EXTENSIONS RADICALES ET QUASI-RADICALES DANS LES ANNEAUX

G. Thierrin

(received September 1, 1961)

Soient un anneau A et un sous-ensemble (non vide) B de A. L'anneau A est dit:

Extension radicale de B, si pour tout $a \in A$, il existe un entier $n(a) > o$, dépendant de a, tel que $a^{n(a)} \in B$.

Extension quasi-radicale de B, si pour tout $a \in A$, il existe un entier $n(a) > 1$, dépendant de a, tel que $a^{n(a)} - a \in B$.

En imposant certaines conditions à A ou B, on peut alors obtenir certains renseignements sur la structure de A. Dans le cas où B est un sous-anneau de A, plusieurs travaux ont été consacrés récemment à ce sujet. Notamment, on a cherché quelles conditions, imposées à A ou B, entraînent la commutativité de A. (Voir en particulier [2], [3], [4], [5] et [6].)

1. Dans [3], Faith a montré qu'un sous-anneau B d'un anneau primitif A, tel que A soit extension radicale de B, est lui-même primitif. Dans [3] également, il a montré que tout anneau A sans nil idéal $\neq \{o\}$, qui est extension radicale d'un sous-corps $B \neq A$, est un corps commutatif. De ces résultats, on peut déduire facilement le théorème suivant.

THEOREME 1. Tout anneau primitif A, qui est extension radicale d'un sous-anneau $B \neq A$ tel que

$$Bb \subseteq bB \text{ pour tout } b \in B$$

est un corps commutatif.

Canad. Math. Bull. vol. 5, no. 1, January 1962.

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-005-x Published online by Cambridge University Press

Preuve. D'après [3], B est primitif. D'autre part, il est immédiat que la relation $Bb \subseteq bB$ pour tout $b \in B$ entraîne que B est un corps. Par conséquent, A est un corps commutatif d'après [3].

THEOREME 2. Tout anneau primitif A, qui est extension radicale d'un sous-anneau $B \neq A$ tel que

$$Ab \subseteq bA \text{ pour tout } b \in B$$

est un corps commutatif.

Preuve. Montrons d'abord que A est un corps. L'anneau A étant primitif, il existe un idéal à droite modulaire maximal M tel que $(M : A) = \{o\}$. Soit $a \in M$. Il existe un entier $n > o$ tel que $a^n \in B$, ce qui entraîne $Aa^n \subseteq a^nA \subseteq M$ et donc $a^n = o$. Par conséquent, M est un nil idéal à droite et donc $M = \{o\}$, car un anneau primitif ne possède pas de véritable nil idéal à droite. L'idéal $\{o\}$ étant un idéal à droite modulaire maximal, il s'ensuit alors que A est un corps. D'après Faith [2], tout corps A qui est extension radicale d'un sous-anneau $B \neq A$ est commutatif.

Rappelons que, d'après [7], un anneau A est dit compressif, si la relation $a_1^2a_2^2 \ldots a_n^2 = o$ entraîne $a_1a_2 \ldots a_n = o$. Un anneau est compressif si et seulement s'il est somme sous-directe d'anneaux sans diviseurs de zéro.

THEOREME 3. Tout anneau compressif A, qui est extension radicale d'un sous-anneau commutatif B tel que

$$aB = Ba \text{ pour tout } a \in A$$

est commutatif.

Preuve. Il suffit de démontrer le théorème pour le cas où A est sans diviseurs de zéro.

Soient $a, b \in A$, $a, b \neq o$. Il existe un entier $n > o$ tel que $o \neq b^n \in B$, et par conséquent un entier $m > 1$ tel que $o \neq b^m \in B$. De $aB = Ba$ suit alors $b^ma \in aB$ avec $b^ma \neq o$. Il existe donc $c \in B$ tel que $ac = b^ma$. D'où

$$o \neq a.c = b.b^{m-1} a .$$

Par conséquent, l'anneau A peut être plongé dans un corps K (Voir par exemple Dubreil [1]). Chaque élément de K est de la forme ab^{-1}, a, b $\in$ A, b $\neq$ o.

L'ensemble $S = \{ab^{-1} \mid a, b \in B, b \neq o\}$ est un sous-corps commutatif de K. Si $A \subseteq S$, alors A est commutatif. Si $A \not\subseteq S$, alors S est un sous-corps propre de K. On vérifie facilement que la condition aB = Ba pour tout a $\in$ A entraîne que S est invariant par rapport aux automorphismes intérieurs de K. Le théorème de Brauer-Cartan-Hua entraîne alors que S est dans le centre de K. Par conséquent, B est contenu dans le centre de A. D'après Herstein [4], tout anneau sans nil idéal $\neq \{o\}$, qui est extension radicale du centre, est commutatif.

2. Dans [5], Herstein a montré que tout anneau, qui est extension quasi-radicale de son centre, est commutatif. Ce résultat, ainsi que le théorème de Brauer-Cartan-Hua, vont nous permettre de démontrer le théorème suivant.

THEOREME 4. Tout anneau régulier et primitif A, qui est extension quasi-radicale d'un sous-anneau B $\neq$ A, tel que

$$Ba \subseteq aB \text{ pour tout } a \in A$$

est un corps commutatif.

Preuve. Montrons d'abord que A est un corps. On voit facilement que pour tout a $\in$ A, il existe N entier positif aussi grand que l'on veut tel que $a^N - a \in B$. Par conséquent, tout élément nilpotent de A appartient à B. D'autre part, pour tout a $\in$ A et tout idempotent e $\in$ A, on a ae = eae. En effet, posons z = ae - eae. On a $z^2 = o$ et donc z $\in$ B. De z = ze $\in$ B ze $\in$ Be $\subseteq$ eB suit l'existence d'un élément t tel que z = ze = et. D'où o = ez = e^2t = et = z.

L'anneau A étant primitif, il existe un idéal à droite modulaire maximal M tel que $(M : A) = \{o\}$. Soit a $\in$ M. Comme A est régulier, il existe b $\in$ A tel que aba = a. L'élément ab = e est idempotent et e $\in$ M. Par conséquent

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-005-x Published online by Cambridge University Press

$exe = xe$ pour tout $x \in A$ et $Ae \subseteq M$. D'où $e = o$ et $M = \{o\}$. Il suit de là que A est un corps.

Si $B = o$, A est extension quasi-radicale de son centre, donc commutatif. Soit $B \neq o$. Alors B est un sous-corps de A. En effet, soit $b \in B$, $b \neq o$. Il existe $n > 1$ tel que $(b^{-1})^n - b^{-1} \in B$. D'où $b^{1-n} - 1 \in B$ et $1 - b^{n-1} \in B$. Par conséquent, $1 \in B$ et $b^{1-n} \in B$, ce qui entraine $b^{-1} \in B$.

La relation $Ba \subseteq aB$ pour tout $a \in A$ entraîne que B est un sous-corps invariant par rapport à tout automorphisme intérieur de A. Comme $B \neq A$, B est alors contenu dans le centre de A d'après le théorème de Brauer-Cartan-Hua.

Le corps A est alors commutatif d'après Herstein [5].

Corollaire. Tout anneau régulier A, qui est extension quasi-radicale d'un sous-anneau B tel que

$$Ba \subseteq aB \text{ pour tout } a \in A$$

est somme sous-directe de corps.

Preuve. L'anneau régulier A est somme sous-directe d'anneaux réguliers primitifs ayant même propriété que A. Il suffit par conséquent de montrer que si A est régulier et primitif, alors A est un corps. Si $B \neq A$, cela découle du théorème. Si $B = A$, alors $Aa \subseteq aA$ pour tout $a \in A$ et donc tout idéal à droite de A est bilatère. Comme A est un anneau primitif, cette propriété entraîne que A est un corps.

3. Soit un anneau A. L'ensemble $N_A = \{a \mid a \in A, Aa \subseteq aA\}$ sera appelé le <u>normalisateur à droite</u> de A.

THEOREME 5. Tout anneau semi-simple A, qui est extension radicale de son normalisateur à droite, est somme sous-directe de corps.

Preuve. Il suffit de montrer que si A est primitif, alors A est un corps. Soit M un idéal à droite modulaire maximal tel que $(M : A) = \{o\}$ et soit $a \in M$. Il existe $n > o$ tel que $Aa^n \subseteq a^nA \subseteq M$, ce qui entraîne $a^n \in (M : A)$, donc $a^n = o$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-005-x Published online by Cambridge University Press

Par conséquent, M est un nil idéal à droite et donc $M = \{o\}$, c'est-à-dire A est un corps.

THEOREME 6. Tout anneau semi-simple A, qui est extension quasi-radicale de son normalisateur à droite, est somme sous-directe de corps.

Preuve. Comme pour le théorème précédent, il suffit de considérer le cas où A est primitif. Soit M un idéal à droite modulaire maximal tel que $(M:A) = \{o\}$ et soit $a \in M$. Il existe $n > 1$ tel que

$$A(a^n - a) \subseteq (a^n - a)\, A \subseteq M.$$

D'où $a^n - a = 0$. Supposons $a \neq o$. Alors $e = a^{n-1}$ est un élément idempotent $\neq o$ et $e \in M$. Soit $x \in A$ et posons $b = xe - exe$; on a $b^2 = o$. Il existe un entier $m > 1$ tel que $A(b^m - b) \subseteq (b^m - b)A$. D'où, puisque $b^m = o$, $Ab \subseteq bA$ et $bAb \subseteq b^2A = \{o\}$. Comme A est primitif, donc premier, on a $b = o$, c'est-à-dire $xe = exe \in M$. Par conséquent $Ae \subseteq M$ et $e = o$, ce qui est contradictoire. Donc $M = \{o\}$ et A est un corps.

THEOREME 7. Soit A un anneau qui est extension quasi-radicale de son normalisateur à droite. Alors l'ensemble N des éléments nilpotents de A est un idéal contenu dans le normalisateur à droite de A et l'anneau-quotient A/N est un sous-anneau d'une somme directe de corps.

Preuve. Supposons d'abord que A est un anneau premier et soit $a^2 = o$. Il existe $n > 1$ tel que $A(a^n - a) \subseteq (a^n - a)A$. De $a^n = o$ suit $Aa \subseteq aA$, $aAa \subseteq a^2A = \{o\}$ et donc $a = o$. L'anneau A ne contenant pas d'éléments nilpotents $\neq o$ est par conséquent sans diviseurs de zéro. De plus A peut être plongé dans un corps. Il suffit pour cela de montrer que pour tout couple $a, b \in A$, $a, b \neq o$, il existe $c, d \in A$ tel que

$$ac = bd \neq o.$$

On a $A(a^n - a) \subseteq (a^n - a)A$ pour un certain $n > 1$. Si $a^n - a = o$, alors $e = a^{n-1}$ est un élément idempotent $\neq o$, et, comme A est sans diviseurs de zéro, e est élément unité de A. D'où

$$a^{n-1} b = b . a^{n-1} \neq o.$$

Si $a^n - a \neq o$, alors $b(a^n - a) \in (a^n - a)A$ et il existe c tel que $(a^n - a)c = b(a^n - a) \neq o$. D'où

$$a(a^{n-1}c - c) = b(a^n - a) \neq o.$$

Considérons maintenant le cas général. Soit N le radical inférieur de A; N est l'intersection des idéaux premiers P_i de A et N est un nil idéal. Les anneaux-quotients $Q_i = A/P_i$ sont des anneaux premiers qui sont chacun extension radicale de leur normalisateur à droite. D'après ci-dessus, ce sont donc des anneaux sans diviseurs de zéro pouvant être plongés dans des corps. Par conséquent, N est l'ensemble des éléments nilpotents de A et A/N est isomorphe à une somme sous-directe des anneaux Q_i, donc sous-anneau d'une somme directe de corps.

Finalement, montrons que N est contenu dans le normalisateur à droite N_A de A. Il faut montrer que $a^n = o$ entraîne $a \in N_A$. Si $n = 2$, c'est immédiat. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$ et soit $a^n = o$. Alors $a^{2(n-1)} = o$ et donc $a^2 \in N_A$. Il existe $m > 1$ tel que $A(a^m - a) \subseteq (a^m - a)A$. Soit $x \in A$. Il existe alors $y \in A$ tel que

$$xa^m - xa = a^m y - ay.$$

D'où $xa = ay - a^m y + xa^m$. Comme $Aa^2 \subseteq a^2 A$, on a $xa^m \in aA$ et $xa \in aA$. Par conséquent $Aa \subseteq aA$ et $a \in N_A$.

REFERENCES

1. P. Dubreil, Algèbre I, Deuxième édition, Gauthier-Villars, Paris 1954.

2. C. Faith, Algebraic division rings extensions, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 11 (1960), pp. 43-53.

3. C. Faith, Radical extensions of rings, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 12 (1961), pp. 274-283.

4. I. N. Herstein, A theorem on rings, Can. J. Math., vol. 5 (1953), pp. 238-241.

5. I. N. Herstein, A generalization of a theorem of Jacobson III, Amer. J. Math., vol. 75, (1953), pp. 105-111.

6. N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. 37, 1956.

7. G. Thierrin, Sur les idéaux complètement premiers d'un anneau quelconque, Bull. Acad. Royale de Belgique, vol. 43 (1957), pp. 124-132.

Université de Montréal
et
Summer Research Institute, Kingston

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-005-x Published online by Cambridge University Press