k+j}(X), k + j)$ et c'est une fibration de H-espaces. Le k-invariant

$$\xi \in H^{k+j+1}(X_{k+j-1}, \pi_{k+j}(X))$$

qui classifie cette fibration est donc un élément primitif.

Le groupe $\pi_{k+j}(X)$ est, par hypothèse, p-local.

Un élément primitif de l'algèbre de Hopf p-locale $H^*(X_{k+j-1}, \pi_{k+j}(X))$ ne peut être décomposable que si c'est une puissance p-ième. Mais X_{k+j-1} est $(k - 1)$-connexe, $k \geqq 2$, et $k + j < k + 2p - 3$, donc

$$k + j + 1 - kp < k + 2p - 3 + 1 - kp$$
$$= (2 - k)(p - 1) \leq 0.$$

Par conséquent ξ n'est pas décomposable.

Mais Cartan a montré que si R est un anneau p-local toute classe de $H^*(K(\pi, n), R)$ est décomposable quand π est un groupe abélien et

$$n < * < n + 2(p - 1).$$

Donc $\xi = 0$. Il en résulte que X_{k+2p-4} est un produit d'espaces d'Eilenberg-Mac-Lane, donc que son morphisme d'Hurewicz est injectif et scindé. Comme l'application $X \to X_{k+2p-4}$ induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie, donc ceux d'homologie, en degrés $i < k + 2p - 3$, on voit que le morphisme d'Hurewicz

$$\pi_i(X) \to H_i(X)$$

est injectif et scindé quand $i < k + 2p - 3$.

Pour prouver le Théorème 2 dans le cas d'un anneau local qui contient un corps infini, on remarque que la preuve des résultats de Suslin [**34**] utilisés ci-dessus s'étend mot pour mot (cf. aussi [**32**]). Le reste de la preuve est identique.

4. Théorème de Riemann-Roch sans dénominateurs.

4.1. Soit X un schéma noethérien régulier de dimension de Krull finie. On désigne par $S(X)$ la catégorie des faisceaux simpliciaux sur X, i.e., la catégorie des faisceaux en ensembles simpliciaux. Un morphisme

$$f:\mathscr{F} \to \mathscr{G}$$

entre deux éléments de $S(X)$ est une *équivalence* si, pour tout $x \in X$, l'application sur les fibres

$$f_x:\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$$

induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie. Le morphisme f est une *fibration* si, pour toute inclusion $U \subset V$ d'ouverts de X, l'application naturelle

$$\Gamma(V, \mathscr{F}) \to \Gamma(V, \mathscr{G}) \underset{\Gamma(U,\mathscr{G})}{\times} \Gamma(U, \mathscr{F})$$

est une fibration (de Kan). Un faisceau simplicial est dit *flasque* (ou fibrant) si le morphisme $\mathscr{F} \to *$ de $\mathscr{F}$ vers le faisceau simplicial ponctuel est une fibration. Brown et Gersten ont montré ([**9**], Théorème 2) que $S(X)$, munie des notions ci-dessus, est une catégorie à modèle fermé ("closed model category") au sens de [**26**]. Il existe donc une catégorie homotopique associée, notée Ho $S(X)$. Ceci s'applique aussi à la catégorie $S_*(X)$ des faisceaux simpliciaux pointés. Si $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ sont dans $S_*(X)$ on notera $[\mathscr{F}, \mathscr{G}]$ l'ensemble des morphismes de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$, à homotopie pointée prés.

4.2. Si A est un anneau commutatif unitaire et $N \geqq 3$ un entier, on sait définir un ensemble simplicial $BGL_N(A)^+$ de façon fonctorielle en l'anneau A. Par exemple on peut choisir $BGL_N(\mathbf{Z})^+$ et appeler $BGL_N(A)^+$ l'espace

$$BGL_N(A)^+ = BGL_N(A) \underset{BGL_N(\mathbf{Z})}{\cup} BGL_N(\mathbf{Z})^+.$$

On dispose dès lors d'un préfaisceau simplicial sur X, dont les sections sur un ouvert $U \subset X$ est l'espace $BGL_N(\Gamma(U, \mathscr{O}_X))^+$. On désignera par $\mathbf{BGL}_N^+ \in S_*(X)$ le faisceau simplicial (pointé) associé à ce préfaisceau. De même on appelle

$$\mathbf{BGL}^+ = \lim_{\overrightarrow{N}} \mathbf{BGL}_N^+$$

le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto BGL(\Gamma(U, \mathscr{O}_X))^+.$$

La fibre en un point x de X du faisceau $\mathbf{BGL}_N^+$ est $BGL_N(\mathscr{O}_{X,x})^+$, où $\mathscr{O}_{X,x}$ désigne l'anneau local de X en x.

Notons $\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+$ le produit du faisceau constant $\mathbf{Z}$ par $\mathbf{BGL}^+$. Si $Y \subset X$ est une immersion fermée, la K-théorie de X à support dans Y:

$$K_m^Y(X) = \pi_{m+1}(\text{fibre}(BQP(X) \to BQP(X - Y)))$$

(où $BQP(X)$ est l'espace défini dans [**25**]) peut aussi se définir par

$$K_m^Y(X) = H_Y^{-m}(X, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+).$$

Autrement dit, si $\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+ \to \mathbf{K}$ est une équivalence et si $\mathbf{K}$ est flasque, on a

$$K_m^Y(X) = [S_Y^m, \mathbf{K}],$$

où S_Y^m est le faisceau constant des sphères de dimension m à support dans Y (cf. [**12**]).

Le théorème de localisation de Quillen montre qu'il existe un isomorphisme canonique

$$K'_m(Y) \simeq K_m^Y(X),$$

où $K'_m(Y)$ désigne la K-théorie des faisceaux cohérents sur Y ([**25**], [**12**], 2.14). En particulier, si Y est régulier (par exemple $Y = X$), on a un isomorphisme

$$K_m(Y) \simeq K_m^Y(X).$$

Nous aurons besoin du résultat suivant:

LEMME 1. *Le morphisme de stabilisation*

$$\lim_{\overrightarrow{N}} H_Y^{-m}(X, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_N^+) \to H_Y^{-m}(X, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+)$$

est un isomorphisme.

Preuve. D'après [**8**] si $\mathscr{P} \in S(X)$ il existe une suite spectrale $E_r^{pq}(\mathscr{P})$ telle que

$$E_2^{pq}(\mathscr{P}) = H_Y^p(X, \pi_{-q}\mathscr{P}) \quad \text{si } p + q \leqq 0,$$

et qui converge vers $H_Y^{p+q}(X, \mathscr{P})$, avec un effet de frange ("fringe effect") sur la diagonale $p + q = 0$. Comme la dimension de X est finie, et comme le morphisme

$$\pi_m(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_N^+) \to \pi_m(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+)$$

est un isomorphisme pour $N \geqq 2m + 1$ (stabilité pour la K-théorie d'un anneau local, voir [**33**]), on a

$$\lim_{\overrightarrow{N}} E_r^{pq}(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_N^+) = E_r^{pq}(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+).$$

Donc

$$\lim_{\overrightarrow{N}} H_Y^{-m}(X, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_N^+) \to H_Y^{-m}(X, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+)$$

est bijectif si $m > 0$ et injectif si $m = 0$.

Pour vérifier la surjectivité de cette application quand $m = 0$ on se ramène au cas où $Y = X$ grâce aux suites exactes

$$\ldots \to H_Y^{-m}(X, \mathscr{P}) \to H^{-m}(X, \mathscr{P}) \to H^{-m}(X - Y, \mathscr{P}) \to H_Y^{-m+1}(X, \mathscr{P}) \to \ldots .$$

Soit $[E] \in K_0(X)$ la classe d'un fibré de rang N sur X. Si $\mathscr{U}$ est un recouvrement Zariski de X trivialisant E et $N(\mathscr{U})$ le nerf de $\mathscr{U}$, E est classé par un morphisme de schémas simpliciaux

$$f: N(\mathscr{U}) \to BGL_N.$$

Le morphisme $N(\mathscr{U}) \to X$ induit des isomorphismes

$$H^0(X, \mathscr{P}) = H^0(N(\mathscr{U}), \mathscr{P}) = [S^0 \wedge N(\mathscr{U}), \mathscr{P}].$$

La classe de l'application f définit un élément de

$$[S^0 \wedge N(\mathscr{U}), \mathbf{Z} \times BGL_N^+] = H^0(X, \mathbf{Z} \times BGL_N^+)$$

dont l'image dans $K_0(X)$ est l'élément $[E]$.

4.3. La somme directe des matrices donne un accouplement de faisceaux

$$\mathbf{BGL}^+ \times \mathbf{BGL}^+ \to \mathbf{BGL}^+$$

qui est associatif et commutatif à homotopie près. Comme chaque fibre de $\mathbf{BGL}^+$ est connexe on en déduit (par la même argument qui prouve qu'un H-espace connexe est un H-groupe) qu'il existe un inverse

$$i: \mathbf{BGL}^+ \to \mathbf{BGL}^+$$

pour la loi de somme directe, bien défini dans $HoS(Y)$. Pour tout faisceau $\mathscr{F}$ de $S_*(Y)$, l'ensemble $[\mathscr{F}, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+]$ se trouve ainsi muni d'une structure de groupe abélien.

Si $\rho: GL_N \to GL_M$ est une représentation du schéma en groupes GL_N, elle induit un morphisme de faisceaux

$$\mathbf{BGL}_N \to \mathbf{BGL}_M$$

et donc, en composant avec $\mathbf{BGL}_M \to \mathbf{BGL} \to \mathbf{BGL}^+$, un morphisme

$$\mathbf{p}: \mathbf{BGL}_N \to \mathbf{BGL}^+.$$

Si ρ et ρ' sont isomorphes, i.e., conjugées par un élément $g \in GL_M(\mathbf{Z})$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{BGL}_N \arrow[rr, "\mathbf{p}"] \arrow[dr, "\mathbf{p}'"'] & & \mathbf{BGL}^+ \arrow[dl, "\mathbf{Int(g)}"] \\ & \mathbf{BGL}^+ & \end{tikzcd}$$

commute. Mais le morphisme de faisceaux $\mathbf{Int(g)}$ induit par la conjugaison par g est une équivalence (il induit un isomorphisme sur les groupes d'homotopie des fibres). Donc la classe $\mathbf{p}$ dans le groupe $[\mathbf{BGL}_N, \mathbf{BGL}^+]$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme de ρ. Ceci permet de définir un morphisme de groupes abéliens

$$R_{\mathbf{Z}}(GL_N) \to [\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_N^+, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+]$$

(dont la composante sur $\mathbf{Z}$ est donnée par le rang des représentations). On en déduit un morphisme

$$R_{\mathbf{Z}}(GL) \to \lim_{\overleftarrow{N}} \mathrm{Appl}(H_Y^{-m}(X, \mathbf{Z} \times BGL_N^+) \to K_m^Y(X))$$

i.e., d'après le Lemme 1 de 4.2, un morphisme

$$R_{\mathbf{Z}}(GL) \to \mathrm{Appl}(K_m^Y(X) \to K_m^Y(X)).$$

Une opération $\tau \in \mathscr{C}$ définit un élément

$$(\tau(\mathrm{id}_N - N))_N \in R_{\mathbf{Z}}(GL)$$

et donc une application

$$\tau: K_m^Y(X) \to K_m^Y(X).$$

On définit aussi une augmentation

$$\epsilon: K_m^Y(X) \to H_Y^0(X, \mathbf{Z})$$

qui est nulle si $m \neq 0$ et est induite par la projection de $\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+$ sur le facteur $\mathbf{Z}$ quand $m = 0$.

Notons aussi que le produit tensoriel définit un accouplement [**19**]:

$$\mu: (\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+) \times (\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+) \to \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+$$

(défini dans $HoS(X)$) et donc un produit

$$K_m^Y(X) \times K_n^Y(X) \to K_{m+n}^Y(X).$$

PROPOSITION 4. *Les groupes $K_m^Y m(X)$, munis des notions ci-dessus, sont des $K_0^Y(X)-\lambda$-algèbres augmentées avec involution.*

La preuve est la même que dans le cas affine (cf. 1.4 et [**16**], Section 5) et consiste à traduire sur $K_m^Y(X)$ des identités vraies sur $R_{\mathbf{Z}}(GL)$. On notera cependant que l'anneau $K_0^Y(X)$ n'est pas unitaire en général. L'énoncé de la proposition signifie que l'anneau

$$K^Y(X) = \bigoplus_{m \geqq 0} K_m^Y(X)$$

où le produit entre éléments homogènes de degrés non nuls est trivial, est un λ-anneau à involution non unitaire, et que ϵ est un morphisme de λ-anneaux. Autrement dit $K^Y(X)$ est muni d'opérations λ^k, $k \geqq 1$, vérifiant toutes les identités de 1.1 qui ne font pas intervenir l'unité (c'est une $\mathbf{Z}-\lambda$-algèbre, l'anneau unitaire associé $\mathbf{Z} \oplus K^Y(X)$ est un λ-anneau). On note $F_\gamma^i K_m^Y(X)$ la γ-filtration associée à cette λ-structure et à ϵ. Toutes les propriétés montrées dans le cas affine aux paragraphes 1.5 et 1.6 sont vraies pour $K^Y(X)$. Si $X = \mathrm{Spec}(A)$ est un schéma affine régulier, la λ-structure sur $K_m^X(X) = K_m(A)$ définie ici est la même que celle définie dans la Section 1.

4.4. On peut étendre les méthodes du paragraphe 2 aux groupes $K_m^Y(X)$.

PROPOSITION 5. *Si* $d = \dim(X)$ *et* $m \geqq 2$ *on a*

$$F_\gamma^2 K_m^Y(X) = \bigoplus_{i=2}^{m+d} K_m^Y(X)^{(i)} (\bmod \mathscr{S}_{m+d}).$$

De plus

$$F_\gamma^2 K_1^Y(X) = \bigoplus_{i=2}^{d+2} F_\gamma^2 K_1^Y(X)^{(i)} (\bmod \mathscr{S}_{d+2})$$

et

$$F_\gamma^2 K_0(X) = \bigoplus_{i=2}^{d} F_\gamma^2 K_0(X)^{(i)} \ (\bmod \mathscr{S}_d).$$

Preuve. Notons $\mathbf{V}_N$ (resp. $\mathbf{V}$) le faisceau simplicial pointé associé au préfaisceau

$$U \mapsto V_N(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$$

(resp. $V(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$). La preuve de 2.4 fournit un diagramme cartésien de $S_*(X)$

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Z}_\infty \mathbf{V} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{Z}_\infty \mathbf{EGL} \arrow[d] \\
\mathbf{Z}_\infty(\bigcup_\sigma \mathbf{BT}^\sigma) \arrow[r] & \mathbf{Z}_\infty \mathbf{BGL}
\end{tikzcd}$$

et une équivalence $\Omega\mathbf{BGL}^+ \to \mathbf{V}$. Posons

$$K_{m,N}^Y(X) = H_Y^{-m+1}(X, \mathbf{V}_N).$$

On a donc un morphisme de stabilisation

$$K_{m,N}^Y(X) \to K_m^Y(X).$$

Il est l'aboutissement d'un morphisme de suites spectrales de Brown [**8**]

$$E_2^{pq}(V_N) = H_Y^p(X, \pi_{-q}(\mathbf{V}_N)) \to E_2^{pq}(V) = H_Y^p(X, \pi_{-q}(\mathbf{V})).$$

D'après [**32**] le morphisme

$$\pi_{-q}(\mathbf{V}_N) \to \pi_{-q}(\mathbf{V})$$

est surjectif (resp. bijectif) si $N \geqq -q$ (resp. $N \geqq -q + 1$).

Donc, compte-tenu de l'effet de frange sur la diagonale $p + q = 0$, on voit que

$$K_{m,N}^Y(X) \to K_m^Y(X)$$

est surjectif (resp. bijectif, resp. injectif) si $m \geqq 2$ et $N \geqq m + d$ (resp. $m \geqq 2$ et $N \geqq m + d + 1$, resp. $m = 1$ et $N \geqq d + 2$).

De plus, si $N \geqq d + 2$, le morphisme

$$K_{1,N}^Y(X) \to K_1^Y(X)$$

est surjectif. Pour le voir on se ramène au cas $X = Y$ (cf. Lemme 1). Puis, écrivant X comme réunion de n ouverts affines, on se ramène au cas où X est affine par récurrence sur n, grâce aux suites exactes de Mayer-Vietoris

$$\begin{aligned} &.. \to H^{-m}(U \cup U', \mathscr{P}) \to H^{-m}(U, \mathscr{P}) \oplus H^{-m}(U', \mathscr{P}) \\ &\to H^{-m}(U \cap U', \mathscr{P}) \to H^{-m+1}(V' \cap U', \mathscr{P}). \end{aligned}$$

Quand $X = \operatorname{Spec}(A)$ on note que si $N \geqq d + 1$ le morphisme composé

$$\begin{aligned} K_{1,N}(A) &= \pi_0(V_N(A)) \to H^0(\operatorname{Spec}(A), \mathbf{V}_N) \to H^0(\operatorname{Spec}(A), \mathbf{V}) \\ &= K_1(A) \end{aligned}$$

est surjectif [**32**].

Ce qui précède montre que $\gamma^k(x) = 0$ si $x \in K_m^Y(X)$, $m \geqq 2$ et $k \geqq m + d + 1$ (resp. $m = 1$ et $k \geqq d + 3$). D'après [**14**]

$$F_\gamma^{d+1}K_0(X) = 0.$$

On en déduit la Proposition 5 comme dans le Corollaire 1 (2.8).

4.5. Soit R un λ-anneau et $N \in R$ un élément de rang $p > 0$:$\lambda^k(N) = 0$ si $k > p$ et $\lambda^p(N) \neq 0$. Grothendieck associe à ces données un λ-anneau R_N ([**14**], V, Section 5) défini comme suit. Le groupe additif de R_N est $\mathbf{Z} \times R$. Le produit est donné par les formules

$$x_N y = xy\lambda_{-1}(N), \quad x, y \in R,$$

où

$$\lambda_{-1}(N) = 1 - \lambda^1(N) + \lambda^2(N) \ldots + (-1)^p\lambda^p(N), \quad \text{et}$$

$$(1, 0)_N(n, x) = (n, x).$$

Les opérations sur R_N sont données par des formules universelles: $\lambda^k(N, x)$ est un polynôme à coefficients entiers en les $\lambda^i x$, $1 \leqq i \leqq k$, et les $\lambda^j(N)$, $1 \leqq j \leqq p$ (cf. loc. cit.). On a, dans R,

$$\lambda^k(N, x)\lambda_{-1}(N) = \lambda^k(x\lambda_{-1}(N))$$

et aussi

$$\gamma^k(N, x)\lambda_{-1}(N) = \gamma^k(x\lambda_{-1}(N)).$$

De façon générale on notera $\tau(N, x)$ la composante dans R de l'image de $(0, x) \in R_N$ par l'action de $\tau \in \mathscr{T}$.

Si $k \geqq 1$, désignons par $\theta^k(N) \in R$ l'image de N par l'opération cannibale θ^k ([**2**], [**20**]). On peut définir $\theta^k(N)$ à l'aide du principe de scindage: si R' est un λ-anneau contenant R où $N = L_1 + \ldots + L_p$ avec $\lambda^k(L_1) = \ldots = \lambda^k(L_p) = 0$, si $k \geqq 2$, on a, dans R',

$$\theta^k(N) = \prod_{i=1}^{p} (1 + L_i + \ldots + L_i^{k-1}).$$

Supposons que R et R' sont munis d'une involution qui envoie tout élément de rang un sur son inverse. On pose alors

$$\theta^{-1}(N) = (-1)^p \lambda^p(\psi^{-1}(N))$$

et

$$\psi^{-1}(N, x) = \psi^{-1}(x)\theta^{-1}(N).$$

Enfin on pose

$$\theta^{-k}(N) = \psi^k(\theta^{-1}(N))\theta^k(N) \quad \text{si } k \geqq 1.$$

LEMME 2. i) *Si* $x \in R$,

$$\psi^k(N, x) = \theta^k(N)\psi^k(x), \; k \in \mathbf{Z} - \{0\}.$$

ii) $\theta^k(N + N') = \theta^k(N) \cdot \theta^k(N')$

$$\theta^{kk'}(N) = \psi^k(\theta^{k'}(N)) \cdot \theta^k(N)$$

$$\epsilon(\theta^k(N)) = k^{\epsilon(N)}.$$

Preuve. i) Quitte à se placer dans la situation universelle, on peut supposer que R est intègre. Soit $R[[u]]$ l'anneau des séries formelles à une variable sur l'anneau R. On pose

$$\lambda_u(x) = \sum_{k \geqq 0} \lambda^k(x) u^k$$

$$\psi_u(x) = \sum_{k \geqq 1} \psi^k(x) u^k$$

$$\lambda_u(N, x) = \sum_{k \geqq 0} \lambda^k(N, x) u^k$$

$$\psi_u(N, x) = \sum_{k \geqq 1} \psi^k(N, x) u^k.$$

D'après [**14**], V. Section 7, on a

$$\lambda_{-u}(N, x)_N \psi_u(N, x) = -u\lambda'_{-u}(N, x).$$

Donc

https://doi.org/10.4153/CJM-1985-029-x Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}\psi_u(N, x) &= -u\lambda'_{-u}(N, x)/(\lambda_{-u}(N, x)\lambda_{-1}(N))\\ &= -u\lambda'_{-u}(x\lambda_{-1}(N))/(\lambda_{-u}(x\lambda_{-1}(N))\lambda_{-1}(N))\\ &= \psi_u(x\lambda_{-1}(N))/\lambda_{-1}(N).\end{aligned}$$

D'où, si $k \geqq 1$,

$$\psi^k(N, x) = \psi^k(x)(\psi^k(\lambda_{-1}(N))/\lambda_{-1}(N) = \theta^k(N)\psi^k(x).$$

L'opération $x \mapsto \psi^{-1}(N, x)$ est une involution car

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(N, \psi^{-1}(N, x)) &= \psi^{-1}(\psi^{-1}(x)\, \theta^{-1}(N))\theta^{-1}(N)\\ &= x\psi^{-1}(\theta^{-1}(N))\theta^{-1}(N) = x\end{aligned}$$

car $\theta^{-1}(N)$ est de rang un, donc $\psi^{-1}(\theta^{-1}(N))$ est l'inverse de $\theta^{-1}(N)$. Pour voir que c'est une involution de R_N il suffit de vérifier qu'elle commute aux opérations $\psi^k(N, \cdot)$, $k \geqq 1$.

Or on a, si $k \geqq 1$,

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(N, \psi^k(N, x)) &= \psi^{-1}(\theta^k(N)\psi^k(x))\theta^{-1}(N)\\ &= \psi^{-k}(x)\psi^{-1}(\theta^k(N))\theta^{-1}(N)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\psi^k(N, \psi^{-1}(N, x)) &= \psi^k(\theta^{-1}(N)\psi^{-1}(x))\theta^k(N)\\ &= \psi^{-k}(x)\psi^k(\theta^{-1}(N))\theta^k(N).\end{aligned}$$

Les éléments $\psi^{-1}(\theta^k(N))\theta^{-1}(N)$ et $\psi^k(\theta^{-1}(N))\theta^k(N)$ sont exponentiels en la variable N. Si $N = L$ est de rang un on trouve

$$\psi^{-1}(\theta^k(N))\theta^{-1}(N) = -(1 + L^{-1} + \ldots + L^{-k+1})L^{-1}$$

et

$$\psi^k(\theta^{-1}(N))\theta^k(N) = -L^{-k}(1 + L + \ldots + L^{k-1}).$$

On a donc égalité entre ces deux éléments ce qui prouve que $\psi^{-1}(N, \cdot)$ commute à $\psi^k(N, \cdot)$ et que i) est vrai si $k < 0$.

Enfin, il est clair que $\psi^{-1}(N, \cdot)$ respecte l'addition de R_N et de plus

$$\begin{aligned}\psi^{-1}(N, x_N y) &= \psi^{-1}(xy\lambda_{-1}(N))\theta^{-1}(N)\\ &= \psi^{-1}(x)\psi^{-1}(y)\psi^{-1}(\lambda_{-1}(N))\theta^{-1}(N)\\ &= (\psi^{-1}(N, x)_N\psi^{-1}(N, y))\lambda_{-1}(N)^{-1}\psi^{-1}\\ &\qquad (\lambda_{-1}(N))\theta^{-1}(N)^{-1}.\end{aligned}$$

Mais si $N = L$ est de rang un, on trouve

$$\lambda_{-1}(N)^{-1}\lambda_{-1}(\psi_{-1}(N))\theta^{-1}(N)^{-1} = (1 - L)^{-1}(1 - L^{-1})(-L) = 1,$$

donc

$$\psi^{-1}(N, x_N y) = \psi^{-1}(N, x)_N \psi^{-1}(N, y).$$

ii) est facile à vérifier grâce au principe de scindage. Notons que

$$\epsilon(\theta^{-1}(n)) = (-1)^p = (-1)^{\epsilon(N)}.$$

Remarque. D'après ([**14**], 0, Appendice, Prop. 1.5), si $i \geqq 0$ l'élément $\gamma^{p+i}(N, x)$ est dans $F_\gamma^i R$. Sa classe modulo $F_\gamma^{i+1} R$ est un polynôme en les variables $\epsilon(x), \lambda^1(x), \dots, \lambda^i(x), \lambda^1(N), \dots, \lambda^i(N)$. Enfin, si $x \in F_\gamma^i R$, on a

$$\gamma^{p+i}(N, x) - (-1)^{p+i-1}(p + i - 1)!x \in F_\gamma^{i+1} R.$$

4.6. Soient S un schéma régulier nœthérien de dimension de Krull finie, X et Y deux schémas réguliers de type fini sur S, et $j:Y \to X$ une immersion fermée définie sur S. Soit Z un sous-schéma fermé de Y. Le morphisme j induit des isomorphismes

$$j_*:K_m^Z(Y) \to K_m^Z(X)$$

(qui commute aux isomorphismes $K'_m(Z) \simeq K_m^Z(Y)$ et $K'_m(Z) \simeq K_m^Z(X)$).
Le Théorème de Riemann-Roch sans dénominateurs consiste à étudier l'effet de j_* sur les opérations τ définies en 4.3. On note $p = \operatorname{codim}_X(Y)$ la codimension de Y dans X, $N = N_{X/Y}$ la classe dans $K_0(Y)$ du fibré normal à Y dans X et

$$K^Z(Y) = \bigoplus_{m \geqq 0} K_m^Z(Y).$$

THÉORÈME 3. *Si $x \in K^Z(Y)$ et $\tau \in \mathscr{T}$ on a*

$$\tau(j_*(x)) = j_*(\tau(N, x)).$$

Preuve. On utilise comme dans [**4**] et [**12**] la déformation sur le cône normal. Soit W le schéma obtenu en éclatant

$$\mathbf{A}_X^1 = X \underset{S}{\times} \mathbf{A}_S^1$$

le long de $Y \times \{0\}$ (où $\mathbf{A}_S^1$ désigne la droite affine sur S). On a un diagramme (commutatif):

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A}_Y^1 \arrow[r, "\tilde{j}"] \arrow[d] \arrow[dr] & W \arrow[d, "\pi"] \\ Y & \mathbf{A}_S^1 \end{tikzcd}$$

où $\tilde{j}$ est une immersion fermée. On note j_t l'inclusion

$$Y \times \{t\} \to W_t = \pi^{-1}(t),$$

et i_t l'inclusion

$$Y \times \{t\} \to \mathbf{A}^1_Y.$$

D'après la propriété d'invariance homotopique de la K-théorie [**25**], les morphismes

$$i_t^*: K^Z(\mathbf{A}^1_Y) \to K^Z(Y)$$

sont tous des isomorphismes. Cela montre que si on vérifie l'énoncé pour j_0 il sera vrai pour l'immersion $\tilde{j}$ et donc pour l'immersion j_t, $t \neq 0$. Mais si $t \neq 0$ on a $W_t = X \times \{t\}$ et l'immersion j_t coïncide avec l'immersion j. Donc il suffit de montrer le théorème pour j_0, c'est-à-dire dans le cas où $j: Y \to X$ est la section nulle d'un fibré vectoriel $f: X \to Y$.

Sous les hypothèses précédentes notons

$$f^*: K^Z(X) \to K^{f^{-1}(Z)}(X)$$

le morphisme de corestriction associé à f,

$$j_*^Y: K(Y) \to K^X(X) \quad (\text{resp.}\ \tilde{j}_*: K(Y) \to K(X))$$

les morphismes d'image directe associés à j, et

$$j^*: K(X) \to K(Y)$$

la corestriction associée à j. On sait que $j^*\tilde{j}_*(1) = \lambda_{-1}(N)$ [**14**]. Il en résulte que

$$j_*: K^Z(Y)_N \to K^Z(X)$$

est un morphisme d'anneau, car

$$\begin{aligned} j_*(x_N y) &= j_*(xy\lambda_{-1}(N)) = f^*(x)j_*(y\lambda_{-1}(N)) \\ &= f^*(x)j_*(y)\tilde{j}_*(1) = j_*(x)j_*(y). \end{aligned}$$

Si l'on sait que

$$\lambda_u(j_*^Y(1)) = j_*^Y(\lambda_u(N, 1))$$

on en déduit, en notant $\circ$ le produit de [**14**], 0, App., I.1, que

$$\begin{aligned} \lambda_u(j_*(x)) &= \lambda_u(f^*(x)j_*^Y(1)) = \lambda_u(f_*(x)) \circ \lambda_u(j_*^Y(1)) \\ &= f^*(\lambda_u(x)) \circ j_*^Y(\lambda_u(N, 1)) = j_*(\lambda_u(x) \circ \lambda_u(N, 1)) \\ &= j_*(\lambda_u(N, x)), \end{aligned}$$

i.e., j_* est un morphisme de λ-anneau. Enfin, si

$$\psi^{-1}(j_*^Y(1)) = j_*^Y(\theta^{-1}(N)),$$

on a

$$\psi^{-1}(j_*(x)) = \psi^{-1}(f^*(x)j_*^Y(1)) = \psi^{-1}(f^*(x))\psi^{-1}(j_*^Y(1))$$

$$= f^*(\psi^{-1}(x))j_*^Y(\theta^{-1}(N)) = f^*(\psi^{-1}(x)\theta^{-1}(N))j_*^Y(1)$$
$$= j_*(\psi^{-1}(x)\theta^{-1}(N)) = j_*(\psi^{-1}(N, x)).$$

On est donc ramené à montrer que $\tau(j_*(1)) = j_*(\tau(N, 1))$ quand $\tau \in \mathcal{T}$, $Y = X$, et X est l'espace total d'un fibré vectoriel $\mathcal{N}$ sur Y, dont j est la section nulle. Soient alors $P = P(\mathcal{N} \oplus 1)$ l'espace projectif sur Y associé à $\mathcal{N} + 1$, et $\varphi: X \to P$, $p: P \to Y$ et $\sigma: Y \to P$ les flèches évidentes. Comme φ est une immersion ouverte, si on désigne par

$$\epsilon: K_0^Y(P) \to K_0(P)$$

le morphisme d'oubli du support et par

$$\tilde{\sigma}_* = \epsilon \circ \sigma_*: K_0(Y) \to K_0(P)$$

le morphisme d'image directe (sans support) associé à la section σ, on a

$$\tau(j_*(1)) = \tau(\varphi^*\sigma_*(1)) = \varphi_*\tau(\sigma_*(1)) = \varphi^*\sigma_*p_*\epsilon\tau(\sigma_*(1))$$
$$= j_*p_*\tau(\tilde{\sigma}_*(1)).$$

Il suffit donc de montrer que

$$p_*\tau(\tilde{\sigma}_*(1)) = \tau(N, 1).$$

Pour cela on remarque que $p_*\tau(\tilde{\sigma}_*(1))$ est un polynôme universel à coefficients entiers en les $\lambda^k(N)$ et $\lambda\, k(\check{N})$, $k \geq 0$. Pour calculer ce polynôme on peut soit supposer que Y est une variété lisse sur un corps de caractéristique zéro et conclure par [**14**], 0, Appendice, soit se ramener par scindage au cas où $\mathcal{N}$ est de rang un. Si $\tilde{j}_*: K(Y) \to K(X)$ est le morphisme d'image directe associé à j, et si $L = f^*(N) \in K(X)$, on a alors

$$\tau\tilde{j}_*(1) = \tilde{j}_*(p_*\tau(\tilde{\sigma}_*(1))) \quad \text{et} \quad \tilde{j}_*(1) = 1-L,$$

d'où

$$\lambda_u(\tilde{j}_*(1)) = \lambda_u(1-L) = 1-uL$$
$$= \lambda_u(L, 1)(1-L) = f^*(\lambda_u(N, 1))\tilde{j}_*(1)$$
$$= \tilde{j}(\lambda_u(N, 1))$$

et de même

$$\psi^{-1}(\tilde{j}_*(1)) = 1-L^{-1} = L^{-1}(1-L)$$
$$= \theta^{-1}(L)\tilde{j}_*(1) = \tilde{j}_*(\theta^{-1}(N)).$$

5. Conséquences du théorème de Riemann-Roch sans dénominateurs.

5.1. *Transfert.*

PROPOSITION 6. *Soit $f: X \to Y$ un morphisme fini étale entre schémas* *réguliers, nœthériens et de dimensions finies. On suppose que f se factorise par une immersion fermée dans la droite affine A^1_Y. On a alors, si $x \in K_m(X)$ et $k \in \mathbf{Z} - \{0\}$,*

$$k\psi^k(f_*(x)) = kf_*(\psi^k(x))$$

et, si $k \geqq 1$, l'élément

$$k\gamma^k(f_*(x)), \ -kf_*(\gamma^k(x))$$

est dans $f_*(F^{k+1}_\gamma K_m(X))$.

Preuve. On procède comme dans [**12**], Cor. 3.12. Soit

$$X \xrightarrow{j} \mathbf{P}^1_Y \xrightarrow{p} Y$$

une factorisation de f par une immersion fermée de X dans la droite projective sur Y dont l'image ne rencontre pas celle de la section à l'infini

$$j_\infty : Y \to \mathbf{P}^1_Y$$

de la projection p. Puisque le fibré normal à $j(X)$ est trivial, on a, d'après le Théorème 3,

$$\psi^k(j_*(x)) = j_*(\psi^k(x)\theta^k(1)) = kj_*(\psi^k(x)),$$

et

$$\gamma^{k+1}(j_*(x)) = j_*(\gamma^{k+1}(1, x)) \equiv -kj_*(\gamma^k(x)), \text{ modulo } j_*F^{k+1}_\gamma K(X)$$

(cf. 4.4, Remarque).

Par ailleurs, si on pose $\bar{x} = f_*(x)$, on a ([**12**], loc. cit.)

$$j_*(x) = j_{\infty *}(\bar{x}).$$

La formule de projection montre que

$$j_{\infty *}(\bar{x}) = p^*(\bar{x})j_{\infty *}(1).$$

Le fibré normal à $j_\infty(Y)$ est trivial donc

$$\begin{aligned} p_*(\psi^k(j_{\infty *}(\bar{x}))) &= p_*(p^*\psi^k(\bar{x})j_{\infty *}(k\psi^k(1))) \\ &= k\psi^k(\bar{x}) = k\psi^k(f_*(x)). \end{aligned}$$

L'élément $j_{\infty *}(1)$ est la classe du fibré canonique sur $\mathbf{P}^1_Y$ et

$$\gamma^k(j_{\infty_*}(1)) = 0 \quad \text{si } k > 1 \text{ [\mathbf{14}]}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \gamma^{k+1}(j_{\infty *}(\bar{x})) &= \gamma^{k+1}(p^*(\bar{x})\, j_{\infty *}(1)) \\ &= \gamma^{k+1}(p^*(\bar{x})) - k\gamma^k(p^*(\bar{x}))\gamma^1(j_{\infty *}(1)), \quad \text{et} \end{aligned}$$

$$p_*(\gamma^{k+1}(j_{\infty *}(\bar{x}))) = -k\gamma^k(\bar{x})p_*(j_{\infty *}(1)) = -k\gamma^k(\bar{x}).$$

La proposition ci-dessus montre en particulier que le morphisme f_* respecte la γ-filtration modulo $\mathcal{S}$. Elle s'applique par exemple quand X est défini sur un corps k et

$$Y = X \bigotimes_{\mathrm{Spec} k} \mathrm{Spec}\, k',$$

où k' est une extension finie séparable de k.

5.2. *Suite spectrale de Gersten-Quillen*. Soient X un schéma noethérien régulier de dimension de Krull finie $d = \dim(X)$, $X^{(p)}$ l'ensemble des points de X de codimension $p \geqq 0$, $k(x)$ le corps résiduel en x. D. Quillen montre dans [**25**] qu'il existe une suite spectrale $E_r^{pq}(X)$ convergeant vers $K_{-p-q}(X)$ et dont le terme $E_1^{pq}(X)$ est nul si $p + q > 0$ et est donné, pour $p + q \leqq 0$, par la formule

$$E_1^{pq}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_{-p-q}(k(x)).$$

THÉORÈME 4. i) *Pour toute opération $\tau \in \mathscr{T}$ il existe une application entre suites spectrales*

$$E_r^{pq}(\tau): E_r^{pq}(X) \to E_r^{pq}(X)$$

convergeant vers

$$\tau: K_{-p-q}(X) \to K_{-p-q}(X).$$

ii) *Si $x \in X^{(p)}$, $\alpha \in K_{-p-q}(k(x))$ et $\tau \in \mathscr{T}$, on a, avec les notations de* 4.4

$$E_1^{pq}(\tau)(\alpha) = \tau(p, \alpha).$$

iii) *Si $i \geqq 2$ est un entier et $m \geqq i$, il existe, modulo $\mathscr{S}_{m+d}$, une suite spectrale $'E_r^{pq}(X)$ telle que*

$$'E_1^{pq}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_{-p-q}(k(x))^{(i-p)} \quad si\ -m \leqq p + q \leqq 0$$

et $'E_1^{pq}(X) = 0$ sinon. Elle converge vers $K_{-p-q}(X)^{(i)}$ si $-p - q < m$ (modulo $\mathscr{S}_{m+d}$).

iv) *On a*

$$K_0(X) = E_1^{00}(X) \oplus E_2^{1,-1}(X) \oplus F_\gamma^2 K_0(X),$$
$$K_1(X) = E_2^{0,-1}(X) \oplus F_\gamma^2 K_1(X),$$

et, si $m \geqq 2$,

$$K_m(X) = F_\gamma^2 K_m(X).$$

De plus,

$$K_0(X) = \bigoplus_{p=0}^{d} E_2^{p,-p}(X) \ (\textit{modulo } \mathscr{S}_d)$$

$$K_1(X) = \bigoplus_{p=0}^{d} E_2^{p,-p-1}(X) \ (\textit{modulo } \mathscr{S}_{d+2})$$

$$K_2(X) = \bigoplus_{p=0}^{d} E_2^{p,-p-2}(X) \ (\textit{modulo } \mathscr{S}_{d+2}).$$

Preuve. i) D'après [**12**], 3.8, la suite spectrale de Quillen est obtenue en filtrant par le coniveau la cohomologie de X. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau simplicial sur X il existe une suite spectrale $E_r^{pq}(\mathcal{F})$ convergeant vers $H^{p+q}(X, \mathcal{F})$ et dont le terme $E_1^{pq}(\mathcal{F})$ est donné, si $p + q \geqq 0$, par

$$E_1^{pq}(\mathcal{F}) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H_x^{p+q}(X, \mathcal{F}),$$

où

$$H_x^{-m}(X, \mathcal{F}) = \pi_m(\varinjlim_{x \in U} R\Gamma_{\bar{x} \cap U}(U, \mathcal{F}))$$

(la limite étant prise sur les ouverts U de X qui contiennent x). Cette suite spectrale est contravariante en la variable $\mathcal{F}$. La suite spectrale de Quillen s'obtient en prenant

$$\mathcal{F} = \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+.$$

Les opérations

$$\tau : \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_M^+ \to \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+$$

induisent donc, grâce au Lemme 1, un endomorphisme de la suite spectrale $E_r^{pq}(X)$ qui converge vers l'action de τ sur $K_{-p-q}(X)$.

ii) L'identification de $E_1^{pq}(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+)$ avec

$$E_1^{pq}(X) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_{-p-q}(k(x))$$

se fait comme suit. Si U est un voisinage assez petit de x, il est régulier et le fibré normal à $\bar{x} \cap U$ dans U est trivial. On a donc des isomorphismes

$$\varinjlim_{x \in U} K_m^{\bar{x} \cap U}(U) \simeq \varinjlim_{x \in U} K_m(\bar{x} \cap U) = K_m(k(x)).$$

Si U est assez petit l'isomorphisme

$$K_m^{\bar{x} \cap U}(U) \simeq K_m(\bar{x} \cap U)$$

est induit par l'immersion fermée $\bar{x} \cap U \to U$ de codimension p et de fibré normal trivial. Donc cet isomorphisme envoie $\tau(\alpha)$ sur $\tau(p, \alpha)$ (Théorème 2).

iii) D'après ii), l'action $E_r(\psi^k)$ des opérations d'Adams sur $E_r^{pq}(X)$ vérifie

$$E_1(\psi^k) = \psi^k(p, \cdot) = k^p \psi^k$$

sur $K_{-p-q}(k(x))$. Les groupes $K_m(k(x))$ sont munis de la γ-filtration F_γ^i et

$$F_\gamma^{m+1} K_m(k(x)) = 0$$

(Théorème 1). De plus, si $m \geqq 2$,

$$K_m(k(x)) = F_\gamma^2 K_m(k(x))$$

(Proposition 1). Si on munit le sous-quotient $E_r^{pq}(X)$ de $E_1^{pq}(X)$ de la filtration induite par F_γ^i on a donc

$$E_r^{pq}(X) = F_\gamma^2 E_r^{pq}(X) \quad \text{si } p + q \leqq -2$$

et

$$F_\gamma^{-p-q+1} E_r^{pq}(X) = 0.$$

Si $x \in F_\gamma^i E_r^{pq}(X)$ l'élément

$$E_r(\psi^k)(x) - k^{p+i}x$$

est dans $F_\gamma^{i+1} E_r^{pq}(X)$. Donc, pour toute suite d'entiers k_j,

$$\prod_{i=2}^{-p-q} (E_r(\psi^{k_i}) - k_i^{p+i}) = 0$$

sur $E_r^{pq}(X)(-p - q \geqq 2)$. Si $E_r^{pq}(X)^{(i)}$ est le sous-groupe de $E_r^{pq}(X)$ où toutes les opérations ψ^k, $k \in \mathbf{Z}$, opèrent par multiplication par k^i, on a

$$E_1^{pq}(X)^{(i)} \simeq \bigoplus_{x \in X^{(p)}} K_{-p-q}(k(x))^{(i)}$$

et, par les arguments du Corollaire 1 (2.8), on a

$$E_r^{pq}(X) = \bigoplus_{i=p+2}^{-q} E_r^{pq}(X)^{(i)} \text{ (modulo } \mathscr{S}_{-p-q}).$$

De plus, l'image par la différentielle

$$d_r : E_r^{pq}(X) \to E_r^{p+r,q-r+1}(X)$$

d'un élément $\alpha \in E_r^{pq}(X)^{(i)}$ vérifie

$$E_r(\psi^k)(d_r(\alpha)) = d_r(E_r(\psi^k)(\alpha)) = k^i d_r(\alpha).$$

Donc

$$d_r(E_r^{pq}(X)^{(i)}) \subset E_r^{p+r,q-r+1}(X)^{(i)}.$$

Les groupes $E_r^{pq}(X)^{(i)}$ si $-p - q \leqq m$, et 0 sinon, définissent ainsi une suite spectrale $'E_r^{pq}(X)$ qui est facteur direct de $E_r^{pq}(X)$ (modulo $\mathscr{S}_{-p-q}$).

D'après la Proposition 5 on a

$$\prod_{i=2}^{-p-q+d} (\psi^{k_i} - k_i^i) = 0$$

sur $F_\gamma^2 K_{-p-q}(X)$ et, modulo $\mathscr{S}_{-p-q+d}$, on a des suites exactes, si $i \geqq 2$,

$$0 \to F^{p+1}K_{-p-q}(X)^{(i)} \to F^p K_{-p-q}(X)^{(i)} \to E_\infty^{pq}(X)^{(i)} \to 0.$$

L'aboutissement de $'E_r^{pq}(X)$ est donc égal à $K_{-p-q}(X)^{(i)}$ si $-p - q < m$ (modulo $\mathcal{S}_{m+d}$).

iv) Le déterminant fournit une section

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+ \to \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_1$$

au morphisme de faisceaux simpliciaux

$$\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_1 \to \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+$$

donné par stabilisation. La suite spectrale de coniveau pour $\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_1$ vérifie

$$E_r^{pq}(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_1) = 0 \text{ si } |p| + |q| > 1$$

et

$$E_r^{pq}(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}_1) \simeq E_r^{pq}(X)$$

sinon. On a donc des isomorphismes:

$$K_0(X) = E_1^{00}(X) \oplus E_2^{1,-1}(X) \oplus SK_0(X),$$

$$K_1(X) = E_1^{0,-1}(X) \oplus SK_1(X),$$

$$K_m(X) = SK_m(X), \quad \text{si } m \geqq 2,$$

où par définition,

$$SK_m(X) = H^{-m}(X, \mathbf{BSL}^+).$$

Mais, d'après Kratzer (**[16]** et 2.9 ci-dessus) on a l'identité

$$\gamma^1 + \gamma^2 + \ldots = 0$$

sur $SK_m(X)$, d'où

$$SK_m(X) = F_\gamma^2 K_m(X).$$

Par ailleurs, si $p + q = 0, -1$ ou -2, on sait que ψ^k opère sur $K_{-p-q}(k(x))$ par multiplication par k^{-p-q}. Donc $E_r(\psi^k)$ est la multiplication par k^{-q} sur $E_r^{pq}(X)$ (quand $-p - q \leqq 2$). Si $\alpha \in E_r^{pq}(X)$ on a donc

$$k^{-q+r-1} d_r(\alpha) = k^{-q} d_r(\alpha)$$

et donc

$$w_{r-1} d_r(\alpha) = 0$$

(cf. 2.8). On sait aussi, par ce qui précède, que

$$d_r(\alpha) = 0 \text{ si } \alpha \in E_r^{0,-1}(X) \text{ et } r \geqq 2.$$

Les seules différentielles éventuellement non nulles de $E_r^{p-r,-p+r-1}(X)$ vers $E_r^{p,-p}(X) (r \geqq 2)$ vérifient $r \leqq p - 1$ et W_{r-1} n'est alors divisible que par les nombres premiers l tels que $l = 2$ ou $l < p - 1$. Donc, modulo $\mathscr{S}_{p-1}$, on a

$$E_2^{p,-p}(X) = E_\infty^{p,-p}(X).$$

La filtration de $SK_0(X)$ définie par la suite spectrale de Quillen est triviale modulo $\mathscr{S}_d$ pour la même raison, puisque

$$F_\gamma^{d+1}K_0(X) = 0.$$

Les mêmes arguments montrent que les différentielles issues de $E_r^{p,-p-1}(X)$ (ou y aboutissant), $r \geqq 2$, sont nulles modulo $\mathscr{S}_{\sup(p,d+1-p)}$ et que la filtration de $K_1(X)$ est triviale modulo $\mathscr{S}_{d+2}$.

Enfin, soit

$$\alpha \in K_3(k(x)) \subset E_r^{p,-p-3}(X),\ r \geqq 2,\ x \in X^{(p)}.$$

On a

$$E_r(\psi^k)(\alpha) = k^{p+2}\alpha + \alpha',$$

avec

$$E_r(\psi^k)(\alpha') = k^{p+3}\alpha'.$$

Donc

$$k^{p+r+2}d_r(\alpha) = E_r(\psi^k)(d_r(\alpha)) = k^{p+2}d_r(\alpha) + d_r(\alpha'),$$

d'où

$$w_r d_r(\alpha) \in d_r(F_\gamma^{p+3}E_r^{p,-p-3}(X)).$$

De plus, si

$$\alpha' \in F_\gamma^{p+3}E_r^{p,-p-3}(X),$$

on obtient de même

$$w_{r-1}d_r(\alpha') = 0.$$

Par conséquent

$$w_{r-1}w_r d_r = 0.$$

On conclut que

$$K_2(X) = \bigoplus_{p=0}^{d} E_2^{p,-p-2}(X) \text{ (modulo } \mathscr{S}_{d+2}).$$

Remarques. Si $\dim(X) = 1$ et si X est connexe on trouve ainsi des suites de localisation, exactes modulo $\mathscr{S}_{m+1}$, $m \geqq 2$,

$$K_m(X)^{(i)} \to K_m(k(X))^{(i)} \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} K_{m-1}(k(x))^{(i-1)}$$

$$\to K_{m-1}(X)^{(i)} \to \ldots \to K_0(k(X))^{(i)}.$$

Si $Y \subset X$ est une immersion fermée on peut obtenir des résultats analogues au Théorème 4 pour la suite spectrale $E_{rY}^{pq}(X)$ convergeant vers $K_{-p-q}^{Y}(X)$ dont le terme $E_{1Y}^{pq}(X)$ est égal, si $p + q \leqq 0$, à

$$E_{1Y}^{pq}(X) = \bigoplus_{\substack{x \in X^{(p)} \\ x \in Y}} K_{-p-q}(k(x)).$$

(cf. aussi plus bas, Section 8, Théorème 8).

Le résultat de dégénérescence iv) de la suite spectrale de Quillen sur les trois premières lignes a été prouvé différement par Schechtman [**28**] quand X est une variété quasi-projective et lisse sur un corps.

Le lien entre iv) et la Proposition 2 i) de 3.2 pourrait être que, si A est un anneau régulier de dimension d,

$$E_2^{d,-d-1} = MS_d(A).$$

6. Cycles algébriques.

6.1. *Groupes de Chow.* Soient X un schéma régulier de type fini sur un corps, et $d = \dim(X)$ sa dimension. Si i est un entier, $0 \leqq i \leqq d$, on désigne par $CH^i(X)$ le groupe de Chow de X de codimension i, c'est-à-dire le groupe des cycles algébriques de codimension i sur X modulo l'équivalence linéaire (engendrée par les diviseurs des fonctions rationnelles non nulles sur les sous-schémas fermés irréductibles de codimension $i - 1$ dans X). Si x est un point de X on note i_x l'inclusion Spec $k(x) \to X$, et $i_{x*}K_m(k(x))$ (resp. $i_{x*}K_m^M(k(x))$) le faisceau sur X (pour la topologie de Zariski) à support x et de fibre $K_m(k(x))$ (resp. la K-théorie de Milnor $K_m^M(k(x))$). On note aussi $\mathbf{K}_m$(resp. $\mathbf{K}_m^{(i)}$, resp. $\mathbf{K}_m^M$) le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto K_m(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$$

(resp. $K_m(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))^{(i)}$, resp. $K_m^M(\Gamma(U, \mathcal{O}_X))$).

THÉORÈME 5. i) *Pour tout entier $i \geqq 0$ on a une suite exacte de faisceaux abéliens, modulo $\mathcal{S}_m$,*

$$0 \to \mathbf{K}_m^{(i)} \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} i_{x*}K_m(k(x))^{(i-1)} \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}K_{m-1}(k(x))^{(i-1)}$$
$$\to \bigoplus_{x \in X^{(2)}} i_{x*}K_{m-2}(k(x))^{(i-2)} \to \ldots$$

ii) *On a*

$$K_i(k(x))^{(i)} = K_i^M(k(x)) \quad (modulo\ \mathcal{S}_i)$$

et, si le corps de base est infini,

$$\mathbf{K}_i^{(i)} = \mathbf{K}_i^M \quad (modulo\ \mathscr{S}_i)$$

iii) $E_2^{pq}(X)^{(i)} = H^p(X, \mathbf{K}_{-q}^{(i)})$ $(modulo\ \mathscr{S}_{-q})$

$$CH^i(X) = H^i(X, \mathbf{K}_i^{(i)})\ (modulo\ \mathscr{S}_i).$$

Preuve. i) Quillen [**24**] montre que le complexe de faisceaux abéliens associé au terme E_1 de la suite spectrale de coniveau (en topologie de Zariski) fournit une résolution

$$0 \to \mathbf{K}_m \to \bigoplus_{x \in X^{(0)}} i_{x*}K_m(k(x)) \to \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}K_{m-1}(k(x)) \to \dots$$

D'après le Théorème 4, si $\tau \in \mathscr{T}$, on a un morphisme de complexes:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to \mathbf{K}_m & \to & \bigoplus_{x \in X^{(0)}} i_{x*}K_m(k(x)) & \to & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}K_{m-1}(k(x)) & \to & \dots \\ \downarrow \tau & & \downarrow \tau & & \downarrow \tau(1, \cdot) & & \\ 0 \to \mathbf{K}_m & \to & \bigoplus_{x \in X^{(0)}} i_{x*}K_m(k(x)) & \to & \bigoplus_{x \in X^{(1)}} i_{x*}K_{m-1}(k(x)) & \to & \dots \end{array}$$

L'énoncé i) en résulte, par les mêmes arguments que dans le Théorème 4, iii).

ii) L'égalité

$$K_i(k(x))^{(i)} = K_i^M(k(x))\ (\text{modulo}\ \mathscr{S}_i)$$

est le Théorème 2. De même, si le corps de base est infini, le morphisme

$$\mathbf{K}_i^M \to \mathbf{K}_i^{(i)}$$

est un isomorphisme (modulo $\mathscr{S}_i$), car, par le Théorème 2, pour tout point x de X, le morphisme

$$\mathbf{K}_i^M(\mathscr{O}_{X,x}) \to K_i(\mathscr{O}_{X,x})^{(i)}$$

est un isomorphisme (modulo $\mathscr{S}_i$).

iii) Par le Corollaire 1, on sait que

$$\mathbf{K}_{-q} = \bigoplus_{i=0}^{-q} \mathbf{K}_{-q}^{(i)} \quad (\text{modulo}\ \mathscr{S}_{-q}),$$

et

$$E_2^{pq}(X) = \bigoplus_{i \geqq 0} E_2^{pq}(X)^{(i)} \quad (\text{modulo}\ \mathscr{S}_{-q}).$$

Par ailleurs, Quillen a montré l'égalité

$$CH^i(X) = E_2^{i,-i}(X)$$

et on sait (cf. Théorème 4) que

$$E_2^{i,-i}(X) = E_2^{i,-i}(X)^{(i)}.$$

Remarque. L'idée que l'action des opérations d'Adams implique

$$CH^i(X) \otimes \mathbf{Q} = H^i(X, \mathbf{K}_i^M) \otimes \mathbf{Q}$$

m'a été signalée par Gillet.

6.2. λ-*Structure de la K-théorie dans le cas singulier.* Soit S un schéma régulier noethérien de dimension de Krull finie. On note $\mathscr{V}_S$ la catégorie des schémas quasi-projectifs sur S (éventuellement singuliers).

PROPOSITION 7. *Pour tout schéma X de $\mathscr{V}_S$, tout entier $m \geqq 0$ et tout élément $\tau \in \mathscr{T}$, on peut définir une action de τ sur $K_m(X)$ et une structure de $K_0(X)-\lambda$-algèbre augmentée, à involution, et nilpotente sur $K_m(X)$, qui est compatible aux morphismes f^* induits par les morphismes de $\mathscr{V}_S$.*

Preuve. D'après [**11**], 3.2, Lemme, pour toute suite exacte

$$0 \to E' \to E \to E'' \to 0$$

de fibrés sur X, il existe un plongement $i:X \to M$ de X dans un schéma de $\mathscr{V}_S$ lisse sur S et une suite exacte

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0$$

sur M telle que la suite exacte initiale soit isomorphe à

$$0 \to i^*F' \to i^*F \to i^*F' \to 0.$$

De plus si E et F sont deux fibrés sur un schéma M de $\mathscr{V}_S$ lisse sur S et si $f:X \to M$ est un morphisme de $\mathscr{V}_S$ tel que $f^*E \simeq f^*F$, il existe une factorisation $f = g \circ f', f':X \to M'$, $g:M' \to M$, telle que M' est lisse sur S et $g^*E \simeq g^*F$ sur M'. Il en résulte que la catégorie $QP(X)$ associée par Quillen à la catégorie exacte des fibrés sur X [**25**] peut s'écrire

$$QP(X) = \varprojlim_{\mathscr{C}} QP(M)$$

où $\mathscr{C}$ est la catégorie de tous les morphismes $X \to M$ de $\mathscr{V}_S$, où M est un schéma lisse sur S. Par conséquent

$$K_m(X) = \varprojlim_{\mathscr{C}} K_m(M)$$

et l'action de τ (resp. la λ-structure) sur la K-théorie des schémas réguliers M (cf. 4.3) s'étend à celle de X. Comme chacun des schémas M est de dimension finie, on sait (5.2) que la γ-filtration de la K-théorie de M est finie. Il en résulte que pour tout élément x de $K_m(X)$ il existe un entier N_x tel que

$$\gamma^{i_1}(x - \epsilon(x)) \dots \gamma^{i_\alpha}(x - \epsilon(x)) = 0 \quad \text{si } i_1 + \dots + i_\alpha \geqq N_x.$$

C'est la définition de λ-structure "nilpotente" donnée par Kratzer ([**16**], p. 247).

Remarque. Je ne sais pas si la γ-filtration de $K_m(X)$ est finie.

6.3. *Cycles relatifs.* Soient F un corps et X une variété affine régulière de dimension d sur F. Landsburg introduit dans [**18**] une suite spectrale $LE_r^{pq}(X)$ qui converge vers $K_{-p-q}(X)$ et telle que

$$LE_r^{pq}(X) = 0$$

si $q > 0$, $p + q > 0$ ou bien $p > d$. Le groupe

$$CH^i(X, m) = LE_2^{i-m,-i}(X)$$

est un groupe de "cycles relatifs", généralisant les groupes de Chow usuels.

THÉORÈME 6. i) *Si F est de caractéristique non nulle, la suite spectrale de Landsburg dégénère en E_2 (modulo $\mathcal{S}$) et l'on a*

$$K_m(X)^{(i)} = CH^i(X, m) \quad (\textit{modulo } \mathcal{S}).$$

ii) *Dans tous les cas, la filtration définie par la suite spectrale de Landsburg sur la K-théorie de X est la γ-filtration (modulo torsion).*

Preuve. i) D'après [**18**], 5.2, le groupe $CH^i(X, m)$ est un quotient

$$CH^i(X, m) = Z^i(X, m)/\{\text{élèments rationnels}\},$$

où $Z^i(X, m)$ est un sous-groupe de $Z^i(\mathbf{A}_X^m)$, le groupe des cycles de codimension i sur l'espace affine $\mathbf{A}_X^m$ de dimension m sur X.

Si F est de caractéristique $l \neq 0$, notons $\Phi: X \to X$ l'endomorphisme de Frobenius (qui agit par l'identité sur l'espace topologique sous-jacent à X et sur le faisceau structural $\mathcal{O}_X$ par élévation à la puissance l). Comme Φ est un morphisme plat on vérifie que Φ induit un endomorphisme $E_r(\Phi)$ de la suite spectrale $LE_r^{pq}(X)$ qui converge vers le morphisme d'image inverse en K-théorie

$$\Phi^*: K_{-p-q}(X) \to K_{-p-q}(X).$$

De plus l'action de $E_2(\Phi)$ sur $LE_2^{i-m,i}(X) = CH^i(X, m)$ coïncide avec celle induite par le morphisme d'image inverse

$$\Phi^*: Z^i(\mathbf{A}_X^m) \to Z^i(\mathbf{A}_X^m).$$

Or l'action de Φ^* sur $Z^i(\mathbf{A}_X^m)$ est la multiplication par l^i. En effet, si $Y \subset \mathbf{A}_X^m$ est une sous-variété irréductible de codimension i et $[Y]$ sa classe dans $Z^i(\mathbf{A}_X^m)$, il est clair que $\Phi^*([Y])$ est un multiple de $[Y]$. Or si

$$\Phi_*: Z^i(\mathbf{A}_X^m) \to Z^i(\mathbf{A}_X^m)$$

est le morphisme d'image directe associée au morphisme fini Φ on a (cf.

[**11**]) en désignant par $F(Y)$ le corps des fonctions de Y,

$$\Phi_*([Y]) = (F(Y):F(Y)^l)[Y] = l^{d-i}[Y],$$

et

$$\Phi^*\Phi_*([Y]) = \Phi_*(1)[Y] = l^d[Y].$$

Donc $\Phi^*([Y]) = l^i[Y]$.

Si $r \geqq 2$, l'action de $E_r(\Phi)$ sur $LE_r^{pq}(X)$ est donc la multiplication par l^{-q}. Les différentielles d_r, $r \geqq 2$, sont donc nulles (modulo $\mathscr{S}$) et

$$LE_2^{pq}(X) = LE_\infty^{pq}(X) \text{ (modulo } \mathscr{S}).$$

La filtration (finie) de $K_{-p-q}(X)$ définie par la suite spectrale de Landsburg est telle que Φ^* opère sur les quotients successifs par des valeurs propres distinctes, donc

$$K_m(X) = \bigoplus_{p+q=-m} LE_\infty^{pq}(X) \text{ (modulo } \mathscr{S}).$$

Notons que l'action de Φ^* sur $K_m(X)$ coïncide avec celle de l'opération d'Adams ψ^l (cf. le Section 8 ci-dessous), d'où l'égalité

$$E_\infty^{pq}(X) = K_{-p-q}(X)^{(-q)} \text{ (modulo } \mathscr{S}),$$

ce qui prouve ii) dans ce cas.

ii) Posons, si $X = \operatorname{Spec} R$ et pour tout entier $m \geqq 0$,

$$X^m = \operatorname{Spec}(R[t_1, \ldots, t_{m+1}]/(t_{m+1}^2 - \prod_{j=1}^m (t_j^4 - t_j^2))).$$

D'après Landsburg ([**18**], 10.4 et 10.11) l'aboutissement de la suite spectrale $LE_r^{pq}(X)$ est égal à $K_0(X^{-p-q})/K_0(X)$, muni de la filtration

$$F^{-q}K_0(X^{-p-q})/F^{-q}K_0(X),$$

où F^i est la filtration définie comme suit. Si M est une variété lisse sur F on note $F^iK_0(M)$ le sous-groupe de $K_0(M)$ engendré par les $\mathscr{O}_M$-faisceaux cohérents dont le support est de codimension supérieure ou égale à i. Si X est un schéma quasi-projectif sur F quelconque, on sait (6.2) que

$$K_0(X) = \lim_{\overleftarrow{\mathscr{T}}} K_0(M),$$

où $\mathscr{C}$ est la catégorie des morphismes $X \to M$ de X dans une variété lisse M sur F. On pose alors

$$F^iK_0(X) = \lim_{\overleftarrow{\mathscr{C}}} F^iK_0(M).$$

Mais, d'aprés 6.2, on a

$$F^i_\gamma K_0(X) = \varprojlim_{\mathscr{C}} F^i_\gamma K_0(M),$$

et d'après [**14**] (ou 5.2) on a

$$F^i K_0(M) = F^i_\gamma K_0(M) \quad \text{(modulo torsion)},$$

donc on a toujours

$$F^i K_0(X) = F^i_\gamma K_0(X) \quad \text{(modulo torsion)}.$$

L'identification que donne Landsburg de $K_0(X^{-p-q})/K_0(X)$ avec $K_{-p-q}(X)$ commute à l'action de $\mathscr{T}$. En effet, cette identification se fait en introduisant la K-théorie de Karoubi-Villamayor (cf. 3.2). On a

$$K_0(X^{-p-q}) = KV_0(X^{-p-q})$$

et comme X est un schéma affine régulier, $KV_m(X) = K_m(X)$.

On a vu en 3.2 comment définir sur KV_m une action de $\mathscr{T}$ qui est compatible aux isomorphismes ci-dessus.

Par ailleurs la suite spectrale de Dayton-Weibel [**10**] associée au reçouvrement de X^m par ses composantes dégénère et donne un isomorphisme

$$K_0(X^m)/K_0(X) \simeq KV_m(X)$$

([**18**], 10.2).

Pour voir que cet isomorphisme commute à l'action de $\mathscr{T}$ il suffit de voir que $\mathscr{T}$ agit sur la suite spectrale de Dayton-Weibel. Or, par construction [**10**], celle-ci provient de suites exactes associées à des GL-filtrations

$$R \rightarrow R/I$$

de noyau un idéal I:

$$\ldots \rightarrow KV_m(I) \rightarrow KV_m(R) \rightarrow KV_m(R/I) \rightarrow KV_{m-1}(I) \rightarrow \ldots$$

Ces suites exactes proviennent quant à elles de fibrations de H-espaces:

$$BGL(\Delta I) \rightarrow BGL(\Delta R) \rightarrow BGL(\Delta(R/I))$$

(cf. [**36**], Theorem 3.2). Il est clair que $\mathscr{T}$ opère sur une telle fibration, d'où une action de $\mathscr{T}$ sur la suite spectrale de Dayton-Weibel (comptabile à son action en K-théorie de Karoubi-Villamayor). On en déduit que la γ-filtration sur $K_0(X^m)/K_0(X)$ coïncide, par l'isomorphisme ci-dessus, avec celle $K_m(X)$. D'après le paragraphe précédent, cela montre que la suite spectrale $LE_r^{pq}(X)$ converge vers $F_\gamma^{-q}K_{-p-q}(X)$ (modulo torsion).

6.4 Les propriétés de la γ-filtration pourraient peut-être s'obtenir à l'aide de la suite spectrale de Landsburg. C'est ainsi que la conjecture du paragraphe 2.9 serait conséquence de

CONJECTURE. *Si $m > 2i$, on a $CH^i(X, m) = 0$. Autrement dit,*

$$LE_2^{pq}(X) = 0 \text{ si } p < q.$$

Ceci se voit aisément si $q = 0$.

Il serait également intéressant de définir une action de $\mathscr{T}$ sur $LE_r^{pq}(X)$, ce qui permettrait d'étendre le Théorème 6, i) au cas où $\mathrm{char}(F) = 0$.

7. Théorème de Riemann-Roch avec démoninateurs.

7.1. Soient S un schéma régulier noethérien irrèductible de dimension de Krull finie, et $\mathscr{V}_S$ la catégorie des schémas quasi-projectifs sur S.

Si $X \to M$ est une immersion fermée d'un schéma X de $\mathscr{V}_S$ dans un schéma M lisse sur S, on note

$$\mathrm{ch}: K_m(X) \to \bigoplus_{i \geqq 0} Gr_\gamma^i K_m(X) \otimes \mathbf{Q}$$

(resp.

$$\mathrm{ch}: K_m^X(M) \to \bigoplus_{i \geqq 0} Gr_\gamma^i K_m^X(M) \otimes \mathbf{Q})$$

le morphisme

$$\mathrm{ch} = \bigoplus_{i \geqq 0} \mathrm{ch}_i,$$

où $\mathrm{ch}_0 = \epsilon$, et, si $i > 0$, $\mathrm{ch}_i(x)$ est $\mathscr{T}$classe de l'élément

$$\frac{1}{i!} N_i(\gamma^1(x - \epsilon(x)), \ldots, \gamma^i(x - \epsilon(x))),$$

et N_i le i-ème polynôme de Newton. On sait (c'est un fait général sur λ-anneaux [**14**]) que ch est un morphisme d'anneaux qui commute à l'action de $\mathscr{T}$. De plus

$$\mathrm{ch} \otimes 1: K_m(X) \otimes \mathbf{Q} \to \bigoplus_{i \geqq 0} Gr_\gamma^i K_m(X) \otimes \mathbf{Q}$$

est un isomorphisme (idem pour la K-théorie à support). Notons aussi que

$$\mathrm{ch}(xy) = \mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)$$

(ch commute au produit en K-théorie supérieure) et que ch commute aux morphismes d'image inverse.

Si M est une variété de $\mathscr{V}_S$ lisse sur S, on notera

$$\mathrm{Td}(M) = \mathrm{Todd}(T_M) \in \bigoplus_{i \geqq 0} Gr_\gamma^i K_0(M) \otimes \mathbf{Q}$$

la classe de Todd du fibré tangent T_M (relatif à S). On note par ailleurs

https://doi.org/10.4153/CJM-1985-029-x Published online by Cambridge University Press

$$\theta^k(M) = \theta^k(-\check{T}_M) \in K_0(M) \otimes \mathbf{Z}[1/k],$$

$k \neq 0$, l'image par l'opération cannibale, définie en 4.4, de l'opposé du fibré cotangent $\check{T}_M$ (l'opération θ^k s'étend en une opération exponentielle

$$\theta^k : K_0(M) \to K_0(M) \otimes \mathbf{Z}[1/k]).$$

7.2 THÉORÈME 7. *Pour tout schéma X de $\mathcal{V}_S$ il existe des opérations*

$$\phi^k : K'_m(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \to K'_m(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k],\ k \in \mathbf{Z} - \{0\},$$

une filtration croissante finie $F_j K'_m(X) \otimes \mathbf{Q}$, $j \in \mathbf{Z}$, et un isomorphisme

$$\sigma : K'_m(X) \otimes \mathbf{Q} \to \bigoplus_j Gr_j K'_m(X) \otimes \mathbf{Q}$$

(où $Gr_j = F_j/F_{j+1}$) tels que

i) $\phi^k(F_j) \subset F_j$, *ϕ^k agit sur Gr_j par multiplication par k^{-j}*, $\phi^k \circ \phi^l = \phi^{kl}$, *$\phi^k$ commute à σ.*

ii) *Si f est un morphisme projectif de $\mathcal{V}_S$ on a*

$$\phi^k f_* = f_* \phi^k,\ f_*(F_j) \subset F_j,\ \sigma f_* = f_* \sigma.$$

iii) *Si f est une immersion ouverte de $\mathcal{V}_S$ on a*

$$\phi^k f^* = f^* \phi^k,\ f^*(F_j) \subset F_j,\ \sigma f^* = f^* \sigma.$$

iv) *Le cap-produit*

$$\cap : K'_m(X) \times K_n(X) \to K'_{m+n}(X)$$

vérifie

$$\phi^k(\alpha \cap \beta) = \phi^k(\alpha) \cap \psi^k(\beta),\ \alpha \in K'_m(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k],\ \beta \in K_n(X),$$

$$(F_j K'_m(X) \otimes \mathbf{Q}) \cap (F^i_\gamma K_m(X) \otimes \mathbf{Q}) \subset F_{j-i} K'_{m+n}(X) \otimes \mathbf{Q},$$

et

$$\sigma(\alpha \cap \beta) = \sigma(\alpha) \cap \mathrm{ch}(\beta),\ \alpha \in K'_m(X) \otimes \mathbf{Q},\ \beta \in K_n(X).$$

v) *Si X et Y sont des schémas de $\mathcal{V}_S$ le produit externe*

$$\boxtimes : K'_m(X) \times K'_n(Y) \to K'_{m+n}(X \times Y)$$

vérifie

$$\phi^k(\alpha \boxtimes \beta) = \phi^k(\alpha) \boxtimes \phi^k(\beta),\ F_j \boxtimes F_{j'} \subset F_{j+j'},$$

et

$$\sigma(\alpha \boxtimes \beta) = \sigma(\alpha) \boxtimes \sigma(\beta).$$

vi) *Si X est un schéma de $\mathcal{V}_S$ qui est lisse et équidimensionnel, si $X \to S$ est surjectif, et si d est la dimension de Krull de X, l'isomorphisme*

https://doi.org/10.4153/CJM-1985-029-x Published online by Cambridge University Press

$$\eta : K'_m(X) \simeq K_m(X)$$

vérifie

$$\eta(\phi^k(x)) = \psi^k(x) \cdot \theta^k(X),$$
$$\eta(F_j K'_m(X) \otimes \mathbf{Q}) = F_\gamma^{d-j} K_m(X) \otimes \mathbf{Q},$$

et

$$\eta(x) = \mathrm{ch}(x) \cdot \mathrm{Td}(X).$$

L'existence des opérations ϕ^k m'a été signalé par Gillet (lettre, 1982).

Preuve du Théorème 7. 1) Soient $X \in \mathrm{Ob}(\mathscr{V}_S)$ et $f : X \to M$ une immersion fermée de $\mathscr{V}_S$, où M est lisse et équidimensionnel, et $M \to S$ est surjectif. D'après [**25**] on a un isomorphisme

$$f_* : K'_m(X) \xrightarrow{\sim} K_m^X(M).$$

On pose alors, si $d = \dim(M)$ est la dimension de Krull de M,

$$F_j^M K'_m(X) \otimes \mathbf{Q} = f_*^{-1}(F_\gamma^{d-j} K_m^X(M) \otimes \mathbf{Q}),$$
$$K^{\dim(s)} \phi_M^k(\alpha) = f_*^{-1}(\psi^k(f_*(x)) \cdot \theta^k(M)) \quad (\alpha \in K'_m(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k]),$$

et

$$\sigma^M(\alpha) = f_*^{-1}(\mathrm{ch}(f_*(x))\mathrm{Td}(M)) \quad (\alpha \in K'_m(X) \otimes \mathbf{Q}).$$

On va voir que ces définitions ne dépendent pas du choix de l'immersion fermée $X \to M$.

2) Il est clair que

$$\phi_M^k(F_j^M) = F_j^M$$

et que ϕ_M^k agit sur Gr_j^M par multiplication par k^{-j}. En effet

$$\epsilon(\theta^k(M)) = k^{-d + \dim(S)}$$

(cf. 4.4). Donc $\theta^k(M)$ est inversible dans $K_0(M) \otimes \mathbf{Q}$ et, puisque ψ^k est un automorphisme de $K_0(M) \otimes \mathbf{Q}$, cela implique

$$\phi_M^k(F_j^M) = F_j^M.$$

L'action de ϕ_M^k sur Gr_j^M est la multiplication par $k^{d-j}k^{-d} = k^{-j}$.

Par ailleurs, on a

$$\phi_M^k \circ \phi_M^l = \phi_M^{kl}.$$

En effet

$$\begin{aligned}(\phi_M^k \circ \phi_M^l)(x) &= \phi_M^k(\psi^l(x)\theta^l(-\check{T}_M)) \\ &= (\psi^k \circ \psi^l)(x) \cdot \psi^k(\theta^l(-\check{T}_M)) \cdot \theta^k(-\check{T}_M)\end{aligned}$$

$$= \psi^{kl}(x)\theta^{kl}(-\check{T}_M)$$

(cf. 1.5 et 4.4).

Notons aussi que si $X \to M$ et $Y \to M'$ sont deux immersions fermées comme ci-dessus on a

$$\mathrm{Td}(M \times M') = \mathrm{Td}(M) \boxtimes \mathrm{Td}(M')$$

$$\theta^k(M \times M') = \theta^k(M) \boxtimes \theta^k(M'),\ \psi^k(\alpha \boxtimes \beta) = \psi^k(\alpha) \boxtimes \psi^k(\beta),$$

et $\mathrm{ch}(\alpha \boxtimes \beta) = \mathrm{ch}(\alpha) \boxtimes \mathrm{ch}(\beta)$, donc

$$\phi^k_{M\times M'}(\alpha \boxtimes \beta) = \phi^k_M(\alpha) \boxtimes \psi^k_{M'}(\beta),\ F^M_j \boxtimes F^{M'}_{j'} \subset F^{M\times M'}_{j+j'},$$

et

$$\sigma^{M\times M'}(\alpha \boxtimes \beta) = \sigma^M(\alpha) \boxtimes \sigma^{M'}(\beta).$$

3) Soient

$$X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'$$

deux immersions fermées de $\mathcal{V}_S$, le schéma M (resp. M') étant lisse et équidimensionnel de dimension d (resp. d') sur S. Appelons N le fibré normal à M dans M'. Le théorème de Riemann-Roch sans dénominateur (4.5) montre que l'isomorphisme

$$g_*:K^X_m(M) \to K^X_m(M')$$

vérifie

$$g_*(\psi^k(\alpha)\theta^k(\check{N})) = \psi^k(g_*(\alpha)).$$

On en déduit, puisque $\epsilon(\theta^k(N)) = k^{d'-d}$, que

$$g_*(F^i_\gamma K^X_m(M) \otimes \mathbf{Q}) = F^{i+d'-d}_\gamma K^X_m(M') \otimes \mathbf{Q}).$$

On a aussi

$$g_*(\mathrm{ch}(\alpha)\cdot \mathrm{Td}(\check{N})^{-1}) = \mathrm{ch}(g_*(\alpha)).$$

Comme $N = g^*\check{T}_{M'} - \check{T}_M$, on voit que

$$\theta^k(N) = \theta^k(M)g^*(\theta^k(M'))^{-1}$$

et

$$\mathrm{Td}(\check{N})^{-1} = \mathrm{Td}(M)g^*(\mathrm{Td}(M'))^{-1}.$$

La formule de projection montre donc que

$$g_*(\psi^k(\alpha)\theta^k(M)) = \psi^k(g_*(\alpha))\theta^k(M'),\ \text{si } \alpha \in K^X_m(M) \otimes \mathbf{Z}[1/k],$$

et que

$$g_*(\mathrm{ch}(\alpha)\mathrm{Td}(M)) = \mathrm{ch}(g_*(\alpha))\mathrm{Td}(M'),\ \text{si } \alpha \in K^X_m(M) \otimes \mathbf{Q}.$$

Par conséquent, puisque $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, on a

$$F_j^M = F_j^{M'}, \ \phi_M^k = \phi_{M'}^k, \text{ et } \sigma^M = \sigma^{M'}.$$

4) Soient

$$Y \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M$$

deux immersions fermées de $\mathscr{V}_S$, où M est lisse et équidimensionnel sur S.

Le morphisme

$$f_*:K_m^X(M) \to K_m^Y(M)$$

vérifie:

$$f_*(F_\gamma^i K_m^X(M) \otimes \mathbf{Q}) = (F_\gamma^i(K_m^Y(M)) \cap f_*(K_m^X(M))) \otimes \mathbf{Q},$$

$$f_* \circ \psi^k = \psi^k \circ f_*, \text{ et } f_* \circ \mathrm{ch} = \mathrm{ch} \circ f_*.$$

En effet f_* consiste à restreindre le support:

$$f_*:H_X^{-m}(M, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+) \to H_Y^{-m}(M, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+),$$

donc l'action de tout élément $\tau \in \mathscr{T}$ commute à f_*. Donc ch commute à f_*, et l'examen des valeurs propres des opérations d'Adams montre que

$$f_*(F_\gamma^i \otimes \mathbf{Q}) = (F_\gamma^i \cap \mathrm{Im}(f_*)) \otimes \mathbf{Q}.$$

On en déduit que

$$f_*(F_j^M K'_m(Y) \otimes \mathbf{Q}) \subset F_j^M K'_m(X) \otimes \mathbf{Q},$$

$$f_* \circ \phi_M^k = \phi_M^k \circ f_*, \quad \text{et} \quad f_* \circ \sigma^M = \sigma^M \circ f_*.$$

5) Soient $f:X \to M$ une immersion fermée de $\mathscr{V}_S$, où M est lisse et équidimensionel sur S, $\mathbf{P}_X^r$ (resp. $\mathbf{P}_M^r$) l'espace projectif de dimension r sur X (resp. M), et

$$\pi:(\mathbf{P}_M^r, \mathbf{P}_X^r) \to (M, X)$$

la projection canonique. On va voir que,

$$\pi_*(F_j^{\mathbf{P}_M^r} K'_m(\mathbf{P}_X^r) \otimes \mathbf{Q}) = F_j^M K'_m(X) \otimes \mathbf{Q}, \quad j \in \mathbf{Z},$$

$$\pi_* \circ \phi_{\mathbf{P}_M^r}^k = \phi_M^k \circ \pi_*, \text{ et } \pi_* \circ \sigma^{\mathbf{P}_M^r} = \sigma^M \circ \pi_*.$$

Soit en effet $\xi = [\mathscr{O}(-1)] \in K_0(\mathbf{P}_S^r)$ la classe de l'inverse du fibré standard sur l'espace projectif $\mathbf{P}_S^r$. Le produit externe

$$K_m^X(M) \times K_0(\mathbf{P}_S^r) \to K_m^{\mathbf{P}_X^r}(\mathbf{P}_M^r)$$

fait de $K_m^{\mathbf{P}_X^r}(\mathbf{P}_M^r)$ un module libre de base $1, \xi, \ldots, \xi^r$ sur $K_0^X(M)$ **[12]**, et

$$(\xi - 1)^{r+1} = 0.$$

Pour vérifier que

$$\pi_* \circ \phi^k_{\mathbf{P}^r_M} = \phi^k_M \circ \pi_*$$

il suffit donc de le vérifier sur un produit $\alpha\xi^m$, $0 \leqq m \leqq r$,

$$\alpha \in K^X_m(M) \otimes \mathbf{Z}[1/k].$$

D'après la formule de projection on a

$$\begin{aligned}\phi^k_M(\pi_*(\alpha\xi^m)) &= \phi^k_M(\alpha\pi_*(\xi^m)) \\ &= \psi^k(\alpha)\psi^k(\pi_*(\xi^m))\theta^k(M), \quad \text{et}\end{aligned}$$

$$\pi_*\phi^k_{\mathbf{P}^r_M}(\alpha\xi^m) = \pi_*(\psi^k(\alpha)\psi^k(\pi_*(\xi^m))\theta^k(\mathbf{P}^r_M)).$$

Mais

$$\theta^k(\mathbf{P}^r_M) = \theta^k(\mathbf{P}^r_S)\theta^k(M)$$

(d'après le Lemme 2 ii)). Donc

$$\pi_*(\phi^k_{\mathbf{P}^r_M}(\alpha\xi^m)) = \psi^k(\alpha)\theta^k(M)\pi_*(\psi^k(\xi^m)\theta^k(\mathbf{P}^r_S)).$$

On voit donc qu'il suffit de vérifier

$$\psi^k(\pi_*(\xi^m)) = \pi_*(\psi^k(\xi^m)\theta^k(\mathbf{P}^r_S)).$$

Comme

$$\check{T}_{\mathbf{P}^r_S} = (r + 1)\xi - 1,$$

on voit que cette vérification (qui a lieu dans K_0) ne dépend pas du choix de la base S, qu'on peut supposer être le spectre d'un corps F. On utilise le Théorème de Riemann-Roch prouvé par Grothendieck pour le morphisme de définition

$$\pi:\mathbf{P}^r \to \text{Spec } F.$$

On sait (**[14]**, **[20]**) que le morphisme

$$\sigma:K_0(\mathbf{P}^r) \otimes \mathbf{Q} \to \bigoplus_{i \geqq 0} Gr^i_\gamma K_0(\mathbf{P}^r) \otimes \mathbf{Q}$$

donné par $\sigma(\alpha) = \text{ch}(\alpha) \cdot \text{Td}(\mathbf{P}^r)$ est un isomorphisme vérifiant

$$\sigma \circ \pi_* = \pi_* \circ \sigma,$$

où π_* est le morphisme nul sur $Gr^i_\gamma K_0(\mathbf{P}^r) \otimes \mathbf{Q}$, $i \neq r$, et l'identité sur

$$Gr^r_\gamma K_0(\mathbf{P}^r) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q} = Gr^0_\gamma K_0(F) \otimes \mathbf{Q}.$$

On a

$$\text{ch} \circ \psi^k = \psi^k \circ \text{ch}, \quad \text{et}$$

$$\psi^k \circ \pi_* = k^r\pi_* \circ \psi^k.$$

Si donc $\alpha \in K_0(\mathbf{P}^r) \otimes \mathbf{Q}$ on trouve

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\psi^k(\pi_*(\alpha))) &= \psi^k(\mathrm{ch}(\pi_*(\alpha))) = \psi^k(\pi_*(\mathrm{ch}(\alpha)\mathrm{Td}(\mathbf{P}^r)^{-1}))\\ &= k^r\pi_*(\psi^k(\mathrm{ch}(\alpha))\,\psi^k(\mathrm{Td}(\mathbf{P}^r)^{-1}))\\ &= \mathrm{ch}\circ\pi_*(\psi^k(\alpha)k^r\mathrm{ch}^{-1}(\psi^k(\mathrm{Td}(\mathbf{P}^r)^{-1}))\mathrm{ch}(\mathrm{Td}(\mathbf{P}^r)^{-1}).\end{aligned}$$

D'après [**20**], Lemme 18.4, on a

$$k^r\mathrm{ch}^{-1}(\psi^k(\mathrm{Td}(\mathbf{P}^r)^{-1}))\mathrm{ch}(\mathrm{Td}(\mathbf{P}^r))^{-1} = \theta^k(\mathbf{P}^r).$$

D'où, puisque ch est un isomorphisme et que $K_0(F)$ est intègre,

$$\psi^k(\pi_*(\alpha)) = \pi_*(\psi^k(\alpha)\theta^k(\mathbf{P}^r)) \quad \text{si } \alpha \in K_0(\mathbf{P}^r) \otimes \mathbf{Z}[1/k]$$

et

$$\pi_* \circ \phi^k_{\mathbf{P}^r_M} = \phi^k_M \circ \pi_*.$$

Comme π_* est surjectif, cela implique

$$\pi_*(F_j^{\mathbf{P}^r_M}K'_m(\mathbf{P}^r_X) \otimes \mathbf{Q}) = F_j^M K'_m(X) \otimes \mathbf{Q}.$$

Enfin, on voit que

$$\pi_* \circ \sigma^{\mathbf{P}^r_M} = \sigma^M \circ \pi_*$$

en se ramenant comme précédemment au théorème de Riemann-Roch dû à Grothendieck.

6) Si

$$X \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'$$

sont des morphismes de $\mathscr{V}_S$ tels que f et $g \circ f$ sont des immersions fermées et g une immersion ouverte, et si M et M' sont lisses et équidimensionnels sur S, on a

$$\phi^k_M = \phi^k_{M'},\ F_j^M = F_j^{M'} \text{ et } \sigma^M = \sigma^{M'}.$$

En effet M et M' ont même dimension, le morphisme d'image inverse

$$f^*: K^X_m(M') \to K^X_m(M)$$

est un isomorphisme,

$$f^*\theta^k(M') = \theta^k(M), \quad \text{et} \quad f^*(\mathrm{Td}(M')) = \mathrm{Td}(M).$$

7) Soient $X \to M$ et $X \to M'$ deux immersions fermées de $\mathscr{V}_S$, où M et M' sont lisses et équidimensionnels sur S. On va voir que

$$\phi^k_M = \phi^k_{M'},\ F_j^M = F_j^{M'} \text{ et } \sigma^M = \sigma^{M'}.$$

Puisque M et M' sont quasi-projectifs, i.e., fermés dans un ouvert d'un espace projectif, on peut, d'après 3), supposer que M et M' sont des ouverts non vides d'espaces projectifs $\mathbf{P}^s_S$ et $\mathbf{P}^r_S$. Le diagramme

$$X \to M \times M' \to M \to \mathbf{P}^r_S$$

vérifie alors les hypothèses de 6), et donc

$$\phi^k_{M\times M'} = \phi^k_{M\times\mathbf{P}^r},\ F_j^{M\times M'} = F_j^{M\times\mathbf{P}^r} \text{ et } \sigma^{M\times M'} = \sigma^{M\times\mathbf{P}^r}.$$

Il suffit donc, par symétrie, de vérifier que

$$\phi^k_{\mathbf{P}^r_M} = \phi^k_M,\ F_j^{\mathbf{P}^r_M} = F_j^M \text{ et } \sigma^{\mathbf{P}^r_M} = \sigma^M.$$

Soit $i:X \to \mathbf{P}^r_X$ la section nulle et $\pi = \mathbf{P}^r_X \to X$ la projection canonique. Comme $\pi_* i_* = (\mathrm{id}_X)_*$, on déduit de 4) et 5) que

$$\phi^k_{\mathbf{P}^r_M} = \pi_* i_* \phi^k_{\mathbf{P}^r_M} = \phi^k_M \pi_* i_* = \phi^k_M,$$

d'où, d'après 2), l'égalité

$$F_j^{\mathbf{P}^r_M} = F_j^M.$$

De même on a

$$\sigma^{\mathbf{P}^r_M} = \pi_* i_* \sigma^{\mathbf{P}^r_M} = \sigma^M \pi_* i_* = \sigma^M.$$

8) Si $f:X \to Y$ est un morphisme projectif de $\mathscr{V}_S$, f_* respecte ϕ^k, F_j et σ, car f admet une factorisation

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{P}^r_Y \arrow[d, "\pi"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

où g est une immersion fermée. On peut donc appliquer 4) à g_* et 5) à π_*.

9) Si $f:U \to X$ est une immersion ouverte et $X \to M$ une immersion fermée de $\mathscr{V}_S$, avec M lisse et équidimensionnel sur S, soit M^0 un ouvert de M tel que $U = M^0 \cap X$. Du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & M^0 \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

on déduit

$$f^*(\theta^k(M)) = \theta^k(M^0),$$

$$f^*(\mathrm{Td}(M)) = \mathrm{Td}(M^0),$$

et

$$f^* \circ \phi^k_M = \phi^k_{M^0} \circ f^*,$$
$$f \circ \sigma^M = \sigma^{M^0} \circ f^*,$$

d'où iii). (N.B. On peut supposer que $M \to S$ et $M^0 \to S$ sont surjectifs.)

10) Pour vérifier iv) soient

$$\alpha \in K'_m(X) \otimes \mathbf{Z}[1/k] \text{ et } \beta \in K_n(X).$$

On sait (cf. 6.2) qu'il existe une immersion fermée $f:X \to M$ de X dans un schéma lisse de $\mathscr{V}_S$ et un élément $\widetilde{\beta} \in K_n(M)$ tel que $f^*(\widetilde{\beta}) = \beta$. Quitte à remplacer certaines des composantes de M par un espace affine sur ces composantes, on peut supposer que M est équidimensionnel de dimension d. L'isomorphisme

$$f_*:K'_{m+n}(X) \simeq K^X_{m+n}(M)$$

vérifie $f_*(\alpha \cap \beta) = f_*(\alpha)\widetilde{\beta}$. Par conséquent

$$\begin{aligned} f_*(\phi^k(\alpha \cap \beta)) &= \psi^k(f_*(\alpha \cap \beta))\theta^k(M) \\ &= \psi^k(f_*(\alpha))\psi^k(\widetilde{\beta})\theta^k(M) = f_*(\phi^k(\alpha))\psi^k(\widetilde{\beta}) \\ &= f_*(\phi^k(\alpha) \cap \psi^k(\beta)). \end{aligned}$$

Si $\alpha \in F_jK'_M(X) \otimes \mathbf{Q}$ et $\widetilde{\beta} \in F^i_\gamma K_n(M)$ on a

$$f_*(\alpha) \in F^{d-j}_\gamma K^X_m(M) \otimes \mathbf{Q}$$

et par conséquent

$$f_*(\alpha \cap \beta) = f_*(\alpha)\widetilde{\beta} \in F^{d-j+i}_\gamma K^X_{m+n}(M) \otimes \mathbf{Q},$$

i.e.,

$$\alpha \cap \beta \in F_{i-j}K'_{m+n}(X) \otimes \mathbf{Q}.$$

Le même argument montre que

$$\sigma(\alpha \cap \beta) = \sigma(\alpha) \cap \mathrm{ch}(\beta).$$

11) La propriété v) a été vérifiée en 2) et iv) s'obtient en prenant $M = X$.

7.4 Si X est un objet de $\mathscr{V}_S$ on pose

$$H_n(X, j) = Gr_jK'_{n-2j}(X) \otimes \mathbf{Q}, \quad n, j \in \mathbf{Z}.$$

D'après 7.2 c'est un foncteur covariant pour les morphismes projectifs de $\mathscr{V}_S$, et contravariant pour les immersions ouvertes. Appelons $X_{(p)}$ l'ensemble des points de X de dimension p. Si $x \in X_{(p)}$ on pose

$$H_n(x, j) = Gr_\gamma^{p-j} K_{n-2j}(k(x)) \otimes \mathbf{Q}.$$

THÉORÈME 8. i) *On a* $H_n(X, j) = 0$ *si* $n < 2j, j >$ dim X *ou* $j < -n$.

ii) *Si* $i:Y \to X$ *est une immersion fermée de* $\mathscr{V}_S$ *et* $\alpha:X - Y \to X$ *l'immersion ouverte complémentaire, on a une longue suite exacte naturelle*:

$$\ldots \to H_n(Y, j) \xrightarrow{i_*} H_n(X, j) \xrightarrow{\alpha^*} H_n(X - Y, j) \to H_{n-1}(Y, j) \to \ldots$$

iii) *Si* $\alpha:X' \to X$ *est un morphisme étale de* $\mathscr{V}_S$, *il existe un morphisme naturel*

$$\alpha^*:H_n(X, j) \to H_n(X', j),$$

qui fait de H_* *une "théorie d'homologie tordue" au sens de* [**6**], *définition* 1.2.

iv) *Il existe une suite spectrale* $E^r_{pq}(X)(j)$ *convergeant vers* $H_{p+q}(X, j)$, *covariante pour les morphismes projectifs, convergeant vers la filtration du niveau* (*cf. ci-dessus*) *et telle que*

$$E^1_{pq}(X)(j) = \bigoplus_{x \in X_{(p)}} H_{p+q}(x, j).$$

v) *On a*

$$H_{2j}(X, j) \simeq CH_j(X) \otimes \mathbf{Q},$$

où $CH_j(X)$ *est le groupe d'homologie de Chow de dimension* j *défini par Fulton* [**11**] (*et noté* $A_j(X)$).

Preuve. ii) Soit $X \to M$ une immersion fermée de $\mathscr{V}_S$, où M est un schéma lisse et équidimensionnel sur S. La suite exacte de K'-théorie

$$(*) \quad \ldots \to K'_m(Y) \xrightarrow{i_*} K'_m(X) \xrightarrow{\alpha^*} K'_m(X - Y) \to K'_{m-1}(Y) \to \ldots$$

est isomorphe à la suite exacte de cohomologie à support:

$$\ldots \to H_Y^{-m}(M, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+) \to H_X^{-m}(M, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+)$$
$$\to H^{-m}_{X-Y}(M - Y, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+) \to H_Y^{-m+1}(M, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+) \to \ldots$$

sur laquelle agissent les opérations d'Adams ψ^k. Il en résulte que les opérations ϕ^k respectent la suite exacte (∗) (tensorisée avec $\mathbf{Q}$), et qu'on a une longue suite exacte

$$\ldots \to H_n(Y, j) \xrightarrow{i_*} H_n(X, j) \xrightarrow{\alpha^*} H_n(X - Y, j) \to H_{n-1}(Y, j) \to \ldots$$

La même méthode montre que si $f:X' \to X$ est un morphisme projectif de $\mathscr{V}_S$, $Z' \to X'$ une immersion fermée, $Z = f(Z')$, et si

$$\alpha:X' - f^{-1}(Z) \to X' - Z'$$

désigne l'inclusion évidente, on a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & H_n(Z', j) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X', j) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & H_n(X' - Z', j) \arrow[r] \arrow[d, "f_* \alpha^*"] & H_{n-1}(Z', j) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & H_n(Z, j) \arrow[r] & H_n(X, j) \arrow[r] & H_n(X - Z, j) \arrow[r] & H_{n-1}(Z, j) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

iii) La définition qui suit de α^* pour un morphisme étale m'a été fournie par H. Gillet.

On note d'abord que si

$$f:X \to Y$$

est une immersion régulière fermée, et si d est la dimension relative de X dans Y, on a un morphisme naturel

$$f^*:H_n(Y, j) \to H_{n+2d}(X, j + d).$$

En effet, il est clair que $H_n(\cdot, j)$ possède la propriété d'invariance par homotopie. Cela permet, par déformation au cône normal (cf. 4.5, preuve du Théorème 3), de supposer que Y est l'espace total d'un fibré vectoriel sur X, et que $f:X \to Y$ est la section nulle de ce fibré. Un tel fibré sur X provient d'un objet lisse et équidimensionnel M de $\mathcal{V}_S$[**11**], et l'on a donc un diagramme cartasien

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & M \arrow[d, "f'"] \\ Y \arrow[r, "i'"] & N \end{tikzcd}$$

où i et i' sont des immersions fermées, M et N sont lisses et équidimensionnels sur S, f et f' sont les sections nulles d'un fibré vectoriel. On a donc un morphisme

$$f^*:K_m^Y(M) \to K_m^X(N)$$

qui respecte la λ-structure. Puisque

$$\dim(N) - j = \dim(M) - j - d,$$

on obtient

$$f^*:H_n(Y, j) \to H_{n+2d}(X, j + d).$$

On vérifie que f^* ne dépend pas du choix de la variété M d'où provient le fibré sur X (cf. 6.2).

Si maintenant $\alpha:X' \to X$ est un morphisme étale quasi-projectif, il existe une factorisation

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbf{P}^r_X \arrow[d, "p"] \\ & X \end{tikzcd}$$

où i est une immersion régulière localement fermée et $p:\mathbf{P}^r_X \to X$ l'espace projectif de rang r sur X. Si $X \to M$ est une immersion fermée de X dans un schéma lisse équidimensionnel de $\mathscr{V}_S$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathbf{P}^r_X \arrow[r] \arrow[d, "p"'] & \mathbf{P}^r_M \arrow[d] \\ X \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

permet de définir

$$p^*:K^X_m(M) \to K^{\mathbf{P}^r_X}_m(\mathbf{P}^r_M)$$

et donc

$$p^*:H_n(X, j) \to H_{n-2r}(\mathbf{P}^r_X, j - r).$$

L'inclusion

$$X' \xrightarrow{i} \mathbf{P}^r_X$$

se factorise par une immersion fermée régulière $X' \to U$ de dimension relative r et une immersion ouverte. D'après 7.2 et ce qui précède, on dispose donc de morphismes d'image inverse

$$H_{n-2r}(\mathbf{P}^r_X, j - r) \to H_{n-2r}(U, j - r) \to H_n(X', j).$$

On vérifie que le morphisme composé

$$\alpha^*:H_n(X, j) \to H_n(X', j)$$

ainsi défini ne dépend pas du choix de la factorisation

$$X' \to U \to \mathbf{P}^r_X \to X.$$

Compte tenu de ii), pour vérifier que H_* est une théorie d'homologie tordue au sens de [**6**], il reste à voir que si

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y' \arrow[r, "\alpha"] & Y \end{tikzcd}$$

est un diagramme cartésien, où α et β (resp. f et g) sont des morphismes étales quasi-projectifs (resp. des morphismes projectifs) de $\mathscr{V}_S$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} H_n(X', j) \arrow[d, "g_*"] & H_n(X, j) \arrow[l, "\beta^*"'] \arrow[d, "f_*"] \\ H_n(Y', j) & H_n(Y, j) \arrow[l, "\alpha^*"'] \end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1985-029-x Published online by Cambridge University Press

commute. Pour ce faire, on choisit une décomposition de α comme produit d'une immersion fermée régulière $Y' \to V$, d'une immersion ouverte $V \to \mathbf{P}^r_Y$, et de la projection $\mathbf{P}^r_Y \to Y$. Le morphisme β est alors le composé de l'immersion fermée régulière $X \to U$, de l'immersion ouverte $U \to \mathbf{P}^r_X$, et de la projection $\mathbf{P}^r_X \to X$, où

$$\mathbf{P}^r_X = \mathbf{P}^r_Y \underset{Y}{\times} X \text{ et } U = f^{-1}(V).$$

Ceci permet de se ramener au cas où α est une des trois applications $Y' \to V$, $V \to \mathbf{P}^r_Y$, ou $\mathbf{P}^r_Y \to Y$. Dans les deux derniers cas, en décomposant $X \to Y$ en produit d'une immersion fermée $X \to \mathbf{P}^s_Y$ et d'une projection $\mathbf{P}^s_Y \to Y$, on vérifie que

$$g_*\alpha^* = \beta^* f_*.$$

Si α est une immersion fermée régulière, par déformation au cône normal on peut supposer que α (resp. β) est la section nulle d'un fibré E (resp. g^*E) sur Y' (resp. X'). De plus g s'écrit comme produit d'une immersion fermée $X' \to \mathbf{P}^s_{Y'}$, et de la projection $\mathbf{P}^s_{Y'} \to Y'$. Soit $Y' \to N$ une immersion fermée de Y' dans un schéma lisse et équidimensionnel N de $\mathcal{V}_S$, tel que E provienne d'un fibré F sur N. Si g est la projection $\mathbf{P}^s_{Y'} \to Y'$, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}^s_{Y'} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] \arrow[dd, "g"'] & & g^*E \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& \mathbf{P}^s_N \arrow[rr] \arrow[dd, "h"] & & h^*F \arrow[dd] \\
Y' \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr] & & E \arrow[dr] & \\
& N \arrow[rr] & & F
\end{tikzcd}$$

montre que $g_*\alpha^* = \beta^* f_*$.

Si $g: X' \to Y'$ est une immersion fermée, le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "g"'] & g^*E \arrow[d] \\
Y' \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\
N \arrow[r] & F
\end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1985-029-x Published online by Cambridge University Press

montre aussi que $g_*\alpha^* = \beta^* f_*$, grâce aux isomorphismes

$$K'_*(X') \simeq K_*^{X'}(M) \quad \text{et} \quad K'_*(Y') \simeq K_*^{Y'}(N).$$

iv) Si $X \to M$ est une immersion fermée de $\mathscr{V}_S$, avec M lisse et équidimensionnel sur S, on a vu en 5.2 qu'il existe une suite spectrale $E_{rX}^{pq}(M)$ convergeant vers $K^X_{-p-q}(M)$ et telle que

$$E_{1X}^{pq}(M) = \bigoplus_{\substack{x \in M^{(p)} \\ x \in |X|}} H_x^{p+q}(M, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+).$$

Cette suite spectrale se décompose selon les valeurs propres des opérations d'Adams (une fois tensorisée avec $\mathbf{Q}$). On sait que si d est la dimension de Krull de M, on a

$$|X| \cap M^{(p)} = X_{(d-p)}$$

($|X|$ désigne l'ensemble des points de X). Le sous-espace de $E_{1X}^{pq}(M)$ où les opérations $E_1(\psi^k)$ agissent par multiplication par k^i s'écrit

$$\begin{aligned} E_{1X}^{pq}(M)(i) &= \bigoplus_{x \in X_{(d-p)}} Gr_\gamma^i K^x_{-p-q}(M) \otimes \mathbf{Q} \\ &= \bigoplus_{x \in X_{(d-p)}} \varinjlim_{x \in U \subset M} Gr_\gamma^i K^{\bar{x} \cap U}_{-p-q}(U) \otimes \mathbf{Q} \\ &= \bigoplus_{x \in X_{(d-p)}} Gr_\gamma^{i-p} K_{-p-q}(k(x)) \otimes \mathbf{Q}, \end{aligned}$$

d'après le Théorème 4. Par ailleurs, on a

$$Gr_\gamma^i K^X_{-p-q}(M) \otimes \mathbf{Q} \simeq Gr_{d-i} K'_{-p-q}(X) \otimes \mathbf{Q}.$$

On obtient donc le résultat cherché en posant

$$E^r_{pq}(X)(j) = E_{rX}^{d-p,d+q-2j}(M)(d-j).$$

La suite spectrale ainsi définie ne dépend pas du choix de l'immersion fermée $X \to M$. La filtration d'aboutissement est bien la filtration par la dimension du support (ou niveau), car $E_{rX}^{pq}(M)$ aboutit à la filtration du coniveau.

i) Le résultat précédent et le Théorème 1 montrent que $E^r_{pq}(X)(j)$ est nul à moins que $-2j \leqq p + q$, $j \leqq p \leqq \dim(X)$, et $p - j \leqq p + q - 2j$, donc $j \leqq p + q$.

iv) Si $p + q < 2j$, on a

$$E^1_{pq}(X)(j) = 0,$$

et si $p + q = 2j$, on a

$$E^1_{pq}(X)(j) = \begin{cases} \bigoplus_{x \in X_{(j)}} Gr_\gamma^0 K_0(k(x)) \otimes \mathbf{Q} = \bigoplus_{x \in X_{(j)}} \mathbf{Q} & \text{si } p = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si $p + q = 2j + 1$, on trouve

$$E^1_{pq}(X)(j) = \begin{cases} \bigoplus_{x \in X_{(j-1)}} Gr^1_\gamma K_1(k(x)) \otimes \mathbf{Q} = \bigoplus_{x \in X_{(j-1)}} k(x)^* \otimes \mathbf{Q} \\ \quad \text{si } p = j + 1 \\ 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Donc

$$H_{2j}(X, j) = \operatorname{Coker}(E^1_{j+1,j}(X)(j) \xrightarrow{d^1} E^1_{j,j}(X)(j)).$$

D'après Quillen [**25**], la flèche d^1 associe à une fonction rationnelle non nulle sur une sous-variété irréductible de dimension $i + 1$ son diviseur au sens de [**11**]. Donc

$$H_{2j}(X, j) \simeq CH_j(X) \otimes \mathbf{Q}.$$

7.5 Si $Y \subset X$ est une immersion fermée de $\mathscr{V}_S$ et si X est lisse sur S, posons

$$H^p_Y(X, i) = Gr^i_\gamma K^Y_{2i-p}(X) \otimes \mathbf{Q}.$$

THÉORÈME 9. *Les groupes $H^p_Y(X, i)$ et $H_n(X, j)$ vérifient tous les axiomes d'une "théorie à dualité de Poincaré avec supports" au sens de* [**6**], *définition* 1.3, *si ce n'est que les groupes $H^p_Y(X, i)$ ne sont définis que quand X est lisse sur S.*

Preuve. Les propriétés 1.1 de loc. cit. de la théorie cohomologique $H^p_Y(X, i)$ sont claires, et les propriétés 1.2 de la théorie homologique $H_n(X, j)$ ont été montrées dans le Théorème 8. Il reste à vérifier les propriétés 1.3.

Si $Y \to X$ est une immersion fermée, si X est equidimensionelle sur S, et si $X \to S$ est surjectif, le produit

$$Gr^{\dim(X)-j}_\gamma K_{n-2j}(X) \otimes Gr^i_\gamma K^Y_{2i-p}(X) \to Gr^{\dim(X)+i-j}_\gamma K^Y_{2i-2j+n-p}(X)$$

définit un cap-produit

$$\cap : H_n(X, j) \otimes H^p_Y(X, i) \to H_{n-p}(X, j - i).$$

Le cas où $X \to S$ n'est pas surjectif se traîte pareillement.

Etant donné un diagramme cartésien

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & X' \arrow[d, "\alpha"] \\ Y \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales (resp. verticales) sont des immersions fermées (resp. des morphismes étales) de $\mathscr{V}_S$, on a, si

https://doi.org/10.4153/CJM-1985-029-x Published online by Cambridge University Press

$$a \in H^p_Y(X, i) \text{ et } z \in H_n(X, j),$$

$$\alpha^*(a) \cap \alpha^*(z) = \beta^*(a \cap z).$$

Utilisant la même décomposition de α que dans la preuve de Théorème 8, on peut remplacer α par une immersion régulière fermée, une immersion ouverte, ou une projection $\mathbf{P}^r_Y \to Y$. La formule ci-dessus est alors claire (cf. Théorème 7, iv)).

La formule de projection pour le cap-produit ([**6**], 1.3.3) résulte de la formule de projection en K-théorie [**25**].

Si X est irréductible de dimension d, on définit la classe fondamentale

$$\eta_X \in H_{2d}(X, d) = CH_d(X) \otimes \mathbf{Q}$$

comme la classe du cycle associé à X. Il est clair que si $\alpha:X' \to X$ est un morphisme étale, on a

$$\alpha^*\eta_X = \eta_{X'}.$$

Si X est lisse sur S de dimension d et si $Y \to X$ est une immersion fermée, le cap-produit

$$\eta_X \cap : H^{2d-n}_Y(X, d - j) \to H_n(Y, j)$$

coïncide avec l'isomorphisme

$$Gr^{d-j}_\gamma K^Y_{n-2j}(X) \otimes \mathbf{Q} \to Gr_j K'_{n-2j}(Y) \otimes \mathbf{Q}.$$

Remarques. Il serait intéressant d'étendre la définition de $H^p_Y(X, i)$ au cas où X n'est pas nécessairement lisse (cf. 6.2).

La conjecture de 2.9 signifierait que

$$H^p_Y(X, i) = 0 \quad \text{si } p < 0.$$

Beilinson annonce dans [**5**] la plupart des résultats de ce paragraphe. Il pense que si X est régulier il existe des complexes de faisceaux abéliens pour la topologie de Zariski de X, notés $\Gamma(i)$, $i \geqq 0$, qui sont acycliques en degrés négatifs et tels que

$$H^p(X, i) \simeq \mathbf{H}^p_{\mathrm{Zar}}(X, \Gamma(i)) \otimes \mathbf{Q}.$$

La conjecture de 6.4 permettrait de choisir

$$(\Gamma(i)_n, d) = (\mathbf{LE}_1^{i-n,-i}(\cdot), \mathbf{d}_1),$$

où $\mathbf{LE}_1^{p,q}(\cdot)$ désigne le faisceau associé au préfaisceau

$$U \mapsto LE_1^{p,q}(\Gamma(U, \mathcal{O}_X)).$$

8. Sur la p-torsion de la K-théorie des schémas de caractéristique p. On considère dans ce paragraphe un schéma X défini sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{F}_p)$ où $\mathbf{F}_p$ est le corps à p éléments.

8.1. PROPOSITION 8. *Soit $\Phi: X \to X$ l'endomorphisme de Frobenius de X, et $\Phi^*: KX \to KX$ le morphisme induit par Φ en K-théorie. On a $\Phi^* = \psi^p$, si X est affine ou régulier.*

Démonstration. Ce résultat est montré dans [**16**] dans le cas affine.

Si X est un schéma régulier, notons $R_{\mathbf{F}_p}(GL_N)$ l'anneau des représentations virtuelles du schéma en groupe GL_N sur $\mathbf{F}_p$. On a comme dans 1.2 un morphisme

$$f: \lim_{\substack{\leftarrow \\ N}} \mathbf{R}_{F_p}(GL_N) \to \operatorname{Hom}(\mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+, \mathbf{Z} \times \mathbf{BGL}^+).$$

Les morphismes Φ^* et ψ^p sont induits par des éléments de

$$\lim_{\substack{\leftarrow \\ N}} R_{\mathbf{F}_p}(GL_N).$$

On est donc ramené à montrer que

$$\Phi^*(\mathrm{id}_N - N) = \psi^p(\mathrm{id}_N - N) \text{ dans } R_{\mathbf{F}_p}(GL_N).$$

Si T_N est le tore maximal canonique de GL_N, on sait (cf. [**27**]) que le groupe $R_{\mathbf{F}_p}(GL_N)$ se plonge par restriction dans $R_{\mathbf{F}_p}(T_N)$, et que l'image de id_N est la somme de N caractères de T_N. Si χ est un tel caractère on a

$$\Phi^*(\chi) = \chi^p = \psi^p(\chi).$$

Comme Φ^* et ψ^p sont des endomorphismes d'anneaux, on en déduit que $\Phi^* = \psi^p$.

8.2. Supposons que X est de type fini, de dimension d, et qu'il est soit affine, soit régulier. Le morphisme $\Phi: X \to X$ est, rappelons-le, l'identité sur l'ensemble sous-jacent à X, et il élève à la puissance p les éléments du faisceau structural. C'est un morphisme fini, et on peut donc lui associer, d'après [**25**], un transfert en K-théorie:

$$\Phi_*: KX \to KX.$$

Supposons que $\Phi_*(1) = p^r$, où r est un entier positif.

THÉORÈME 10. *Si m est un entier positif et $x \in F_\gamma^{r+1} K_m X$ est un élément de p-torsion, on a*

$$p^{(m+d-r)r} x = 0.$$

Preuve. On peut, d'aprés le Théorème 1, supposer que $r < m + d$ (sinon $F_\gamma^{r+1} K_m X = 0$). Désignons par j l'entier tel que

$$x \in F_\gamma^j K_m X \text{ et } x \notin F^{j+1} K_m X.$$

On va montrer par récurrence descendante sur j que

$$p^{(m+d+1-j)r}x = 0,$$

ce qui permettra de conclure puisque par hypothèse $j \geqq r + 1$.

Si $j = m + d + 1$ il n'y a rien à montrer car $x = 0$.

Supposons l'énoncé vérifié pour $j + 1$. On sait (1.5) que

$$\psi^p(x) = p^j x + y, \text{ où } y \in F_\gamma^{j+1}K_m X.$$

Comme y est de p-torsion, on a, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$p^{(m+d-j)r}y = 0.$$

Par ailleurs,

$$\Phi_*(\psi^p(x)) = \Phi_*(\Phi^*(x)) = \Phi_*(1)x = p^r x$$

à cause de la formule de projection. On en déduit

$$p^{(m+d+1-j)r}x = p^{(m+d-j)r+j}\Phi_*(x).$$

Posons

$$\alpha = (m + d + 1 - j)r \text{ et } \beta = (m + d - j)r + j.$$

On a $\alpha < \beta$.

Soit N le plus petit entier tel que $p^N x = 0$. Si $N < \beta$ on a

$$p^\alpha x = \Phi_*(p^\beta x) = 0.$$

Si $N \geqq \beta$ on a

$$p^{N+\alpha-\beta}x = \Phi_*(p^N x) = 0,$$

ce qui contredit la définition de N. Donc $p^\alpha x = 0$.

Remarque. Si X est une variété de dimension d sur un corps F de degré de transcendance δ sur $\mathbf{F}_p$, on a $r = d + \delta$.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. W. Anderson, *Relationship among K-theories*, Lec. Notes in Maths. *341* (1972), 57-72.

2. M. Atiyah and D. O. Tall, *Group representations, λ-rings and J-homomorphism*, Topology *8* (1969), 253-297.

3. H. Bass, *Algebraic K-theory* (Benjamin, New York, 1968).

4. P. Baum, W. Fulton and R. MacPherson, *Riemann-Roch for singular varieties*, Publ. Math. IHES *45* (1975), 101-145.

5. A. Beilinson, *Régulateurs supérieurs et valeurs de fonction L* (en russe), prépublication, (1983).

6. S. Bloch and A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. *7* (1974), 181-202.

7. A. K. Bousfield and D. M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Lec. Notes in Maths. *304* (1975).

8. K. S. Brown, *Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology*, Trans. Amer. Math. Soc. *186* (1974), 419-458.

9. K. S. Brown, and S. M. Gersten, *Algebraic K-theory as generalized cohomology*, Lec. Notes in Maths. *341* (1973), 266-292.
10. B. Dayton and C. Weibel, *A spectral sequence for the K-theory of affine glued schemes*, Lec. Notes in Maths. *854* (1980), 24-92.
11. W. Fulton, *Rational equivalence on singular varieties*, Publ. Math. IHES *45* (1975), 147-167.
12. H. Gillet, *Riemann-Roch theorems for higher algebraic K-theory*, Advances in Maths. *40* (1981), 203-289.
13. H. Gillet et C. Soulé, en préparation.
14. A. Grothendieck et al., *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, Lec. Notes in Maths. *225*, SGA 6 (1971).
15. H. Hiller, *λ-rings and algebraic K-theory*, Journal of Pure and Applied Algebra *20* (1981), 241-266.
16. C. Kratzer, *λ-structure en K-théorie algébrique*, Comm. Math. Helv. *55* (1970), 233-254.
17. ——— *Opérations d'Adams et représentations de groupes*, Ens^{nt}. Math II *6* (1980), 141-154.
18. S. Landsburg, *Relative cycles and algebraic K-theory*, prépublication (1983).
19. J-L. Loday, *K-théorie algébrique et représentations de groupes*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. *9* (1976), 309-377.
20. Y. Manin, *Lectures on the K-functor in algebraic geometry*, Russ. Math. Surveys *24* (1969), 1-89.
21. A. S. Merkurjev et A. A. Suslin, *K-cohomologie des variétés de Severi-Brauer et symboles des restes normiques* (en russe), Izv. Akad. Nauk SSSR *46* (1982), 1011-1046.
22. J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Annals of Maths. Studies *72* (1971).
23. J. Milnor and J. Stasheff, *Characteristic classes*, Annals of Maths. Studies *76* (1974).
24. J. Milnor and J. Moore, *On the structure of Hopf algebras*, Ann. Math. *81* (1965), 211-264.
25. D. Quillen, *Higher algebraic K-theory I*, Lec. Notes in Maths. *341* (1973), 85-147.
26. ——— *Homotopical algebra*, Lec. Notes in Maths. *43* (1967).
27. J.-P. Serre, *Groupes de Grothendieck des schémas en groupes déployés*, Publ. Math. IHES *34* (1968), 37-52.
28. V. V. Schechtman, *Riemann-Roch's theorem in algebraic K-theory*, Dep. VINITI, (1979).
29. C. Soulé, *Operations on etale K-theory. Applications*, Lec. Notes in Maths *966* (1982), 271-303.
30. ——— *Groupes de Chow et K-théorie de variétés sur un corps fini*, Math. Ann. *268* (1984), 317-345.
31. ——— *K-théorie et zéros aux points entiers de fonctions zêta*, Proc. Congrès Int. des Math., Varsovie (1982).
32. J. Stienstra, *Cartier-Dieudonné theory for the Chow groups*, prépublication, Leiden (1983).
33. A. A. Suslin, *Stability in algebraic K-theory*, Lec. Notes in Maths *966* (1982), 304-333.
34. ——— *Mennicke symbols and their applications in the K-theory of fields*, Lec. Notes in Maths. *966* (1982), 334-356.
35. ——— *Homology of GL_n, characteristic classes and Milnor K-theory*, Lec. Notes in Maths. *1046* (1984), 357-375.
36. C. Weibel, *KV-theory of categories*, Transactions AMS. *267* (1981), 621-635.

Université Paris VII,
Paris, France