Ergod. Th. & Dynam Sys. (1982), **2**, 241–251
Printed in Great Britain

Symétrie et forme normale des centres et foyers dégénérés

ROBERT MOUSSU

Département de Mathématiques, Laboratoire de Topologie, Université de Dijon, 21004 Dijon Cedex

(*Received* 18 *January* 1982)

Abstract. Consider an analytic differential equation $\omega = adx + bdy$ with an algebraically isolated singularity and without a separatrix. The germ at $0 \in \mathbb{R}^2$ of the 1-jet $y\,dy$ is either a focus or a centre. The equation has C^∞ normal form of the type $\frac{1}{2}d(ny^2 + x^{2n}) + F(x)\,dy$ with $F(x) = F(-x)$ if and only if the germ is a centre.

0. *Introduction*

Dans cet article $\omega = adx + bdy = 0$ désigne le germe à l'origine $0 \in \mathbb{R}^2$ d'une *équation différentielle* C^∞ (resp. analytique), à *singularité algébriquement* isolée; c'est à dire $a, b \in \mathscr{E}_2$ (resp. $\mathcal{O}_2$) l'anneau des germes en $0 \in \mathbb{R}^2$ de fonctions C^∞ (resp. analytiques) et $\dim_{\mathbb{R}} \mathscr{E}_2/\{a, b\} < \infty$.

Une *séparatrice* de ω est un germe en 0 de courbe γ, C^∞, solution de $\omega = 0$, qui n'est pas plat; c'est à dire $\gamma^*(\omega) = 0$ et il existe $k > 0$ tel que $\gamma^{(k)}(0) \neq 0$.

Lorsque l'équation $\omega = 0$ n'a pas de séparatrice, il est bien connu depuis les travaux de Bendixson–Dulac–Poincaré, qu'à un germe de plongement de $(\mathbb{R}, 0)$ dans $(\mathbb{R}^2, 0)$, transverse à $\omega = 0$, i.e $\tau^*(\omega)(t) \neq 0$ si $t \neq 0$, correspond un germe d'homéomorphisme P_τ de $(\mathbb{R}^+, 0)$ appelé *application premier retour de Poincaré*. L'équation $\omega = 0$ est dite: de *type centre* si $P_\tau = (1_{\mathbb{R}^+}, 0)$, de *type foyer* si $P(t) \neq t$ pour $t \neq 0$, de *type mixte* si P_τ possède une infinité de points fixes.

L'équation $\omega = 0$ est *non dégénérée* si l'une au moins des valeurs propres λ_i, $i = 1, 2$ de la matrice jacobienne

$$M(\omega) = \frac{D(b, -a)}{D(x, y)}(0)$$

est non nulle. Dans ce cas, $\omega = 0$ ne possède pas de séparatrice si et seulement si $\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 \notin \mathbb{R}$ et on a les résultats classiques:

* Si $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, $\omega = 0$ est linéarisable, de type foyer [**8**].

** Si $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$, $\omega = 0$ est de type centre si et seulement si elle s'écrit dans de bonnes coordonnées $d(x^2 + y^2) = 0$ [**8**], [**6**] sinon elle possède une forme normale [**11**].

L'équation $\omega=0$ est *dégénérée de degré de dégénérescence* 1 [**3**] si les deux valeurs propres de $M(\omega)$ sont nulles et $M(\omega)\neq 0$; c'est à dire le jet d'ordre 1 de ω en 0 s'écrit $\omega_1=y\,dy$ dans de bonnes coordonnées. Nous *supposerons cette condition réalisée dans toute la suite*. Le but de ce travail est de montrer comment se généralise alors * et **. Rappelons tout d'abord (avec nos notations) la proposition de 'mise' sous forme normale de Takens [**12**, p. 57].

PROPOSITION 1. *Il existe un C^∞-difféomorphisme de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tel que pour $q\in\mathbb{N}\cup\infty$, assez grand ($q\geq l, m$), le jet d'ordre q de $\varphi^*(\omega)$ en 0 s'écrive*:

$$\mathcal{T}^q\varphi^*(\omega)=\omega_q=\tfrac{1}{2}d\left(\frac{l}{2}y^2+\varepsilon x^l\right)+\left(\sum_{k=m}^{q}F_kx^k\right)dy$$

où $l\geq 3$, $\varepsilon=\pm$, $m\geq 2$ et $F_m\neq 0$.

Dans [**4**], Lyapunov étudie une telle équation dans le cadre analytique. Certains de ses résultats qui restent vrais dans le cadre C^∞ s'énoncent.

PROPOSITION 2. *L'équation $\omega=0$ ne possède pas de séparatrice si et seulement si*:

$$l=2n,\qquad \varepsilon=+,\qquad m>n\quad \text{ou } m=n \text{ et } F_m^2<4m.$$

Son application premier retour P_τ, correspondant à un plongement τ, est C^∞ (analytique si ω est analytique).

Dans toute la suite P $(=P_\tau)$ désigne l'application premier retour de $\omega=0$ correspondant à un plongement τ tangent à l'axe $y=0$ et on appelle ordre de platitude de $\omega=0$, l'ordre $p(\omega)\in\mathbb{N}\cup\infty$ de $P(t)-t$ en 0. Avec les notations de la proposition 1 on a:

PROPOSITION 3. *Si l'équation $\omega=0$ ne possède pas de séparatrice,*

$$p(\omega)=2q(\omega)+2-n$$

où $q(\omega)$ est le plus petit des q tels que $F_{2q+1}\neq 0$; plus précisément il existe $C>0$ tel que

$$P(t)-t=-CF_{2q(\omega)+1}t^{p(\omega)}+\cdots.$$

Ainsi $p(\omega)=\infty$ si et seulement si $\sum F_kx^k$ est pair. Plus précisément on a:

THÉORÈME 1. *L'équation $\omega=0$ ($\mathcal{T}^1\omega=y\,dy$) est de type centre si et seulement si il existe un C^∞-difféomorphisme φ de $(\mathbb{R}^2,0)$ tel que*:

$$\varphi^*(\omega)=\tfrac{1}{2}d(ny^2+x^{2n})+G(x^2)\,dy$$

où $G(x^2)=x^mg(x^2)$, $g(0)\neq 0$ et $n<m$ ou $n=m$ et $g(0)^2<4m$.

Remarque 1. Contrairement à ce qui se passe pour une équation de type centre, non dégénérée, une équation $\omega=0$ vérifiant les hypothèses du théorème n'a pas en général d'intégrale première. En effet, supposons qu'il existe $h, H\in\mathscr{E}_2$ tels que

$$h\omega=dH,\qquad h(0)\neq 0.$$

Un résultat classique de Whitney permet d'écrire:

$$(h_1(x^2,y)+xh_2(x^2,y))\omega=d(H_1(x^2,y)+xH_2(x^2,y))$$

où h_1, h_2, H_1, $H_2\in\mathscr{E}_2$. De l'invariance de $\varphi^*(\omega)$ par l'involution

$$(x,y)\to(-x,y),$$

on déduit que

$$h_1(x^2, y)\omega = d(H_1(x^2, y)), \qquad h_1(0) \neq 0.$$

C'est à dire que $H_1(u, y)$ est une intégrale première de l'équation

$$\alpha = \tfrac{1}{2}d(ny^2 + u^n) + G(u)\,dy.$$

Or, une telle équation n'a pas en 'général' d'intégrale première [**9**].

THÉORÈME 2. *L'équation $\omega = 0$ ($\mathcal{T}^1\omega = y\,dy$) est de type foyer non plat ($p(\omega) < \infty$) si et seulement si il existe un C^∞-difféomorphisme φ de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tel que*

$$\varphi^*(\omega) = \tfrac{1}{2}d(ny^2 + x^{2n}) + F(x)\,dy$$

où $\mathcal{T}^\infty F(x) \neq \mathcal{T}^\infty F(-x)$, $F(x) = x^m f(x)$, $f(0) \neq 0$ et $m < n$ ou $n = m$ et $f(0)^2 < 4m$.

Remarque 2. Supposons ω analytique ($\mathcal{T}^1\omega = y\,dy$). Alors $\omega = 0$ est, d'après la proposition 2, du type centre ou foyer non plat. Mais le difféomorphisme φ des théorèmes 1 ou 2 est seulement C^∞. Est-il possible de trouver un φ analytique? Plus modestement si $\omega = 0$ est du type centre existe-t-il une involution analytique I telle que $I^*(\omega) \wedge \omega = 0$?

Remarque 3. La proposition 2 et les théorèmes 1 et 2 s'appliquent aux équations différentielles du second ordre du type:

$$\text{(E)} \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + f(x)\frac{dx}{dt} + x^{2n-1} = 0.$$

En effet cette équation s'écrit encore:

$$\frac{dY}{dt} = -Yf(x) - x^{2n-1},$$

$$\frac{dx}{dt} = Y,$$

ou, si l'on ne s'intéresse qu'aux orbites:

$$\omega = Y\,dY + (x^{2n-1} + Yf(x))\,dx = 0.$$

En faisant le changement:

$$y = Y + F(x) \quad \text{avec } F(0) = 0, \qquad f(x) = F'(x),$$

on obtient:

$$\omega = y\,dy + x^{2n-1}\,dx - F(x)\,dy.$$

Si l'ordre de $f \in \mathcal{O}_1$ est supérieur à n, on déduit des résultats précédents que les solutions de (E) sont périodiques si et seulement si f est impaire ou que, $0 \in \mathbb{R}$ est un attracteur ou un 'répulseur' si f n'est pas impaire; le premier terme pair du développement de Taylor de f permettant de décider si 0 est un attracteur ou un 'répulseur' d'après la proposition 3.

1. *Sur l'existence de séparatrices*

Soit $\omega = 0$ de degré de dégénérescence 1 et soient (x, y) des coordonnées (données

https://doi.org/10.1017/S0143385700001553 Published online by Cambridge University Press

par la proposition 1) telles que

$$\omega_\infty = \mathcal{T}^\infty\omega = \tfrac{1}{2}d\left(\frac{l}{2}y^2+\varepsilon x^l\right)+\left(\sum_{k\geq m} F_k x^k\right)dy$$

où $l \geq 3$, $m \geq 2$, $F_m \neq 0$. Notons $F \in \mathscr{E}_2$ un prolongement de Borel de $\sum F_k x^k$ $(=\mathcal{T}^\infty F(x))$ et soit

$$\Omega = \tfrac{1}{2}d\left(\frac{l}{2}y^2+\varepsilon x^l\right)+F(x)\,dy.$$

On déduit de la désingularisation des champs de vecteurs ([**10**], [**2**] [**3**], [**7**]) le lemme suivant:

LEMME 1. *Toute séparatrice de ω est C^∞-tangente à une séparatrice de Ω et inversement.*

Ainsi nous supposerons $\omega = \Omega$ pour rechercher les séparatrices.

LEMME 2. *Si $2m < l$, $\omega = 0$ possède une séparatrice.*

Démonstration. Soit $\pi:(x,u)\rightarrow(x,(u-2F_m/l)x^m)$. Après division par x^{2m-1}, l'équation $\pi^*(\omega)=0$ s'écrit dans les coordonnées (x,u), $\tilde{\omega}=0$ avec

$$\mathcal{T}^1\tilde{\omega} = -2F_m u\,dx.$$

Elle possède une séparatrice d'équation $x\rightarrow(x,u(x))$, [**3**]. Son image par π est une séparatrice de $\omega=0$. □

LEMME 3. *Si $2m \geq l$ et $\varepsilon = -$ ou si $2m > l$, $\varepsilon = +$ et l est impair ω possède une séparatrice.*

Démonstration. Le cas $\varepsilon = +$, l impair se déduit du cas $\varepsilon = -1$ en changeant x en $-x$. Nous supposons $2m \geq l$ et $\varepsilon = -$. Soit

$$\pi:(u,v)\rightarrow(u^2,v^l)$$

et soit

$$\alpha = 2\pi^*(\omega) = d\left(\frac{l}{2}v^{2l}-u^{2l}\right)+2lu^{2m}v^{l-1}f(u^2)\,dv.$$

Faisons l'éclatement E: $(u,t)\rightarrow(u,tu)$ de α:

$$u^{2l-1}\tilde{\alpha} = E^*(\alpha) = u^{2l-1}[(-2+lt^{2l}+2t^l u^{2m-l}f(u^2))\,du+u\,dt(\cdots)].$$

Soit t_0 une racine réelle de

$$lt^{2l}-2 \quad \text{si } 2m>l$$

ou de

$$lt^{2l}+2F_m t^l-2 \quad \text{si } 2m=l.$$

Le jet d'ordre 1 de $\tilde{\alpha}$ au point $(0,t_0)$ est non dégénéré et son germe possède une séparatrice d'équation $u\rightarrow(u,t(u))$. Son image par $E\circ\pi$ est une séparatrice de ω. □

LEMME 4. *Si $2m = l$, $\varepsilon = 1$ et $F_m^2 \geq 2l$, ω possède une séparatrice.*

Démonstration. Par les mêmes changements de variables que dans la démonstration du lemme précédent, on obtient

$$\tilde{\alpha} = (2+lt^{2l}+2t^l f(x^2))\,du+u\,dt(\cdots).$$

Le polynome $t^{2l}+2t^l F_m+2$ possède au moins une racine réelle t_0 et, on montre de la même façon que plus haut que ω possède une séparatrice.

2. *Démonstration de la proposition* 2
Comme Lyapunov dans [**4**] nous allons utiliser les fonctions $c(\theta)$, $s(\theta)$ définies par:

$$\frac{ds}{d\theta}=c(\theta)^{2n-1}, \qquad s(0)=1,$$
$$\frac{dc}{d\theta}=-s(\theta), \qquad c(0)=1.$$

Elles vérifient les propriétés suivantes:
(i) $ns^2(\theta)+c^{2n}(\theta)=1$,
(ii) $c(\theta)$ et $s(\theta)$ sont périodiques de période

$$2\omega=2\sqrt{\frac{\pi}{n}}\frac{\Gamma(1/2n)}{\Gamma((n+1)/2n)},$$
$$c(\theta+\omega)=-c(\theta), \qquad c(-\theta)=c(\theta), \qquad c(\omega-\theta)=-c(\theta),$$
$$s(\theta+\omega)=-s(\theta), \qquad s(-\theta)=-s(\theta), \qquad s(\omega-\theta)=s(\theta).$$

(iii)

$$\int_0^{2\omega} c^r(\theta)\,d\theta=\begin{cases}0 & \text{si } r \text{ impair,}\\ c_r\neq 0 & \text{si } r \text{ pair.}\end{cases}$$

Dans la suite nous notons π l'application de $\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$\pi:(r,\theta)\to(rc(\theta), r^n s(\theta)).$$

Avec les notations du section précédent on a:

LEMME 5. *L'équation* $\Omega=\frac{1}{2}d(ny^2+x^{2n})+F(x)\,dy=0$ *avec* $m>n\geq 2$ *ou* $m=n\geq 2$ *et* $F_m^2<4m$, *n'a pas de séparatrice.*

Démonstration. Posons $F(x)=x^m f(x)$, $\pi^*(\Omega)=nr^{2n-1}\tilde{\Omega}$. On a:

$$\tilde{\Omega}=(1+s(\theta)c(\theta)^m r^{m-n}f(rc(\theta))\,dr+\frac{r^{m-n+1}}{n}c(\theta)^{m+2n-1}f(rc(\theta))\,d\theta. \tag{1}$$

Si $m>n$, et r est assez petit le coefficient de dr est positif et lorsque $m=n$ et $f^2(0)=F_m^2<4m$ cette propriété reste vraie car

$$|s(\theta)c(\theta)^m|<\frac{1}{2\sqrt{m}}, \quad \theta\in\mathbb{R}.$$

Les courbes intégrales de $\tilde{\Omega}=0$ sont les solutions d'une équation différentielle $dr/d\theta=H(r,\theta)$, avec $H>0$ pour $r>0$ assez petit. Leurs images par π qui sont les courbes intégrales de Ω ne sont pas des séparatrices. □

Démonstration de la proposition 2. Avec les hypothèses de la proposition, la non existence de séparatrice pour ω est démontrée par les cinq lemmes précédents.

Puisque $\omega = \Omega + R$, où R est une 1-forme dont les coefficients sont plats en $0 \in \mathbb{R}^2$, on a:

$$\frac{1}{nr^{2n-1}} \pi^*(\omega) = \tilde{\omega} = \tilde{\Omega} + \alpha(r, \theta)\, dr + \beta(r, \theta)\, d\theta \tag{2}$$

où α, β sont des fonctions C^∞ plates en r. Comme dans le lemme 5, la courbe intégrale de $\tilde{\omega}$ passant par le point $(\rho, 0)$ s'écrit $r(\rho, \theta)$ avec

$$\frac{\partial r}{\partial \theta}(\rho, \theta) = K(r(\rho, \theta), \theta) \quad \text{et } r(\rho, 0) = \rho$$

où $K(r, \theta)$ est C^∞, positive pour r assez petit (d'après le lemme 5 et (1)). L'application premier retour P de $\omega = 0$ est le germe de C^∞-difféomorphisme de $(\mathbb{R}, 0)$

$$P : \rho \to r(\rho, 2\omega).$$

Lorsque ω est analytique le même type d'argument, que l'on trouve déjà dans Lyapunov [**4**], montre que P est analytique. □

3. *Etude de l'application premier retour*

Dans tout ce section $\omega = 0$ désigne une équation sans séparatrice.

Soient (x, y) des coordonnées telles que

$$\omega_\infty = \mathcal{T}^\infty \omega = \tfrac{1}{2} d(ny^2 + x^{2n}) + \Big(\sum_{k \geq m} F_k x^k\Big)\, dy.$$

De la même façon que dans le section précédent, on note:

$$\pi(r, \theta) = (rc(\theta), r^n s(\theta)), \qquad \pi^*(\omega) = nr^{2n-1}\tilde{\omega}.$$

Pour alléger les calculs, nous écrirons $r = r(\rho, \theta)$ la solution de $\tilde{\omega} = 0$ telle que $r(\rho, 0) = \rho$. Soit

$$r_l = r(\operatorname{mod} \rho^{l+1}) = \sum_{k=1}^{l} a_k(\theta) \rho^k \tag{3}$$

son développement de Taylor à l'ordre l suivant les puissances de ρ. Des expressions (1), (2) de $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{\omega}$ du paragraphe précédent on déduit:

$$\left.\begin{aligned} &\Big(1 + s(\theta)c(\theta)^m r_l^{m-n} \sum_{k=0}^{l} F_{m+k} r_l^k c(\theta)^k\Big) \sum_{k=1}^{l} a'_k(\theta)\rho^k \\ &\quad = -\frac{1}{n} r_l^{m-n+1} c(\theta)^{m+2n-1} \sum_{k=0}^{l} F_{m+k} r_l^k c^k(\theta) \,(\operatorname{mod} \rho^{l+1}). \end{aligned}\right\} \tag{4$_l$}$$

Les $a_k(\theta)$ pour $k = 1, 2, \ldots, l$ sont déterminés par $(4)_l$.

Lemme 6. *Soit $G(x^2)$ un prolongement de Borel de $\sum_{2k \geq m} F_{2k} x^{2k}$. Alors:*

$$\bar{\omega} = \tfrac{1}{2} d(ny^2 + x^{2n}) + G(x^2)\, dy$$

est du type centre. La solution générale $\bar{r}(\rho, \theta)$ de

$$\frac{\pi^*(\bar{\omega})}{nr^{2n-1}} = \tilde{\bar{\omega}}$$

est périodique en θ de période 2ω. En particulier

$$\bar{r}_\infty = \sum_{k\geq 1} \bar{a}_k(\theta)\rho^k \quad \textit{avec } \bar{a}_k(\theta) = \bar{a}_k(\theta + 2\omega).$$

Démonstration. L'équation $\bar{\omega} = 0$ est du type centre ou foyer et elle est invariante par l'involution

$$(x, y) \to (-x, y).$$

D'après un théorème de Poincaré elle est du type centre et par conséquent $\bar{r}$ est périodique en θ. □

LEMME 7. *Soit F_{2q+1} le premier terme d'indice impair dans*

$$\sum_{k\geq m} F_k x^k.$$

Alors

$$a_k(\theta) = \bar{a}_k(\theta) \quad \textit{pour } k \leq 2q+1-n.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que $(4)_l$ s'écrit plus simplement:

$$(1 + s(\theta)c(\theta)^m r_l^{m-n} \sum_{k=0}^{l-m+n-1} F_{m+k} r_l^k c(\theta)^k)\left(\sum_{k=1}^{l} a'_k(\theta)\rho^k\right)$$

$$= -\frac{1}{n} r_l^{m-n+1} c(\theta)^{m+2n-1} \sum_{k=0}^{l-m+n-1} F_{m+k} r_l^k c(\theta)^k \ (\mathrm{mod}\ \rho^{l+1}).$$

Pour les entiers l tels que:

$$l + n - 1 = m + (l - m + n - 1) \leq 2q$$

les polynômes en ρ, r_l et $\bar{r}_l$ vérifient la même équation et ainsi:

$$a_k(\theta) = \bar{a}_k(\theta) \quad \text{pour } k \leq l \leq 2q + 1 - n.$$ □

LEMME 8. *Si F_{2q+1} est le premier terme d'indice impair dans*

$$\sum_{k\geq m} F_k x^k,$$

alors

$$a_{2q+2-n}(2\omega) \neq 0;$$

plus précisément on a

$$a_{2q+2-n}(2\omega) = -\begin{cases} \dfrac{F_{2q+1}}{n} \displaystyle\int_0^{2\omega} c(\theta)^{2(q+n)}\, d\theta, & \text{si } m > n \\ C \neq 0, & \text{si } m = n \end{cases}$$

où C est une constante dont l'expression sera donnée lors de la démonstration.

Démonstration. Nous allons faire les calculs dans les deux cas:
1*er cas*: $m > n$. Puisque $m - n > 0$, $(4)_1$ s'écrit $\rho a'_1(\theta) = 0$ et

$$a_1(\theta) = a_1(0) = 1.$$

D'après le lemme 7, on sait que si $p = 2q + 2 - n$,

$$r_p = \bar{r}_p + b_p(\theta)\rho^p \quad \text{avec } b_p(\theta) = a_p(\theta) - \bar{a}_p(\theta).$$

https://doi.org/10.1017/S0143385700001553 Published online by Cambridge University Press

En reportant cette expression de r_p dans $(4)_p$ et en tenant compte du fait que $r_{p-1}=\bar r_{p-1}$ est solution de $(4)_{p-1}$, on obtient l'équation suivante:

$$b_p'(\theta)\rho^p=-\frac{1}{n}c(\theta)^{m+2n-1}F_{2q+1}c(\theta)^{2q+1-m}\rho^p.$$

Puisque par hypothèse $a_k(0)=0$ si $k>1$, on déduit du lemme 7

$$a_p(2\omega)=-\frac{F_{2q+1}}{n}\int_0^{2\omega}c(\theta)^{2(q+n)}\,d\theta\neq 0.$$

2ème cas: $m=n$ (et $F_m^2<4m$): Puisque $m=n$, $(4)_1$ s'écrit

$$(1+s(\theta)c(\theta)^mF_m)a_1'(\theta)\rho=-\frac{1}{n}a_1(\theta)c(\theta)^{3m-1}F_m.$$

(i) $m=2q+1$: $(1+s(\theta)c(\theta)^mF_m)$ est strictement positif et

$$\log a_1(2\omega)=-\frac{F_{2q+1}}{m}\int_0^{2\omega}\frac{c(\theta)^{6q+2}\,d\theta}{1+s(\theta)c(\theta)^mF_m}$$

est non nul. Ainsi $a_1(2\omega)$ est différent de 1.

(ii) $m=2m'$: On obtient

$$\frac{a_1'(\theta)}{a_1(\theta)}=-\frac{F_m}{m}h(\theta)$$

où

$$h(\theta)=\frac{c(\theta)^{3m-1}}{1+s(\theta)c(\theta)^mF_m}.$$

Puisque $h(\omega-\theta)=-h(\theta)$, on retrouve le résultat du lemme 7, à savoir:

$$0=\log a_1(2\omega)=-\frac{F_{2q+1}}{m}\left(\int_0^{\omega}h(\theta)\,d\theta+\int_{\omega}^{2\omega}h(\theta)\,d\theta\right).$$

Ecrivons, comme dans le cas $m>n$,

$$r_p=\bar r_p+b_p(\theta)\rho^p\quad\text{avec } p=2q+2-n$$

et reportons cette expression de r_p dans $(4)_p$. On obtient:

$$\begin{aligned}a_1'(\theta)s(\theta)c(\theta)^mF_{2q+1}a_1(\theta)^{2q+1}c(\theta)^{2q+1}+b_p'(\theta)(1+s(\theta)c(\theta)^mF_m)\\=-\frac{1}{n}(a_1(\theta)F_{2q+1}c(\theta)^{3m-1}a_1(\theta)^{2q+1}c(\theta)^{2q+1}+b_p(\theta)c(\theta)^{3m-1}F_m).\end{aligned}$$

Après division par

$$\frac{1}{1+s(\theta)c(\theta)^mF_m}$$

cette équation différentielle en $b_p(\theta)$ s'écrit:

$$\begin{aligned}b_p'(\theta)-b_p(\theta)\frac{a_1'(\theta)}{a_1(\theta)}=F_{2q+1}\frac{a_1'(\theta)}{a_1(\theta)}a_1(\theta)^{2q+2}\\\times c(\theta)^{2q+1}\left(s(\theta)c(\theta)^m-\frac{1}{F_m}\right).\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0143385700001553 Published online by Cambridge University Press

Elle se résout en posant $b_p(\theta) = a_1(\theta)\lambda(\theta)$ et on a

$$\lambda'(\theta) = F_{2q+1}\frac{a_1'(\theta)}{a_1(\theta)}(a_1(\theta)c(\theta))^{2q+1}\left(s(\theta)c(\theta)^m - \frac{1}{F_m}\right),$$

$$\lambda'(\theta) = -\frac{F_{2q+1}^2}{2q+1}a_1(\theta)^{2q+1}c(\theta)^{2q+3m}\frac{1}{1+s(\theta)c(\theta)^m F_m}\left(s(\theta)c(\theta)^m - \frac{1}{F_m}\right).$$

Les majorations

$$|s(\theta)c(\theta)^m| < \frac{1}{2\sqrt{m}} \quad \text{et} \quad F_m^2 < 4m$$

impliquent que:

$$1 + s(\theta)c(\theta)^m F_m \quad \text{et} \quad \frac{1}{F_m}\left(s(\theta)c(\theta)^m - \frac{1}{F_m}\right)$$

sont strictement positifs. Il en est de même pour $a_1(\theta) = \exp(\ldots)$. Ainsi $\lambda(2\omega)$ est non nul et

$$a_p(2\omega) = \lambda(2\omega)a_1(2\omega) = \lambda(2\omega) \neq 0.$$

Puisque le jet d'ordre $p = 2q + 2 - n$ de l'application premier retour P de ω s'écrit

$$P_p(\rho) = \sum_{k=1}^{p} a_k(2\omega)\rho^k$$

les lemmes 6, 7, 8 démontrent la proposition 3. □

Remarque 4. Le point $0 \in \mathbb{R}^2$ est un foyer hyperbolique, i.e. $a_1(2\omega) \neq 1$ si et seulement si

$$p = 1 = 2q + 2 - n \geq 2q + 2 - m = 1,$$

c'est à dire lorsque $n = m = 2q + 1$. Ceci doit pouvoir être interprété en termes de stabilité topologique ou de bifurcation (voir [**13**]). D'autre part, signalons que, le 'signe de F_{2q+1}' permet de décider si 0 est un foyer attractif ou répulsif.

4. *C^∞-conjugaisons des applications premiers retours et des équations*

Soient $\omega = 0$ et $\Omega = 0$ deux équations de degrés de dégénérescence 1, sans séparatrice et soient P et Q leurs applications premiers retours. S'il existe un C^∞-difféomorphisme φ de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tel que

$$\varphi^*(\omega) \wedge \Omega = 0,$$

alors P et Q sont C^∞-conjuguées par un C^∞-difféomorphisme de $(\mathbb{R}, 0)$. Réciproquement on a:

PROPOSITION 4. *Soient $\omega = 0$ et $\Omega = 0$ $(\mathcal{T}^1\omega = \mathcal{T}^1\Omega = y\,dy)$ sans séparatrices qui sont C^∞-tangentes, i.e. $\mathcal{T}^\infty\omega = \mathcal{T}^\infty\Omega$, et telles que leurs applications premiers retours sont C^∞-conjuguées. Alors il existe un difféomorphisme φ de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tel que*

$$\varphi^*(\omega) \wedge \Omega = 0 \text{ et } \mathcal{T}^\infty\varphi = (1_{\mathbb{R}^2}, 0).$$

Il est clair que ce résultat du type C^∞-conjugaison des applications premiers retours $\Rightarrow C^\infty$-conjugaison des équations n'est pas le meilleur possible. Mais il implique évidemment les théorèmes 1 et 2 compte tenu des propositions 1, 2 et 3 et du théorème 2 de Takens [**11**].

La démonstration de cette proposition s'appuie sur les mêmes arguments que Takens pour montrer le théorème 3 de [**11**].

Démonstration. Nous pouvons toujours supposer que:

(i) $\mathcal{T}^\infty\omega = \mathcal{T}^\infty\Omega = \frac{1}{2}d(ny^2+x^{2n}) + \sum_{k\geq m} F_k x^k$;

(ii) les applications premiers retours P et Q de ω et Ω évaluées sur le $\frac{1}{2}$-axe des $x \geq 0$ sont identiques.

Soient $\pi : \mathbb{R}\times S^1 \to \mathbb{R}^2$, où $S^1 = [0, 2\omega]/\{0=2\omega\}$,

$$\pi : (r, \theta) \to (rc(\theta), r^n s(\theta))$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\pi^*(\theta)}{nr^{2n-1}}, \qquad \tilde{\Omega} = \frac{\pi^*(\Omega)}{nr^{2n-1}}.$$

Il existe deux fonctions C^∞, $A, B : \mathbb{R}\times S^1 \to \mathbb{R}$, plate en r le long de $r=0$ telles que

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} + A\,dr + Br\,d\theta. \tag{5}$$

Les germes de feuilletage $F_{\tilde{\Omega}}$ et $F_{\tilde{\omega}}$, définis par $\tilde{\Omega}$ et $\tilde{\omega}$, le long de $\{0\}\times S^1$ ont la même holonomie. Ils sont C^∞-conjugués par un germe de C^∞-difféomorphisme ϕ de $\mathbb{R}\times S^1$ le long de $0\times S^1$, c'est à dire

$$\phi^*(\tilde{\omega}) \wedge \tilde{\Omega} = 0.$$

Puisque ϕ peut-être construit par relèvement de chemins

$$c_\theta : [0, 1] \to \mathbb{R}\times S^1, \quad c_\theta(t) = (0, t\theta)$$

dans les feuilles de $F_{\tilde{\Omega}}$ et $F_{\tilde{\omega}}$, il est clair qu'il peut être choisi de la forme:

$$\phi : (r, \theta) \to (r + \psi(r, \theta), \theta)$$

où ψ est une fonction C^∞, plate en r compte tenu de (5).

Soit φ l'homéomorphisme φ de $(\mathbb{R}^2, 0)$ tel que

$$\varphi \circ \pi = \pi \circ \phi.$$

Puisque la restriction de π à $]0, \infty)\times S^1$ est un C^∞-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^2 - \{0\}$, φ s'écrit

$$\varphi(x, y) = (x + \varphi_1(x, y), y + \varphi_2(x, y))$$

où φ_1, φ_2 sont des fonctions C^∞ en dehors de 0 qui sont déterminées par

$$\varphi_1(rc(\theta), r^n s(\theta)) = c(\theta)\psi(r, \theta),$$
$$\varphi_2(rc(\theta), r^n s(\theta)) = s(\theta)[(r+\psi(r, \theta))^n - r^n] = s(\theta)\psi_1(r, \theta),$$

où ψ_1 est encore une fonction plate en r. La proposition 4 est alors une conséquence du lemme suivant:

LEMME 9. *Soit $f : (\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ telle que F définie par*

$$F(r, \theta) = f(rc(\theta), r^n s(\theta))$$

soit C^∞, plate en r le long de $r=0$. Alors f est C^∞, plate en $0 \in \mathbb{R}^2$.

Démonstration. Le même argument que plus haut montre que f est continue, C^∞ en dehors de $0 \in \mathbb{R}^2$. Il suffit donc de montrer que pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ les

$$\frac{\partial^{i+j} f}{\partial x^i \partial y^j}(x, y)$$

se prolongent en des fonctions continues, nulles en $0 \in \mathbb{R}^2$. En fait, il suffit de montrer que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(rc(\theta), r^n s(\theta)) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(rc(\theta), r^n s(\theta))$$

sont encore plates en r, le cas général s'en déduisant par induction. Un calcul élémentaire montre que:

$$dr = c(\theta)^{2n-1}\, dx + \frac{s(\theta)}{r^{n-1}}\, dy, \qquad d\theta = -n\frac{s(\theta)}{r}\, dx + \frac{c(\theta)}{r^n}\, dy$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(rc(\theta), r^n s(\theta)) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) c(\theta)^{2n-1} + \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)\left(-\frac{ns(\theta)}{r}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(rc(\theta), r^n s(\theta)) = \frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta)\frac{s(\theta)}{r^{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta)\frac{c(\theta)}{r^n}$$

et ces deux dérivées partielles sont plates en r. □

REFERENCES

[1] I. Bendixson. Sur les points singuliers des équations différentielles. *Ofv. Kangl. Vetenskaps. Akade. Eörhandlinger. Stokholm.* **9** (1898), 635–658.

[2] F. Dumortier, P. Rodriguez & R. Roussarie. *Germs of diffeomorphisms in the plane. Lecture Notes in Math.* No. 902. Springer: Berlin, 1975.

[3] F. Dumortier. Singularities of vector fields on a plane. *J. Diff. Equns.* **23** (1977), 53–106.

[4] A. M. Lyapunov. *Stability of Motion*, pp. 123–194. Academic Press: New York, 1966.

[5] R. Moussu: Sur un théorème de Poincaré–Lyapunov. *Astérisque.* (To appear.)

[6] R. Moussu. Sur l'existence d'intégrales premières pour un germe de forme de Pfaff. *Ann. Inst. Fourier* **26** (1976) 229–237.

[7] J. F. Mattei & R. Moussu. Holonomie et intégrales premières. *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup.* Ser. 4. **13** (1980), 469–523.

[8] H. Poincaré. Mémoire sur les courbes définies par une équation differentielle. *J. Math. Pures et Appl.* **3–7** (1881), 375–422.

[9] R. Roussarie. Modèles locaux de champs et formes. *Astérisque* **30** (1975).

[10] A. Seidenberg. Reduction of singularities of the differential equation $A\, dy = B\, dx$. *Amer. J. Math.* **79** (1968), 248–269.

[11] F. Takens. Normal forms for certain singularities of vector fields. *Ann. Inst. Fourier-Grenoble.* **23** (1973) 163–195.

[12] F. Takens. Singularities of vector fields. *Publ. Math. I.H.E.S.* **43** (1974), 47–100.

[13] F. Takens. Forced oscillations and bifurcations. *Comm. Math. Inst. Rijkcuniversiteit Utrecht* **3** (1974), 1–59.