



Inégalité du discriminant pour les pincesaux elliptiques à réductions quelconques

J. PESENTI et L. SZPIRO

Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Batiment 425, 91405 Orsay, Cedex, France. e-mail: pesenti@clipper.ens.fr szpiro@geo.math.u-psud.fr

(Received 1 December 1997; accepted in final form 14 September 1998)

Abstract. In this article the degree of the discriminant of an elliptic pencil on a projective curve is upper-bounded by using the degree of its conductor and the genus of the base curve. This is done in the most general case, extending a method and a result of Szpiro (1981 and 1990a) and a result of Hindry and Silvermann. The difficult part, dealing with characteristic 2 and 3 and additive reductions, need the introduction of a new object – which we called ‘conducteur efficace’ – defined by using differentials and interestingly comparable to the usual conductor. This article ends with a few results in the arithmetical case – case corresponding to an inequality conjectured by the second author in 1978: (1) the proof of this inequality in the potentially good reduction cases; (2) the passage from the semi-stable reduction to the general case for a strong inequality.

Mathematics Subject Classifications (1991): 11G05, 11G07.

Key words: elliptic curves, conductors, discriminant.

Résumé. Dans cet article est exhibée une majoration du degré du discriminant d’un pinceau de courbes elliptiques par le degré de son conducteur et le genre de la courbe de base. Cette majoration est obtenue dans le cas le plus général, elle constitue une extension de la méthode utilisée dans Szpiro (1981 et 1990a) et généralise les résultats similaires obtenus dans Szpiro (1990a) et dans Hindry and Silvermann. Les cas difficiles – lorsque la caractéristique est 2 ou 3 et les réductions additives – nécessitent l’introduction d’un nouvel objet appelé ‘conducteur efficace’ défini à l’aide des différentielles et qu’il est intéressant de comparer au conducteur usuel. Cet article se termine par quelques résultats dans le cas arithmétique – cas correspondant à une inégalité conjecturée par le second auteur en 1978: (1) la démonstration de cette inégalité pour les courbes ayant potentiellement bonne réduction; (2) le passage du cas semi-stable au cas général pour une inégalité forte.

Mots-clés: courbes elliptiques, conducteurs, discriminant.

0.1. INTRODUCTION

Comme il est montré dans le séminaire [Szp90b], de nombreux problèmes diophantiens d’effectivité sur les points rationnels des courbes se ramènent ou sont équivalents à l’inégalité conjecturée par le second auteur dès 1982 $\mathcal{D}_{E/K} \leq \mathcal{F}_{E/K}^\sigma$, où $\mathcal{D}_{E/K}$ est le discriminant d’une courbe elliptique E sur un corps K , $\mathcal{F}_{E/K}$ son conducteur et σ une constante ne dépendant que de K . L’inégalité de Parshin–

Bogomolov–Miyaoka $c_1^2 \leq 4c_2$, les conjectures de Vojta en dimension 1, les ‘bons’ Mordell effectifs sont dans cette catégorie.

Cet article s’attachera essentiellement au pendant géométrique de cette conjecture. Ainsi déterminerons-nous une majoration du degré du discriminant d’un *pinceau elliptique sur une courbe projective*, à l’aide du degré de son conducteur et du genre de la courbe. Cette inégalité a déjà été établie dans le cas d’un pinceau à réductions semi-stables [Szp81], [Szp90a] par le second auteur ou pour un pinceau à réductions quelconques dans le cas où le corps de base a une caractéristique nulle [HS88]. En s’inspirant de [Szp90a] nous traiterons le cas le plus général. Le conducteur est alors beaucoup plus complexe que dans les cas étudiés dans [Szp90a] et [HS88] car il comporte une partie ‘sauvage’ dont la définition fait appel à la cohomologie l -adique.

On commencera (Sect. 1) par rappeler la définition du conducteur et divers résultats connus qui y sont associés, puis nous introduirons (Sect. 2) le *conducteur efficace* qui nous permettra d’étendre la démonstration de [Szp90a] au cas général lorsque le *morphisme de Kodaira–Spencer* n’est pas nul. On démontrera ensuite (Sect. 3 et 4) que ce conducteur efficace est toujours inférieur au conducteur usuel. On établira en (Sect. 5) que l’inégalité est encore valable dans le cas isotrivial (avec pour exception le cas d’un produit $\mathbb{P}^1 \times E$ où E est une courbe elliptique) et enfin, on terminera la démonstration (Sect. 6. et 7) en réduisant le cas général au cas semi-stable, ce qui nous permettra d’obtenir l’inégalité cherchée lorsque le morphisme de Kodaira–Spencer est nul.

Pour les *pinceaux elliptiques sur les spectres d’anneaux d’entiers algébriques*, on montrera (Sect. 8.), par une méthode identique, qu’une ‘conjecture du discriminant’ forte se réduit au cas semi-stable. On prouvera également (Sect. 5) que la norme du discriminant divise la norme du conducteur à la puissance 5 lorsque la courbe elliptique a potentiellement bonne réduction.

0.2. ENONCÉ

Soient k un corps quelconque (dont la caractéristique p peut éventuellement être égale à 2 ou 3), C une courbe projective lisse sur k de genre g et géométriquement connexe, E une surface lisse sur k et $f: E \rightarrow C$ un morphisme propre et plat, dont la fibre générique est une courbe elliptique lisse (possédant par définition un point rationnel) et géométriquement connexe sur le corps de fonctions de C . Autrement dit, f est un modèle régulier de sa fibre générique, et l’on suppose de plus que f est minimal. On appellera alors f ‘pinceau elliptique sur C ’. On impose aucune condition sur ses fibres spéciales (elles peuvent être à réductions additives).

THÉORÈME 0.1. *Avec les notations précédentes, si $\mathcal{D}_{E/C}$ est le diviseur discriminant de f et $\mathcal{F}_{E/C}$ son diviseur conducteur, lorsque f n’est pas isotrivial on a $\deg \mathcal{D}_{E/C} \leq 6p^e(2g - 2 + \deg \mathcal{F}_{E/C})$, où p^e est le degré d’inséparabilité du morphisme j déduit de f allant de C dans la ‘droite universelle’ des courbes de genres 1 (on convient de le prendre égal à 1 si $p = 0$).*

Lorsque f est isotrivial, l'inégalité est encore valable en remplaçant p^e par 1 à la condition que f ne soit pas trivial quand $g = 0$.

Toute extension du corps de base ne changeant pas cette inégalité, il est suffisant de la prouver pour k algébriquement clos, hypothèse que nous ferons dans la suite de cet article.

1. Conducteur d'une courbe elliptique

Groupes de ramification supérieurs. Soit K un corps local complet de caractéristique résiduelle p , L une extension galoisienne de K , L est également un corps local complet ([Ser68], II, 2, Prop. 3) et l'on note v_L sa valuation normalisée. Soit $G(L/K)$ le groupe de Galois de L/K , pour tout entier $i \geq 0$ on définit le i ème groupe de ramification de L/K par

$$G_i(L/K) = \{\sigma \in G(L/K) : v_L(\alpha^\sigma - \alpha) \geq i + 1, \quad \forall \alpha \in R_L\},$$

on note $g_i(L/K)$ le cardinal de $G_i(L/K)$.

Ces groupes vérifient ([Ser68], IV):

- (1) $G_0(L/K)$ est le groupe d'inertie de L/K .
- (2) $G_i(L/K) = 1$ pour i assez grand.
- (3) $G_1(L/K)$ est un p -groupe, L/K admet de la ramification sauvage si et seulement si $G_1(L/K) \neq 1$.

Mesure de la ramification sauvage. Soit M un G_K -module fini de l -torsion, $l \neq p$, et L/K une extension galoisienne dont le groupe de Galois G agit trivialement sur M , on définit

$$\delta(K, M) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_i(L/K)}{g_0(L/K)} \dim_{\mathbb{F}_l}(M/M^{G_i(L/K)}),$$

c'est un entier qui ne dépend pas de l'extension choisie [Ogg67].

Conducteur. Soit E une courbe elliptique sur un corps local complet K , la valuation du conducteur de E est définie par

$$f(E/K) = \varepsilon(E/K) + \delta(K, E[l]),$$

où $E[l]$ est le module des points de l -torsion de E sur K , $l \neq p$, et

$$\varepsilon(L/K) = \dim_{\mathbb{Q}_l}(V_l(E)/V_l(E)^{G_0(\bar{K}/K)}),$$

où $V_l(E) = T_l(E) \otimes_{\mathbb{Z}_l} \mathbb{Q}_l$ avec $T_l(E)$ module de Tate l -adique, soit $\varepsilon(L/K) = 0, 1$ ou 2 respectivement quand la réduction est bonne, multiplicative ou additive. Ce conducteur local vérifie les propriétés suivantes:

PROPOSITION 1.1. (1) $f(E/K)$ est un entier indépendant de l .

(2) Lorsque la réduction est bonne ou multiplicative, ou lorsque la caractéristique du corps résiduel est différente de 2 et 3, on a $f(E/K) = \varepsilon(L/K)$.

(3) D'après Ogg [Ogg67] et Saito [Sai88], on a

$$v(\mathcal{D}_{E/K}) = f(E/K) + m_v - 1.$$

Le conducteur d'une courbe elliptique sur un corps global K est alors défini par $\mathcal{F}_{E/K} = \prod_{v \in M_K} \mathcal{P}_v^{f(E/\hat{K}_v)}$, où M_K est l'ensemble des places finies de K et les \hat{K}_v sont les corps locaux complétés associés à ces places. Pour un pinceau elliptique sur une courbe C on a $\mathcal{F}_{E/C} = \mathcal{F}_{E/K(C)}$ où $K(C)$ est le corps des fonctions de C .

2. Majoration du discriminant

Soit P un schéma lisse sur C tel que E s'identifie à un sous-schéma fermé de P . Soit \mathcal{I} le faisceau d'idéaux correspondant à E , E étant localement d'intersection complète et géométriquement réduit, $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est localement libre et on a la suite exacte $0 \rightarrow \mathcal{I}/\mathcal{I}^2 \rightarrow \Omega_{P/C}^1 \otimes \mathcal{O}_E \rightarrow \Omega_{E/C}^1 \rightarrow 0$. L'application à gauche est injective parce qu'elle l'est sur la fibre générique et $\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est localement libre. Le faisceau dualisant relatif de E/C s'écrit alors

$$\omega_{E/C} = \text{Hom}(\det(\mathcal{I}/\mathcal{I}^2), \det(\Omega_{P/C}^1 \otimes \mathcal{O}_E)) \quad (\text{[Harr77]}) \text{ III, 7, 11}$$

et il existe une application naturelle

$$\begin{aligned} \varphi: \Omega_{E/C}^1 &\rightarrow \omega_{E/C} \\ \tau &\mapsto (n \mapsto n \wedge \bar{\tau}). \end{aligned}$$

Dans le cas où E est à réductions semi-stables, les fibres spéciales singulières de f ont pour points singuliers un nombre fini de points doubles (ensemble de codimension 2 dans E). En ces points singuliers, $\Omega_{E/C}^1$ est de dimension projective inférieure à un, E étant de dimension 2, $\Omega_{E/C}^1$ est de profondeur supérieure à un. Aussi $\Omega_{E/C}^1$ ne peut-il pas avoir de torsion à support de codimension 2, or il est localement libre en dehors des points doubles, il est donc sans torsion.

L'application φ est alors une injection, ce qui n'est plus vrai dans le cas général. On note N son noyau (le sous-module de torsion de $\Omega_{E/C}^1$), C son conoyau, et M le faisceau de modules sur \mathcal{O}_E tel que

$$0 \rightarrow N \rightarrow \Omega_{E/C}^1 \rightarrow M \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow M \rightarrow \omega_{E/C} \rightarrow C \rightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur f_* à ces suites exactes on obtient

$$0 \rightarrow f_*N \rightarrow f_*\Omega_{E/C}^1 \rightarrow f_*M \rightarrow R^1f_*N,$$

$$0 \rightarrow f_*M \rightarrow f_*\omega_{E/C} \rightarrow f_*C.$$

E étant elliptique, $f_*\omega_{E/C} = \omega_E$ est localement inversible et $\omega_{E/C} = f^*\omega_E$ (ce qui se prouve en remarquant que la formule d'adjonction implique que l'intersection de $\omega_{E/C}$ avec tout diviseur vertical est nul). On en déduit que f_*M est également inversible.

N est à support dans les fibres singulières donc f_*N et R^1f_*N sont à supports finis dans les points de la base correspondant à ces fibres. Soit $Q \in C$, en reprenant la classification donnée par Néron [Nér64] et les notations de Tate [Tat75] on obtient :

- Si $f^{-1}(Q)$ est une fibre de type multiplicatif ou de type II, III, ou IV, elle est réduite et singulière en un nombre fini de points en dehors desquels $\Omega^1_{E/C}$ est localement libre. Par la remarque faite plus haut, N est nul sur cette fibre et $(f_*N)_Q = (R^1f_*N)_Q = 0$.
- Si $f^{-1}(Q)$ est une fibre de type I_0^* , I_n^* , IV^* , III^* ou II^* , elle est composée de \mathcal{P}^1 ayant 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 comme multiplicités, et se croisant normalement. $(f_*N)_Q$ et $(R^1f_*N)_Q$ sont a priori non nuls.

2.1. DESCRIPTION LOCALE

Soit P un point fermé de E et $Q = f(P)$ son image dans C . On note π l'uniformisante de $\mathcal{O}_{C,Q}$ et, par abus de langage, on posera également $\pi = f^*\pi$. On notera L_P l'idéal de $\mathcal{O}_{E,P}$ tel que $M_P = L_P.\omega_{E/C,P}$. On va étudier les différents cas de figures locaux possibles pour les fibres de types I_n , I_n^* , IV^* , III^* et II^* .

Soit P un point quelconque d'une fibre spécial de l'un de ces types. Dans cette fibre, P est ou bien un point d'intersection transversale entre deux \mathcal{P}^1 de multiplicités i et j , ou bien un point simple d'un \mathcal{P}^1 de multiplicité i . E étant régulier en P , on peut, après complétion, écrire son anneau local sous la forme

$$\hat{\mathcal{O}}_{E,P} = \frac{k[[x, y, \pi]]}{(u\pi - x^i y^j)} = A,$$

avec u inversible dans $k[[x, y, \pi]]$, et en posant $j = 0$ si P n'est pas un point d'intersection.

Si la caractéristique de k ne divise pas à la fois i et j , par changement de variable on peut écrire

$$\hat{\mathcal{O}}_{E,P} = \frac{k[[x_1, y_1, \pi]]}{(\pi - x_1^i y_1^j)} = A,$$

d'où

$$\varphi: \Omega^1_{E/C,P} = \frac{A dx_1 \oplus A dy_1}{A(x_1^{i-1} y_1^{j-1} (jx_1 dy_1 + iy_1 dx_1))} \rightarrow \omega_{E/C,P} = A dx_1 \wedge dy_1$$

$$v \mapsto (a \mapsto av \wedge x_1^{i-1} y_1^{j-1} (jx_1 dy_1 + iy_1 dx_1)).$$

Son image dans $\omega_{E/C,P}$ est alors donnée par

$$L_P = (jx_1^i y_1^{j-1}, ix_1^{i-1} y_1^j),$$

et son noyau est

$$\hat{N}_P = \frac{k[[x_1, y_1]]}{(x_1^{i-1} y_1^{j-1})} (jx_1 dy_1 + iy_1 dx_1) \quad \text{ou} \quad \frac{k[[x_1, y_1]]}{(x_1^i y_1^{j-1})} dy_1 \quad \text{si } \text{car}(k) \mid i,$$

π appartient alors à L_P et annule N_P .

On note v_P le plus petit entier naturel v tel que $(\pi^v)\omega_{E/C,P} \subset M_P$. Dans les cas précédents on a $v_P = 1$ si P n'est pas régulier dans sa fibre (*i.e.*, autre qu'un point d'un \mathcal{P}^1 de multiplicité 1 qui ne soit pas d'intersection). Etant donné que $f_*M = \omega_E(-\sum_{Q \in C} \alpha_Q Q)$, avec $\alpha_Q = \text{Max}_{P \in f^{-1}(Q)}(v_P)$, v_P existe même lorsque la caractéristique de k divise à la fois i et j .

Soit également μ_P le plus petit entier naturel μ tel que π^μ annule N_P , μ_P est nul si P est un point régulier dans sa fibre. $\mu_P \leq 1$ dans les autres cas étudiés plus haut. Plus généralement, P étant régulier dans E , l'idéal maximal associé est engendré par deux éléments x et y . Il existe alors localement en P un polynôme f tel que $\pi = f(x, y)$. v_P est alors le plus petit entier v tel que $\pi^v \in (\partial f/\partial x, \partial f/\partial y)$ et μ_P est le plus petit entier μ tel que le pgcd de $\partial f/\partial x$ et $\partial f/\partial y$ divise π^μ . L'existence de v_P implique donc celle de μ_P , μ_P étant toujours inférieur à v_P .

Alors $N_{|f^{-1}(Q)}$ est un $\mathcal{O}_{\beta_Q Q}$ schéma avec $\beta_Q = \text{Max}_{P \in f^{-1}(Q)}(\mu_P)$. α_Q étant supérieur à β_Q , les $(R^i f_*N)_Q$ sont donc toujours des $\mathcal{O}_{C,Q}/m_Q^{\alpha_Q}$ modules.

On aura cependant besoin d'une description un peu plus fine

LEMME 2.1. *Soient n un entier naturel, Q un point quelconque de C , S un ensemble de points isolés de $f^{-1}(Q)$, si $\mu_P \leq n$ pour tout $P \in f^{-1}(Q) \setminus S$, alors $(R^1 f_*N)_Q$ est un \mathcal{O}_{nQ} module.*

Soit A le faisceau de module tel que l'on ait la suite exacte

$$0 \rightarrow A \rightarrow N \rightarrow f^* \mathcal{O}_{nQ} \otimes N \rightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur f_* à cette suite exacte, on obtient

$$R^1 f_* A \rightarrow R^1 f_* N \rightarrow \mathcal{O}_{nQ} \otimes R^1 f_* N \rightarrow 0,$$

avec $R^1 f_* A = 0$ car A est à support dans des points isolés.

On notera désormais γ_Q le plus petit entier tel que $(R^1 f_*N)_Q$ soit un $\mathcal{O}_{C,Q}/m_Q^\gamma$ module.

2.2. CONDUCTEUR EFFICACE

Soit maintenant M' le module inversible sur C tel que l'on ait les suites exactes

$$0 \rightarrow f_*N \rightarrow f_*\Omega_{E/C}^1 \rightarrow M' \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow M' \rightarrow f_*M = \omega_E \left(-\sum_{Q \in C} \alpha_Q \right) \rightarrow R^1 f_*N.$$

D'après la section précédente, $M' = \omega_E(-F_{E/C})$, la deuxième suite exacte implique donc

$$F_{E/C} \preceq \left(\sum_{Q \in S_2} (\alpha_Q + \gamma_Q)Q + \sum_{Q \in S_1 \cup S_0} \alpha_Q Q \right),$$

où $S_0 = \{Q \in C \text{ tels que } f^{-1}(Q) \text{ soit une fibre de } E \text{ de type } I_n\}$, $S_1 = \{Q \in C \text{ tels que } f^{-1}(Q) \text{ soit une fibre de } E \text{ de type II, III, ou IV}\}$ et $S_2 = \{Q \in C \text{ tels que } f^{-1}(Q) \text{ soit une fibre de } E \text{ de type } I_0^*, I_m^*, IV^*, III^*, \text{ ou } II^*\}$. On pose également $S = S_0 \cup S_1 \cup S_2$.

Considérons maintenant une autre suite exacte fondamentale

$$0 \rightarrow f^*\Omega_C \rightarrow \Omega_{E/k}^1 \rightarrow \Omega_{E/C}^1 \rightarrow 0.$$

En lui appliquant le foncteur f_* , on obtient une application

$$\chi: f_*\Omega_{E/C}^1 \rightarrow R^1 f_* f^*\Omega_C = \Omega_C \otimes \omega_E^{-1}.$$

χ est le morphisme de Kodaira–Spencer sur $C \setminus S$. On supposera pour l'instant que χ est non nul, ce qui exclu provisoirement (cf. [Vol91]) les cas où f est isotriviale (cf. Sect. 5.) et, en caractéristique positive, cela suppose que f ne soit pas un pull-back du Frobénius de C (cf. Sects. 6 et 7).

Il existe alors M_1 , localement inversible, et N_1 , à support fini, tels que

$$0 \rightarrow N_1 \rightarrow f_*\Omega_{E/C}^1 \rightarrow M_1 \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow M_1 \rightarrow \Omega_C \otimes \omega_E^{-1}.$$

Dès lors, en considérant les duaux, on obtient $\check{M}_1 \simeq f_*\check{\Omega}_{E/C}^1 \simeq \check{M}'$, car, N_1 et f_*N étant à supports finis, ils ont tous deux un dual nul.

On a donc $M_1 \simeq M'$ et une application non nulle de M' dans $\Omega_C \otimes \omega_E^{-1}$. Comme $M' \simeq \omega_E(-F_{E/C})$ cela donne $\deg \omega_E^{\otimes 2} \leq \deg(\Omega_C(F_{E/C}))$, soit, étant donné que $\deg \mathcal{D}_{E/C} = 12 \deg \omega_E$, $\deg \mathcal{D}_{E/C} \leq 6(2q - 2 + \deg F_{E/C})$. On appellera $F_{E/C}$ le *conducteur efficace* du pinceau elliptique. Il se définit de la même manière pour un

pinceau elliptique sur une base quelconque de dimension 1. Nous allons maintenant le comparer localement avec le conducteur classique, nous montrerons

THÉORÈME 2.2. *Soit R un anneau de valuation discrète de corps résiduel d'égale caractéristique, v une de ses valuations normalisée et K le corps local associé, $f: E \rightarrow R$ un pinceau elliptique de conducteur \mathcal{F} , alors*

$$v(F) \leq v(\mathcal{F}),$$

où F est le diviseur tel que $f_*\omega_{E/R}(-F)$ soit l'image de l'application canonique de $f_*\Omega_{E/R}^1$ dans $f_*\omega_{E/R}$.

Autrement dit, le conducteur efficace est localement inférieur au conducteur classique.

CONJECTURE 2.3. *Le résultat précédent est encore vrai dans le cas d'inégale caractéristique.*

Certains de nos calculs, notamment ceux de la section suivante, sont encore valables dans ce cas. Se placer dans le cas général serait tout à fait possible, mais rendrait la démonstration cas par cas encore plus laborieuse.

On peut également généraliser la définition du conducteur efficace aux cas des pinceaux de courbes de genres supérieurs. À l'aide des classes de Chern localisées et d'un Riemann–Roch localisé, le premier auteur établit [Pes98] des relations entre ce conducteur et le conducteur classique (notamment la Conjecture 2.3. quand f_*N est nul*).

Les nombres v_p sont également définis en genres supérieurs, en les comparant aux nombres de Milnor, on peut obtenir une minoration du conducteur efficace à l'aide du conducteur classique en genre 1 ([Pes98]), ce qui justifie davantage l'appellation de *conducteur*.

3. Résultats connus

LEMME 3.1. *Lorsque E est à réductions semi-stables on a*

$$F_{E/C} = \sum_{Q \in S_0} Q = \mathcal{F}_{E/C},$$

et lorsque E est à réductions quelconques, avec k de caractéristique différente de 2 ou 3, on a

$$F_{E/C} \leq \sum_{Q \in S_0 \cup S_1} Q + \sum_{Q \in S_2} 2Q \leq \mathcal{F}_{E/C}.$$

* Suite à une conférence du deuxième auteur à l'université John Hopkins de Baltimore où il a exposé le contenu de ce papier, Q. Liu et T. Saito ont démontré que le conducteur efficace est toujours inférieur au conducteur classique en genre quelconque lorsque le pinceau n'a pas de fibres multiples [LS98], ceci indépendamment de [Pes98] et par la même méthode agrémenté de la démonstration de la nullité de f_*N dans ces cas. Ils prouvent ainsi, en particulier, la conjecture précédente.

Ce lemme permet de retrouver, à l'aide de l'inégalité précédente, les résultats déjà démontrés dans [Szp90a] et [HS88]. Pour le prouver on utilise la classification de Néron

- Dans les cas des réductions de types $I_n, I_0^*, I_m^*, IV^*, III^*, II^*$ (les fibres spéciales sont alors composées de \mathcal{P}^1 de multiplicités 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 se croisant normalement), on est en tout point de la fibre dans le cas 1.a ou 2.a de la description locale effectuée plus haut*. On a donc, $v_P = 1$ aux points singuliers de la fibre $f^{-1}(Q)$, et $v_P = 0$ aux autres points, soit $\alpha_Q = 1$.
- Réductions de type II: le modèle de Weierstrass est alors régulier. Soit P l'unique point singulier de la fibre, pour $p \neq 2, 3$ on a

$$\hat{\mathcal{O}}_{E,P} = \frac{k[[x, y, \pi]]}{(\pi - (y^2 - x^3))},$$

($y^2 = x^3 + c_4x + c_6$, avec $v(c_6) = 1$ et $v(c_4) > 0$, soit $y^2 - x^3 = u\pi$, avec u inversible, ou encore $y^2 - x^3 = \pi$ après changement de variables). D'où $L_P = (2y, 3x^2)$, soit $(\pi)\omega_{E/C,P} \subset M_P, v_P = 1$ et $\alpha_Q = 1$.

- Réductions de type III: la fibre du modèle régulier est l'union de deux \mathcal{P}^1 de multiplicités 1 tangents en un point P , unique point singulier de la fibre. Pour $p \neq 2$ en choisissant bien les variables on obtient

$$\hat{\mathcal{O}}_{E,P} = \frac{k[[x, y, \pi]]}{(\pi - x(y^2 - x))},$$

soit

$$L_P = (-y^2 + 2x, 2xy) \quad \text{et} \quad \pi = \frac{1}{2}x(-y^2 + 2x) - \frac{1}{4}(2xy)$$

appartient à L_P , soit $v_P = 1$ et $\alpha_Q = 1$.

- Réductions type IV la fibre du modèle régulier est l'union de trois \mathcal{P}^1 dans un même plan, s'intersectant en un même point P , unique point singulier de la fibre. Pour $p \neq 3$ en choisissant bien les variables on obtient

$$\hat{\mathcal{O}}_{E,P} = \frac{k[[x, y, \pi]]}{(\pi - x(x^2 - y^2))},$$

soit

$$L_P = (2xy, -y^2 + 3x^2)$$

et

$$\pi = -\frac{1}{3}x(3x^2 - y^2) + \frac{2}{3}y(xy) \in L_P,$$

soit $v_P = 1$ et $\alpha_Q = 1$.

Il nous reste donc à étudier:

* Dans le cas des réductions de types II^* apparaît une composante de multiplicité 5 qui, a priori, pourrait poser problème en caractéristique 5. Nous verrons plus loin qu'il n'en est rien.

- En caractéristique 5, la composante de multiplicité 5 de la fibre spéciale de type II^* .
- En caractéristique 3:
 - Le point singulier des fibres spéciales de types II ou IV.
 - Les composantes de multiplicités 3 ou 6 des fibres spéciales de types IV^* , III^* et II^* .
- En caractéristique 2:
 - Le point singulier des fibres de réductions de types II ou III.
 - Les composantes de multiplicités 2, 4 ou 6 des fibres de réductions de types I_m^* , IV^* , III^* , II^* .

Pour cela on va regarder plus précisément le modèle régulier minimal à l'aide de sa construction par Néron [Nér64] à partir du modèle plan.

4. Caractéristiques 5, 3 et 2

4.1. NOTATIONS ET CONVENTIONS

Les inégalités sur les valuations des coefficients restent, sauf précision du contraire, valables pour les cas considérés ultérieurement à leurs suppositions. Les changements de variables que l'on effectuera seront tels qu'ils ne modifieront pas ces inégalités.

On s'attache à une fibre spéciale $f^{-1}(Q)$, on notera v la valuation associée à $\mathcal{O}_{C,Q}$. Pour tout point fermé P de cette fibre spéciale on notera \mathcal{M}_P l'idéal maximal associé.

On note $b_{i,j} = \pi^{-j} b_i$ et \sim symbolise la réduction modulo π .

On utilisera des lettres majuscules pour les variables projectives, et leur minuscules correspondantes comme variables affines clairement associées.

Par modèle on entendra modèle de la fibre générique de f , si \mathcal{A} est un modèle, on notera $\tilde{\mathcal{A}}$ sa fibre spéciale au-dessus de Q . Si \mathcal{A}_α et \mathcal{A}_β sont deux modèles, on notera $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ leur joint suivant leur fibre générique. Remarquons que si un point de $\tilde{\mathcal{A}}_\alpha$ est régulier dans \mathcal{A}_α , le point correspondant dans $\tilde{\mathcal{A}}_{\alpha,\beta}$ l'est également dans $\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$.

Pour calculer la valuation du conducteur local $v(\mathcal{F})$, on utilisera la formule de Ogg (Prop. 1.1.3) en notant m le nombre de composante de la fibre spéciale, et Δ le discriminant local.

4.2. CARACTÉRISTIQUES 3 ET 5

L'ensemble des calculs de cette section seront fait en égale caractéristique 3 sauf pour le cas (c8). On part du modèle projectif plan \mathcal{A}_0 correspondant à l'équation

$$\mathcal{A}_0: ZY^2 = (X^3 + b_2ZX^2 + b_4XZ^2 + b_6Z^3),$$

avec $b_i \in K(C)$ et $v(b_i) \geq 0$ pour tout i . En égale caractéristique 3

$$\Delta = b_2^2 b_4^2 - b_2^3 b_6 + b_4^3.$$

- (a) Si $v(\Delta) = 0$, la fibre spéciale est non singulière, $v(\mathcal{F}) = \alpha_Q = \gamma_Q = 0$.
Si $v(\Delta) > 0$, la fibre spéciale possède un point singulier que l'on place en $P_0 = (0, 0, 1)$ par changement de variables linéaire, soit $v(b_4) > 0$ et $v(b_6) > 0$.
- (b) Si $v(b_2) = 0$, la fibre spécial est de type I_n , $\gamma_Q = 0$, $v(\mathcal{F}) = \alpha_Q = 1$.
- (c1) Si $v(b_2) > 0$ et $v(b_6) = 1$, en P_0 on obtient

$$\hat{O}_{E, P_0} = \frac{k[[x, y, \pi]]}{(y^2 - x^3 - b_2 x^2 - b_4 x - b_6)},$$

$$\mathcal{M}_{P_0} = (x, y) \quad \text{et} \quad L_{P_0} = (2y, 2b_2 x + b_4).$$

P_0 est régulier dans \mathcal{A}_0 , la fibre spéciale est de type II.

- (i) Si $v(b_4) \leq v(b_2)$ alors $1 + 2b_2 b_4^{-1} x$ est inversible donc $b_4 \in L_{P_0}$, soit $v_{P_0} \leq v(b_4)$ et $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) = 3v(b_4)$, d'où $v_{P_0} \leq \frac{1}{3}v(\mathcal{F})$.

On a également :

$$\begin{aligned} 2b_2 b_6 &= 2b_2 y^2 - 2b_2 x(x^2 + b_2 x + b_4) \\ &= r + b_4(x^2 + b_2 x + b_4), \quad \text{avec } r \in L_{P_0}, \end{aligned}$$

- (ii) Ainsi pour $v(b_4) > v(b_2)$, on a $r = b_6 b_2 u$ avec u inversible, donc $b_6 b_2 \in L_{P_0}$, soit $v_{P_0} \leq v(b_2) + 1$ et $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) = 3v(b_2) + 1$, d'où $v_{P_0} \leq \frac{1}{2}v(\mathcal{F})$.

On a donc $\gamma_Q = 0$, $\frac{1}{2}v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q$ pour les fibres spéciales de types II.

Si $v(b_6) \geq 2$, P_0 n'est pas régulier. On éclate \mathcal{A}_0 au point P_0 en faisant le changement de variables $(X, Y, Z) = (\pi X_1, \pi Y_1, Z)$, pour obtenir un nouveau modèle plan

$$\mathcal{A}_1 : \pi(X_1^3 + b_{2,1} X_1^2 Z) = ZR(X_1, Y_1, Z),$$

avec

$$R(X_1, Y_1, Z) = (Y_1^2 - b_{4,1} X_1 Z - b_{6,2} Z^2).$$

$\tilde{\mathcal{A}}_1$ est alors l'union d'une droite $Z = 0$ et d'une conique (possiblement dégénérée) d'équation $\tilde{R}(X_1, Y_1, Z) = 0$, se coupant en $P = (1, 0, 0)$.

- (c2) Si $v(b_4) = 1$, la conique n'est pas dégénérée, la fibre spéciale est alors de type III, on a $\gamma_Q = 0$, $\frac{1}{2}v(\mathcal{F}) = \alpha_Q = 1$ d'après Sect. 3.

(c3) Si $v(b_4) > 1$ et $v(b_6) = 2$, la conique est dégénérée en deux droites distinctes, la fibre spéciale est alors de type IV, P est son seul point singulier et il est régulier dans E . En ce point on obtient:

$$y_1^2 z = \pi(1 + b_{2,1}z) + b_{4,1}z^2 + b_{6,2}z^3,$$

$$z \mid \pi, \mathcal{M}_P = (y_1, z) \quad \text{et} \quad L_P = (2y_1z, y_1^2 - \pi b_{2,1} - 2b_{4,1}z).$$

(i) Si $v(b_2) \leq v(b_4) - 1$, alors $zb_2 \in L_P$ soit $v_P \leq v(b_2) + 1$ et $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 2 = 3v(b_2)$, d'où $v_P \leq \frac{2}{3}v(\mathcal{F})$.

On a de plus:

$$\begin{aligned} \pi b_{4,1} &= b_{4,1}y_1^2z - b_{4,1}z(b_2 + b_{4,1}z + b_{6,2}z) \\ &= r + b_2(b_2 + b_{4,1}z + b_{6,2}z^2), \quad r \in L_P. \end{aligned}$$

(ii) Ainsi pour $v(b_2) \geq v(b_4)$, on a $r = ub_4$ avec u inversible, donc $b_4 \in L_P$ soit $v_P \leq v(b_4)$ et $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 2 = 3v(b_4) - 2$, d'où $v_P \leq \frac{1}{2}v(\mathcal{F})$ car $v(b_4) \geq 2$.

On a donc $\underline{\gamma_Q} = 0$, $\frac{2}{3}v(\mathcal{F}) \geq \underline{\alpha_Q}$ pour les fibres de types IV.

Si $v(b_6) > 2$, la conique est dégénérée en deux droites confondues

$$\mathcal{A}_1 : Y_1^2 Z = \pi[X_1^3 + b_{2,1}X_1^2 Z + b_{4,2}X_1 Z^2 + b_{6,3}Z^3] = \pi R(X_1, Z).$$

Les racines de \tilde{R} correspondent à des points de $\tilde{\mathcal{A}}_1$ non réguliers dans \mathcal{A}_1 , on éclate la composante double en ces points en considérant le joint de \mathcal{A}_1 avec le modèle plan \mathcal{A}_2 obtenu par le changement de variables $(X_1, \pi Y_2, Z) = (X_1, Y_1, Z)$

$$\mathcal{A}_2 : \pi Y_2^2 Z = R(X_1, Z).$$

(c4,5m) Si \tilde{R} a deux ou trois racines distinctes, la fibre spéciale est de type I_m^* , $m \in \mathcal{N}$, alors $\underline{\gamma_Q} = \underline{\alpha_Q} = \frac{1}{2}v(\mathcal{F}) = 1$ d'après Section 3.

Si \tilde{R} a une seule racine, on la translate en $X_1 = 0$ par changement de variables linéaire, alors $v(b_2) \geq 2$, $v(b_4) \geq 3$, et $v(b_6) \geq 4$. $\mathcal{A}_{1,2}$ n'est pas régulier aux points de la composante triple de \mathcal{A}_2 correspondant aux racines de $y_2^2 - \tilde{b}_{6,4}$.

(c6) Si $v(b_6) = 4$, $y_2^2 - \tilde{b}_{6,4}$ a deux racines distinctes non nulles, la fibre spéciale est de type IV*, et le point P_0 est régulier. Le modèle régulier est alors obtenu en faisant un éclatement aux points correspondant à ces racines, ce qui fait apparaître deux \mathbb{P}^1 de multiplicités 2. En un point quelconque $P_a = (0, a, 1)$ de \mathcal{A}_2 qui ne soit pas d'intersection dans la fibre du modèle régulier (ces derniers points sont tels que $v_P = 1$ d'après Sect. 2.1), on a

$$\pi(y_2^2 - b_{6,4}) = x_1^3 + \pi(b_{2,2}x_1^2 + b_{4,3}x_1),$$

$$\mathcal{M}_{P_a} = (x_1, y_2 - a) \quad \text{et} \quad L_{P_a} = (2\pi y_2, \pi(2b_{2,2}x_1 + b_{4,3})).$$

Alors pour tout $a \neq 0$, y_2 est inversible et $v_{P_a} = 1$. On a donc $\mu_P = 1$ sauf en un nombre fini de points de la composante triple soit $\gamma_Q = 1$.

- (i) si $v(b_4) \leq v(b_2) + 1$, alors $b_{4,2} \in L_{P_0}$ soit $v_{P_0} \leq v(b_4) - 2$ et $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 6 = 3v(b_4) - 6$, soit comme $v(b_4) \geq 3$, $v_{P_0} \leq \frac{1}{3}v(\mathcal{F})$.

On a de plus:

$$\begin{aligned} \pi^2 b_{6,4} b_{2,2} &= \pi^2 y_2^2 b_{2,2} - \pi b_{2,2} x_1 (x_1^2 + \pi b_{2,2} x_1^2 + \pi b_{4,3}) \\ &= r + \pi b_{4,3} t, \quad r \in L_{P_0}, \quad t \in \hat{\mathcal{O}}_{E, P_0}. \end{aligned}$$

- (ii) Ainsi pour $v(b_4) > v(b_2) + 1$, on a $r = b_2 u$ avec u inversible, d'où $b_2 \in L_{P_0}$ et $v_{P_0} \leq v(b_2)$, or $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 6 = 3v(b_2) - 2$, soit $v_{P_0} \leq \frac{1}{2}v(\mathcal{F})$.

On a donc $\gamma_Q = 1$, $\frac{1}{2}v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q$ pour les fibres spéciales de types IV*.

Si $v(b_6) > 4$, $y_2^2 - b_{6,4}$ a une racine double et P_0 n'est plus régulier. On éclate ce point en considérant le joint de $\mathcal{A}_{1,2}$ avec le modèle plan \mathcal{A}_b obtenu par le changement de variables $(X', Y', Z') = (\pi^3 X^2 Z, Y^2 X, \pi^4 Z^2 Y)$

$$\mathcal{A}_b : Y'(b_{4,3}X' - Y')^3 Z'^4 + \pi X'^2 (X'Y' + b_{6,5}Z'^2)^3 + \pi^2 X'Y'^2 Z'^2 (b_{2,2}X')^3 = 0$$

$\tilde{\mathcal{A}}_b$ est l'union d'une composante quadruple $Z'^4 = 0$ coupant $\tilde{\mathcal{A}}_3$ en $P' = P_0 \times (1, \tilde{b}_{4,3}, 0)$ dans la fibre spéciale du joint, d'une composante triple $(\tilde{b}_{4,3}X' - Y')^3 = 0$, et d'un \mathcal{P}^1 simple $Y' = 0$.

(c7) Si $v(b_4) = 3$, $\mathcal{A}_{1,2,b}$ n'est pas régulier:

- d'une part, au point P'' d'intersection de la composante triple et de la composante simple de $\tilde{\mathcal{A}}_b$, on l'éclate en ce point en considérant son joint avec un nouveau modèle plan \mathcal{A}_3 (cf. 3.3.(c5)), ce qui fait apparaître un \mathcal{P}^1 de multiplicité 2 dans la fibre spéciale dont tous les points vérifient $v_P = 1$ en caractéristique 3.
- d'autre part, en un point de la composante quadruple, on l'éclate en ce point en considérant le joint avec un nouveau modèle plan \mathcal{A}_4 (cf. 3.3.(c5)) ce qui fait également apparaître une droite de multiplicité 2 qui ne pose pas problème. La fibre spéciale est alors de type III*.

Les calculs faits pour la composante triple de $\tilde{\mathcal{A}}_2$ dans le cas (c6) sont encore valables, tous ses points autres que P' , vérifient donc $v_P = 1$. P' quant à lui vérifie également $v_{P'} = 1$ car c'est un point d'intersection avec un \mathcal{P}^1 de multiplicité 4.

Reste à étudier la valeur de v_P pour les points de la composante triple de $\tilde{\mathcal{A}}_b$ autres que P' et P'' . Soit $P_a = (a, \tilde{b}_{4,3}a, 1)$, $a \neq 0$, un tel point, on a:

$$\mathcal{M}_{P_a} = (x' - a, y' - \tilde{b}_{4,3}x') \quad \text{et} \quad \pi = u(b_{4,3}x' - y')^3 \quad \text{avec } u \text{ inversible,}$$

$$(2\pi x'(x'y' - b_{6,5})^3 + 4\pi^2 b_{2,2}^3 x'^3 y'^2, (b_{4,3}x' - y')^3 + 2\pi^2 b_{2,2}^3 x^4 y) \in L_{P_a},$$

Le second générateur étant de valuation 1, tout point P_a de la composante triple est tel que $v_{P_a} = 1$, d'où $\frac{1}{2}v(\mathcal{F}) = \gamma_Q = \alpha_Q = 1$ pour les fibres spéciales de type III*.

(c8) Si $v(b_4) \geq 4$ et $v(b_6) = 5$: $\tilde{\mathcal{A}}_b$ est l'union de deux \mathcal{P}^1 de multiplicités 4 et $\mathcal{A}_{1,2,3,4,b}$ n'est pas régulier en leur intersection. On l'éclate en ce point en considérant le joint avec un modèle plan \mathcal{A}_c obtenu par le changement de variables $(X'', Y'', Z'') = (\pi^4 X^3 Z, Y^3 X, \pi^4 Y^2 Z^2)$

$$\mathcal{A}_c : Y''^6(X - Z)^5 + \pi(b_{6,5}^5 X''^2 Z''^9 + Y'' Q_1 + \pi Q_2) = 0,$$

où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes homogènes de degrés respectifs 10 et 11 (cf. [Nér64] Sect. 15). $\tilde{\mathcal{A}}_c$ est l'union de deux \mathcal{P}^1 , l'un de multiplicité 6, $Y^6 = 0$, et l'autre de multiplicité 5, $Y^6(X - Z)^5 = 0$.

En caractéristique 5, cette composante peut a priori avoir des points tels que $v_P > 1$.

Soit alors $P_a = (1, a, 1)$, $a \neq 0$ un point quelconque de la composante de multiplicité 5 qui ne soit pas d'intersection, on a

$$u\pi = y^6(x - 1)^5, \quad u \in \hat{\mathcal{O}}_{E, P_a}.$$

Si u est inversible dans \mathcal{O}_{E, P_a} , P_a est régulier dans \mathcal{A}_c et après changement de variables on se ramène à

$$\mathcal{M}_{P_a} = (x - 1, y' - a') \quad \text{et} \quad L_{P_a} = (y'^5(x - 1)^5) \text{ soit } v_{P_a} = 1.$$

Si u n'est pas inversible, P_a n'est pas régulier dans \mathcal{A}_c , par contre le point correspondant $(0, 1, 0) \times P_a$ l'est dans $\mathcal{A}_{4,c}$.

En posant

$$x = \frac{X_2}{Y_3}, \quad z = \frac{Z}{Y_3}, \quad y' = \frac{Y''}{X''}, \quad z' = \frac{Z''}{X''},$$

on obtient

$$\mathcal{M}_P = (x, z, y' - a, z' - 1), \quad z = x^3 z', \quad \pi = x^5 y' z'.$$

En reportant ces relations dans \mathcal{A}_4 on obtient

$$a(z' - 1) = xu, \quad \mathcal{M}_{P_a} = (x, y' - a) \quad \text{et} \quad \pi = x^5(1 + a^{-1}xu)y',$$

avec u inversible, soit $x^5(1 + a^{-1}xv) \in L_{P_a}$, $v \in \hat{\mathcal{O}}_{E, P_a}$, d'où $v_{P_a} = 1$ comme on l'attendait.

Revenons à la caractéristique 3, de la même manière, tous les points de la composante de multiplicité 6 vérifient $v_P = 1$ en caractéristique 3 (et même 2).

– Composante triple de $\tilde{\mathcal{A}}_4$: soit $P_a = (1, a, 0)$, un quelconque de ses points qui ne soit pas d'intersection, on a :

$$\begin{aligned} \pi y^2 z &= \pi + \pi b_{2,2} z + b_{6,5} z^3 + b_{4,4} z^2, \\ \pi &= z^3 u, \quad \text{avec } u \text{ inversible, } \mathcal{M}_{P_a} = (y - a, z) \end{aligned}$$

et

$$L_{P_a} = (2\pi yz, \pi y^2 - \pi b_{2,2} - 2\pi b_{4,4} z).$$

– Si $a^2 + \tilde{b}_{2,2} \neq 0$, $\pi \in L_{P_a}$ et $v_{P_a} = 1$. Les points des autres composantes vérifiant tous $\mu_P \leq 1$, on en déduit d'après le Lemme 2.1 que $\gamma_Q = 1$.

– Dans tous les cas, $\pi z(2b_{4,4} z + b_{2,2}) \in L_P$, soit

- Si $v(b_2) \leq v(b_4) - 2$, alors $v_P \leq v(b_2)$ et $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 8 = 3v(b_2) - 3 \geq v_P + 1$.
- Si $v(b_2) > v(b_4) - 2$, alors $v_P \leq v(b_4) - 2$ et $v(\mathcal{F}) = 3v(b_4) - 8 \geq v_P + 1$.

– Point d'intersection entre les composantes de multiplicités 3 et 6 de $\mathcal{A}_{4,c}$: il a pour coordonnées $(0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$. En posant :

$$x = \frac{X_2}{Y_3}, \quad z = \frac{Z}{Y_3}, \quad y' = \frac{Y''}{X''}, \quad z' = \frac{Z''}{X''},$$

on obtient :

$$\mathcal{M}_P = (x, z, y', z'), \quad z = x^3 z', \quad \pi = x^5 y' z'.$$

En reportant ces relations dans \mathcal{A}_4 on obtient :

$$\pi z' = \pi + \pi b_{2,2} x^2 z' + \pi b_{4,4} x^4 z'^2 + b_{6,5} x^6 z'^3,$$

soit $y' = uxz'^2$ avec u inversible, $\mathcal{M}_P = (x, z')$ donc P est bien régulier, et l'on voit clairement que $v_P = 1$.

On a donc $\gamma_Q = 1$, $v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q + 1$ dans leslant cas des fibres de types Π^* .

Enfin, si $v(b_6) \geq 6$, l'équation de départ n'est pas minimale. Par changement de variables on est ramené aux cas précédent avec les coefficients $b_{i,i}$ et la valuation du discriminant diminuée de 12.

On a donc montré $v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q + \gamma_Q$ pour tous les types de fibres possibles dans le cas d'égale caractéristique 3.

4.3. CARACTÉRISTIQUE 2

On reprend des notations similaires à celles introduites dans la section précédente. On part, cette fois, du modèle projectif plan plus général

$$\mathcal{A}_0 : ZY^2 + a_1XYZ + a_3YZ^2 = X^3 + a_2X^2Z + a_4XZ^2 + a_6Z^3,$$

avec $a_i \in K(C)$ et $v(a_i) \geq 0$ pour tout i .

On a alors en égale caractéristique 2

$$b_2 = a_1^2, \quad b_4 = a_1 a_3, \quad b_6 = a_3^2,$$

$$b_8 = a_1^2 a_6 + a_1 a_3 a_4 + a_2 a_3^2 + a_4^2,$$

$$\Delta = b_2^2 b_8 + b_6^2 + b_2 b_4 b_6 = a_1^6 a_6 + a_1^5 a_3 a_4 + a_4^4 a_2 a_3^2 + a_1^4 a_4^2 + a_3^4 + a_1^3 a_3^3.$$

(a) Si $v(\Delta) = 0$, la fibre spéciale est non singulière, $v(\mathcal{F}) = \gamma_Q = \alpha_Q = 0$.

Si $v(\Delta) \geq 1$, la fibre spéciale possède un point singulier que l'on déplace en $P_0 = (0, 0, 1)$ par changement de variables linéaire. On obtient alors $v(a_3) \geq 1$, $v(a_4) \geq 1$, et $v(a_6) \geq 1$.

(b) Si $v(b_2) = 0$, la fibre spéciale est de type I_n , et on sait alors d'après Sect. 2.1 que $\gamma_Q = 0$, $v(\mathcal{F}) = \alpha_Q = 1$.

(c1) Si $v(b_2) \geq 1$ et $v(a_6) = 1$, par changement de variables linéaire on peut également supposer que $v(a_2) \geq 1$, soit, pour $i = 1, 2, 3, 4$ et 6 , $v(a_i) \geq 1$. Le modèle plan est régulier et la fibre spéciale est de type II.

En P_0 on obtient:

$$y^2 + a_1 x y + \pi a_{3,1} y = x^3 + \pi(a_{2,1} x^2 + a_{4,1} x + a_{6,1}),$$

$$\mathcal{M}_{P_0} = (x, y) \quad \text{et} \quad L_{P_0} = (a_1 x + a_3, a_1 y + x^2 + a_4).$$

D'où, en particulier

$$(a_3 + a_1 x)^2 + a_1^2 (a_1 y + x^2 + a_4) = a_3^2 + a_1^3 y + a_1^2 a_4 \in L_{P_0}.$$

(i) Si $v(a_3^2 + a_1^2 a_4) \leq v(a_1^3)$, alors $a_3^2 + a_1^2 a_4 \in L_{P_0}$ et $v_{P_0} \leq v(a_3^2 + a_1^2 a_4)$, or $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) = v(a_1^6 a_6 + a_1^4 a_4^2 + a_3^4) = 2v(a_3^2 + a_1^2 a_4)$ dans ce cas, soit $v_{P_0} \leq \frac{1}{2}v(\mathcal{F})$.

On a également:

$$\begin{aligned} w &= y(a_3^2 + a_1^3 y + a_1^2 a_4) + a_1^2 x^2 (a_1 x + a_3) \\ &= a_1^3 (y^2 + x^3) + y(a_1^2 a_4 + a_3^2) + a_3 a_1^2 x^2 \\ &= u a_1^3 a_6 + y(a_1^2 a_4 + a_3^2) \quad \text{avec } u \text{ inversible.} \end{aligned}$$

(ii) Ainsi pour $v(a_1^3) < v(a_1^2 a_4 + a_3^2)$, on a $a_1^3 a_6 \in L_{P_0}$ et $v_{P_0} \leq v(a_1^3 a_6)$, or $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) = 2v(a_1^3 a_6)$ dans ce cas, soit $v_{P_0} \leq \frac{1}{2}v(\mathcal{F})$.

On a donc $\gamma_Q = 0$, $\frac{1}{2}v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q$ pour les fibres spéciales de types II.

Si $v(a_6) \geq 2$, le modèle plan n'est pas régulier en P . On éclate \mathcal{A}_0 au point P_0 par le changement de variables $(X, Y, Z) = (\pi X_1, \pi Y_1, Z)$, pour obtenir un nouveau modèle plan

$$\mathcal{A}_1: ZR_1(X_1, Y_1, Z) - \pi(X_1^3 + a_{2,1}X_1^2Z + a_{1,1}X_1Y_1Z)$$

avec

$$R_1(X_1, Y_1, Z) = Y_1^2 + a_{3,1}Y_1Z + a_{4,1}X_1Z + a_{6,2}Z^2,$$

dont la fibre spéciale $\tilde{\mathcal{A}}_1$ au-dessus de Q est l'union de la droite $Z = 0$ et de la conique possiblement dégénérée $\tilde{R}_1(X_1, Y_1, Z) = 0$, qui se coupent en $P_1 = (1, 0, 0)$ avec une multiplicité 2, P_1 est alors le seul point singulier de la fibre spéciale.

(c2) Si $v(a_4) = 1$, la conique est non-dégénérée et la fibre spéciale est de type III, on a alors

$$\mathcal{M}_{P_1} = (y, z) \quad \text{et} \quad L_{P_1} = (a_1z + a_{3,1}z^2, y^2 + a_1y + a_2 + a_{6,2}z^2)$$

avec z qui divise π sans que π divise z . D'où

- (i) Si $v(a_1) < v(a_3)$, $a_1z \in L_{P_1}$ donc $v_{P_1} \leq v(a_1) + 1$, or $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 1 \geq 4v(a_1)$ dans ce cas, soit $v_P \leq \frac{1}{2}v(\mathcal{F})$.
- (ii) Si $v(a_1) \geq v(a_3) - 1$, $a_{3,1}z^2 \in L_P$ d'où $v_P \leq v(a_3) + 1$, or $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 1 \geq 4v(a_3) - 1$ dans ce cas, soit $v_P \leq \frac{2}{3}v(\mathcal{F})$.

On a donc $\gamma_Q = 0$, $\frac{2}{3}v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q$ pour les fibres spéciales de types III.

(c3) Si $v(a_4) \geq 2$ et $v(a_3) = 1$, la conique est dégénérée en deux droites distinctes, la fibre spéciale est de type IV, on a déjà montré (Sect. 3) que $v_{P_2} = 1$ et $\gamma_Q = 0$, $\frac{1}{2}v(\mathcal{F}) = \alpha_Q = 1$.

Si $v(a_3) \geq 2$, la conique est dégénérée en une droite double. Par changement de variables linéaire on la déplace en $Y_1^2 = 0$, soit $v(a_6) \geq 3$. On a alors

$$\mathcal{A}_1: Y_1^2Z + \pi a_{1,1}XYZ + \pi a_{3,2}YZ^2 = \pi Q_1(X, Z).$$

Par changement de variables linéaire, on place en $(0, 0, 1)$ une des racines de Q_1 de multiplicité maximale, soit $v(a_6) \geq 4$. \mathcal{A}_1 n'est pas régulier aux points de $\tilde{\mathcal{A}}_1$ correspondant aux racines de \tilde{Q}_1 . On éclate simultanément ces points en considérant le joint de \mathcal{A}_1 avec le modèle plan \mathcal{A}_2 obtenu par le changement de variables $(X_1, Y_1, Z) = (X_1, \pi Y_2, Z_1)$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2: & \pi(Y_2^2Z + a_{1,1}X_1Y_2Z + a_{3,2}Y_2Z^2) \\ & = X_1^3 + a_{2,1}X_1^2Z + \pi(a_{4,3}X_1Z^2 + a_{6,4}Z^3) \end{aligned}$$

Soit $P_a = (a, 0, 1)$ un point quelconque de la composante double de \mathcal{A}_1 autre que le point d'intersection avec la composante simple, on a $\mathcal{M}_{P_a} = (x - a, y)$ et

$$L_{P_a} = (\pi(a_{1,1}x + a_{3,2}), \pi(a_{1,1}y + x^2 + a_{4,2})).$$

(c4) Si $v(a_4) = 2$, alors \tilde{Q}_1 possède trois racines distinctes. Le modèle $\mathcal{A}_{1,2}$ est alors régulier minimal et sa fibre spéciale au-dessus de Q est de type I_0^* .

- (1) Si $v(a_4) = 2$ et $v(a^2 + a_{4,2}) = 0$, on obtient de même $x^2 + a_{4,2} + a_{1,1}y$ inversible et $v_{P_a} = 1$.
- (2) Si $v(a_4) = 2$ et $v(a^2 + a_{4,2}) \geq 1$, par un changement de variable provisoire on place P_a en $(0, 0, 1)$, on obtient alors (uniquement pour ce cas) $v(a_4) > 3$ et $v(a_6) = 3$. \tilde{Q}_1 n'a alors que des racines simples. On a en particulier:

$$\begin{aligned} &\pi(a_{3,2} + a_{1,1}x)^2 + \pi a_{1,1}^2(a_{1,1}y + x^2 + a_{4,2}) \\ &= \pi(a_{3,2}^2 + a_{1,1}^3y + a_{1,1}^2a_{4,2}) \in L_P. \end{aligned}$$

- (i) Si $v(a_3^2 + a_1^2a_4) \leq v(a_1^3) + 1$ alors $\pi(a_{3,2}^2 + a_{1,1}^2a_{4,2}) \in L_P$ et $v_P \leq v(a_{3,2}^2 + a_{1,1}^2a_{4,2}) + 1$, alors $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 3 = v(a_1^6a_6 + a_1^4a_4^2 + a_3^4) - 3 = 2v(a_{3,2}^2 + a_{1,1}^2a_{4,2}) + 5$ dans ce cas, soit $v_P \leq \frac{1}{2}v(\mathcal{F})$. On a donc $\gamma_Q = 1$ d'après le Lemme 2.1.
- (ii) Si $v(a_3^2 + a_1^2a_4) > v(a_1^3) + 1$ alors $\pi a_{1,1}^3y \in L_P$ et y divise π soit $v_P \leq 3v(a_1) - 1$, et dans ce cas on a $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - 4 = 6v(a_1) - 1$ soit $v_P \leq \frac{1}{2}v(\mathcal{F})$.

On a donc $\underline{\gamma_Q} = 1, \frac{1}{2}v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q$ pour les fibres de types I_0^* .

(c5m) Si $v(a_4) \geq 3$ et $v(a_2) = 1$, \tilde{Q}_1 a une racine double en 0 et une racine simple, \mathcal{A}_2 est l'union d'un \mathbb{P}^1 de multiplicité 2 et d'un \mathbb{P}^1 simple. $\mathcal{A}_{1,2}$ n'est pas régulier au point de la composante double de $\tilde{\mathcal{A}}_2$ correspondant aux racines de \tilde{Q}_2 , avec

$$Q_2(Y_2, Z) = (Y_2^2 + a_{3,2}Y_2Z + a_{6,4}Z^2).$$

On éclate simultanément ces points en considérant le joint avec le modèle plan obtenu par le changement de variables $(X_1, Y_2, Z) = (\pi X_2, Y_2, Z)$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3: &Y_2^2Z + \pi a_{1,1}X_2Y_2Z + a_{3,2}Y_2Z^2 \\ &= \pi^2X_2^3 + \pi a_{2,1}X_2^2Z + a_{4,3}X_2Z^2 + a_{6,4}Z^3. \end{aligned}$$

Si Q_2 a deux racines simples $\mathcal{A}_{1,2,3}$ est régulier, sinon il faut éclater le point correspondant à sa racine double. De manière récursive on construit un modèle comme joint des modèles (on corrigera une petite erreur dans [Nér64] Sect. 12)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{2i-1} &: Y_i^2 Z + \pi a_{1,1} X_i Y_i Z + a_{3,i} Y_i Z^2 \\ &= \pi^i X_i^3 + \pi a_{2,1} X_i^2 Z + \pi a_{4,i+1} X_i Z^2 + a_{6,2i} Z^3 \\ \mathcal{A}_{2i} &: \pi(Y_{i+1}^2 Z + a_{1,1} X_i Y_{i+1} Z + a_{3,i+1} Y_{i+1} Z^2) \\ &= \pi^{i-1} X_i^3 + a_{2,1} X_i^2 Z + a_{4,i+1} X_i Z^2 + a_{6,2i+1} Z^3. \end{aligned}$$

$\tilde{\mathcal{A}}_k$ est l'union de la droite $Z = 0$ (qui dans le joint correspond à la composante simple de $\tilde{\mathcal{A}}_1$ ou $\tilde{\mathcal{A}}_2$) et de

$$\tilde{\mathcal{B}}_k : \begin{cases} \tilde{Q}_{2i-2}(Y_i, Z) = Y_i^2 + a_{3,i} Y_i Z + a_{6,2i} Z^2 = 0, & \text{si } k = 2i - 1 > 1, \\ \tilde{Q}_{2i-1}(X_i, Z) = a_{2,1} X_i^2 + a_{4,i+1} X_i Z + a_{6,2i+1} Z^2 = 0, & \text{si } k = 2i > 1. \end{cases}$$

A chaque étape on fait un changement de variable pour avoir une racine de \tilde{Q}_k en $(0, 0, 1)$.

Si $i < v(a_3)$, \mathcal{B}_{2i-1} est un \mathcal{P}^1 de multiplicité 2 et le modèle $\mathcal{A}_{1,\dots,2i-1}$ n'est pas régulier aux points correspondants aux racines de \tilde{Q}_{2i-1} . Par contre lorsque $i = v(a_3) = n + 1$, il est composé de deux \mathcal{P}^1 simples et le modèle $\mathcal{A}_{1,2,\dots,2n+1}$ est alors régulier.

De même $\tilde{\mathcal{B}}_{2i}$ est un \mathcal{P}^1 de multiplicité 2 si $i + 1 < v(a_4)$ et le modèle $\mathcal{A}_{1,\dots,2i}$ n'est pas régulier aux points correspondant aux racines de \tilde{Q}_{2i} . Il est par contre composé de deux \mathcal{P}^1 simples lorsque $i + 1 = v(a_4) = n + 2$, le modèle $\mathcal{A}_{1,2,\dots,2n+2}$ étant alors régulier.

Chaque étape revient à diviser le discriminant par π , donc le processus s'arrête. On obtient alors un modèle régulier minimal $\mathcal{A}_{1,2,\dots,m+2}$ dont la fibre spéciale est de type I_m^* avec $m + 5$ composantes et

- (1) Si $m = 2n - 1$, $v(a_3) = n + 1$, $v(a_4) \geq n + 2$ et $v(a_6) \geq 2n + 3$, d'où $v(\Delta) = v(a_3^4 + a_1^4 a_2 a_3^2)$.
- (2) Si $m = 2n$, $v(a_4) = n + 2$, $v(a_3) \geq n + 2$ et $v(a_6) \geq 2n + 4$, d'où $v(\Delta) = v(a_3^4 + a_1^4 a_4^2)$.

Soit $P_a = (0, a, 1)$, $a \neq 0$, un point quelconque de la composante double \mathcal{A}_{2i} ($0 < 2i < m + 2$) qui ne soit pas d'intersection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{1,\dots,m+2}$, alors

$$\mathcal{M}_{P_a} = (x, y - a), \pi = x^2 u \quad \text{avec } u \text{ inversible}$$

et

$$L_{P_a} = (a_1 x + a_{3,i}, a_1 y + \pi^{i-1} x^2 + a_{4,i+1}).$$

D'où $v_{P_a} \leq \text{Min}(v(a_1), v(a_3) - i) \leq \text{Min}(v(a_1), v(a_3) - 1)$.

Soit $P_a = (a, 0, 1)$, $a \neq 0$, un point quelconque de la composante double \mathcal{A}_{2i-1} ($0 < 2i - 1 < m + 2$) qui ne soit pas d'intersection dans $\tilde{\mathcal{A}}_{1, \dots, m+2}$, alors:

$$\mathcal{M}_{P_a} = (x - a, y), \pi = y^2 u \quad \text{avec } u \text{ inversible}$$

et

$$L_{P_a} = (a_1 x + a_{3,i}, a_1 y + \pi^i x^2 + a_{4,i}).$$

On vérifie alors que $v_{P_a} \leq \min(v(a_1) + 1, v(a_3) - i + 1) \leq \min(v(a_1) + 1, v(a_3) - 1)$ pour $i \geq 2$. Si $i = 1$ et $m > 0$, i.e., $v(a_4) \geq 3$, alors $x^2 + a_{4,2} + a_{1,1}y$ est inversible pour tout $a \neq 0$, soit $v_{P_a} = 1$ pour tout $a \neq 0$. Le cas restant correspond à I_0^* , déjà étudié.

Soit $P_0 = (0, 0, 1) \times (1, 0, 0)$ le point d'intersection de $\tilde{\mathcal{A}}_{2i, 2i+1}$. En posant

$$x = \frac{X_i}{Z}, \quad y = \frac{Y_i}{Z}, \quad y' = \frac{Y_{i+1}}{X_{i+1}}, \quad z' = \frac{Z}{X_{i+1}},$$

on obtient:

$$\mathcal{M}_{P_0} = (x, y, y', z'), \quad \pi = xz' \text{ et } y' = yz'.$$

En reportant ces relations dans l'équation de \mathcal{A}_{2i+1} on obtient également

$$y^2 z'^2 + a_1 y z' + a_{3,i+1} y z'^2 = \pi^i x + \pi a_{2,1} + a_{4,i+1} z' + a_{6,2i+2} z'^2$$

soit $x = u y^2 z'$, $\pi = u y^2 z'^2$ avec u inversible et $\mathcal{M}_{P_0} = (y, z')$. P_0 est donc bien régulier dans le modèle construit, et l'on a

$$L_{P_0} = (a_1 z' + a_{3,i+1} z'^2 + \pi^i u_1 y^2 z', a_1 y + a_{4,i} + \pi^i y^2 (1 + u_2 z'))$$

soit $v_{P_0} \leq \min(v(a_1) + 1, v(a_3) - i, i + 1) \leq \min(v(a_1) + 1, v(a_3) - \frac{n}{2})$.

Soit $P'_0 = (0, 0, 1) \times (0, 1, 0)$ le point d'intersection de $\tilde{\mathcal{A}}_{2i-1, 2i}$. En posant:

$$x = \frac{X_i}{Z}, \quad y = \frac{Y_i}{Z}, \quad x' = \frac{X_i}{Y_{i+1}}, \quad z' = \frac{Z}{Y_{i+1}}$$

on obtient

$$\mathcal{M}_{P'_0} = (x, y, x', z'), \quad \pi = yz' \quad \text{et} \quad x' = xz'.$$

En reportant ces relations dans l'équation de \mathcal{A}_{2i} on obtient également:

$$\begin{aligned} yz'^2 + a_1 xz'^2 + a_{3,i} z'^2 \\ = \pi^{i-1} x^3 z'^3 + a_{2,1} x^2 z'^3 a_{4,i+1} x z'^3 + a_{6,2i+1} z'^3, \end{aligned}$$

soit $y = x^2z'u$, $\pi = x^2z'^2u$, u inversible, et $\mathcal{M}_{P'_0} = (x, z')$. P'_0 est donc régulier dans $\mathcal{A}_{2i-1,2i}$ et

$$L_{P'_0} = (a_1x + a_{3,i}, a_1z' + u^{-1}\pi^i + a_{4,i+1}z'^2),$$

d'où $v_{P'_0} \leq \text{Min}(v(a_1) + 1, v(a_3) - i, i)$, $i \geq 1$.

Or, dans les cas I_m^* , $v(\mathcal{F}) = v(\Delta) - m - 4 \geq \text{Min}(2v(a_3) - 1, 4v(a_1))$ avec $v(a_1) \geq 1$ et $v(a_3) \geq 2$, on a donc $\frac{1}{2}v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q \geq \gamma_Q$ pour les fibres de types I_m^* .

Si $v(a_2) \geq 2$ et $v(a_4) \geq 3$, \tilde{Q}_1 a une racine triple en 0, $\tilde{\mathcal{A}}_2$ est un \mathcal{P}^1 de multiplicité 3, et $\mathcal{A}_{1,2}$ n'est pas régulier aux point de cette composante correspondant aux racines de \tilde{Q}_3 . On éclate en ces points, comme en (c5), en considérant $\mathcal{A}_{1,2,3}$. Ce modèle n'est alors pas régulier aux points d'intersection de $\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}$.

(c6) Si $v(a_3) = 2$, on éclate ce modèle en considérant son joint avec le modèle plan (on corrigera une erreur d'impression dans [Nér64] Sect. 13)

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_a : (Y'^2 + a_{3,2}Y'Z' - \pi a_{2,2}X'Z' - a_{6,4}Z'^2)^2 \\ = \pi X'Z'(a_{1,1}Y' + X' + a_{4,3}Z')^2, \end{aligned}$$

qui correspond au changement de variables $(X', Y', Z') = (X^2, \pi YZ, \pi^3 Z^2)$.

Le modèle ainsi obtenu est régulier et $\tilde{\mathcal{A}}_a$ est l'union de deux \mathcal{P}^1 de multiplicités 2. Par changement de variable, l'un quelconque des deux aura pour équation $Y^2 = 0$ soit $v(a_6) \geq 5$.

En $P_a = (a, 0, 1)$, $a \neq 0$, point quelconque de cette composante double qui ne soit pas d'intersection, on obtient $L_{P_a} = (\pi(a_{1,1}y + x + a_{4,3})^2)$.

- (i) Si $a + a_{4,3} \neq 0$, le point P_a est régulier dans \mathcal{A}_a , $\mathcal{M}_{P_a} = (x - a, y)$ et $v_{P_a} = 1$.
- (ii) Si $a + a_{4,3} = 0$, le point P_a n'est pas régulier dans \mathcal{A}_a , le point correspondant $(1, 0, 0) \times (a, 0, 1)$ dans $\mathcal{A}_{3,a}$ l'est par contre. En posant

$$x = \frac{Y_2}{X_2}, \quad z = \frac{Z}{X_2}, \quad x' = \frac{X'}{Z'}, \quad y' = \frac{Y'}{Z'}$$

on obtient

$$\mathcal{M}_P = (y, z, x' - a, y'), \quad y = zy' \quad \text{et} \quad \pi = z^2x'.$$

En reportant ces relations dans l'équation de \mathcal{A}_3 on obtient également $a_{3,2}y' \in (z, x' - a)$, soit $\mathcal{M}_{P_a} = (z, x' - a)$ dans ce cas et $L_{P_a} = (x'z)$, d'où $v_{P_a} = 1$.

Les calculs du cas I_0^* montrant que les points de la composante double de $\tilde{\mathcal{A}}_2$ vérifient également, $v_P = 1$, on a donc $\frac{1}{2}v(\mathcal{F}) = \alpha_Q = \gamma_Q = 1$ pour les fibres spéciales de types IV^* .

Si $v(a_3) \geq 3$, \tilde{Q}_3 a une racine double correspondant à un point d'intersection qui n'est plus régulier. On fait un éclatement en ce point en considérant le joint de

$\mathcal{A}_{1,2,3}$ avec le modèle plan \mathcal{A}_b obtenu par le changement de variables $(X', Y', Z') = (\pi^3 X^2 Z, Y^2 X, \pi^4 Z^2 Y)$

$$\mathcal{A}_b: Y'(a_{4,3}X' - Y')^3 Z'^4 + \pi X'^2(X'Y' + a_{6,5}Z'^2 - a_{1,1}Y'Z')^3 + \pi^2 X'Y'^2 Z'^2 (a_{2,2}X' - a_{3,3}Z')^3 = 0.$$

(c7) Si $v(a_4) = 3$, en prenant le joint de ce nouveau modèle avec \mathcal{A}_4 on obtient un modèle régulier $\mathcal{A}_{1,2,3,4,b}$.

Les calculs du cas I_0^* montrent que les points de la composante double de $\tilde{\mathcal{A}}_2$ vérifient tous $v_P = 1$.

- Composante quadruple de $\tilde{\mathcal{A}}_b$: soit $P_a = (1, a, 0)$, $a \neq 0$, $\tilde{a}_{4,3}$ un de ses points quelconques qui ne soit pas d'intersection. On a

$$(a_{4,3} - y')^3 z'^4 = \pi y'^2 (1 + z'^2 u) + \pi^2 u', \quad u, u' \in \hat{\mathcal{O}}_{E, P_a},$$

donc

$$(a_{4,3} - y')^2 z'^4 + \pi z' v \in L_{P_a}, \quad v \in \hat{\mathcal{O}}_{E, P_a},$$

soit $v_{P_a} = 1$.

- Composante double de $\tilde{\mathcal{A}}_4$: soit $P_a = (1, a, 0)$ un quelconque de ses points qui ne soit pas d'intersection. On a

$$\pi y^2 z + \pi a_{1,1} y z + \pi a_{3,3} y z^2 = \pi + \pi a_{2,2} z + a_{4,3} z^2 + a_{6,5} z^3,$$

$$\pi(1 + zu) = a_{4,3} z^2, \quad \mathcal{M}_{P_a} = (y - a, z),$$

$$L_{P_a} = (\pi(a_{1,1}z + a_{3,3}z^2), \pi y^2 + \pi a_{1,1}y + \pi a_{2,2} + a_{6,5}z^2).$$

$v_{P_a} = 1$ sauf quand a est racine de $y^2 + \tilde{a}_{1,1}y + \tilde{a}_{2,2} + \tilde{a}_{6,5}\tilde{a}_{4,3}^{-1}$. On a donc, $\mu_{P_a} = 1$ sauf en un nombre fini de points de cette composante.

- Si $v(a_1) > v(a_3) - 2$, alors $a_{3,1} \in L_{P_a}$, et $v(\mathcal{F}) = v(a_3^4 + a_4^4 a_2 a_3^2) - 7 \geq 2v(a_3) - 1 \geq 2v_{P_a}$.
- Si $v(a_1) \leq v(a_3) - 2$, alors $a_1 \pi \in L_{P_a}$, et $v(\mathcal{F}) = 4v(a_1) - 1 \geq v(a_1) + 2 \geq v_P + 1$.

- Point d'intersection entre les composantes double et quadruple de $\tilde{\mathcal{A}}_{4,b}$: Il a pour coordonnées $P = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0)$. En posant:

$$x = \frac{X_2}{Y_3}, \quad z = \frac{Z}{Y_3}, \quad y' = \frac{Y'}{X'}, \quad z' = \frac{Z'}{X'},$$

on obtient

$$\mathcal{M}_P = (x, z, y', z', \pi), \quad z = x^2 z', \quad \pi = x^3 y' z'.$$

En reportant ces relations dans l'équation de \mathcal{A}_4 on aboutit à

$$z' = xy'u \quad \text{avec } u \text{ inversible, } \mathcal{M}_P = (x, y'),$$

et

$$\pi y'(1 + xv) + x^4 y'^2 + a_{4,3}\pi = 0, \quad v \in \hat{\mathcal{O}}_{E,P},$$

soit clairement $v_P = 1$.

- Composante double de $\tilde{\mathcal{A}}_3$: soit $P_a = (a, 0, 1)$, $a \neq \tilde{a}_{6,5}\tilde{a}_{4,3}^{-1}$ un point quelconque de cette composante qui ne soit pas d'intersection, on a

$$y^2 + \pi a_{1,1}xy + \pi a_{3,3}y + \pi^2 x^3 + \pi^2 a_{2,2}x^2 + \pi(a_{4,3}x + \alpha_{6,5}),$$

$$\mathcal{M}_{P_a} = (x - a, y)$$

et

$$L_{P_a} = (\pi a_{1,1}x + \pi a_{3,3}, \pi a_{1,1}y + \pi^2 x^2 + \pi a_{4,3})$$

soit clairement $v_{P_a} = 1$ quel que soit a .

On a donc $\gamma_Q = 1$, $v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q + 1$ pour les fibres de types III*.

Si $v(b_4) > 3$, $\tilde{\mathcal{A}}_4$ est composé de deux \mathcal{P}^1 de multiplicités 2. Le modèle précédent n'est alors plus régulier en leur intersection, comme en caractéristique 3, on l'éclate en ce point en prenant le joint de $\mathcal{A}_{1,2,3,4,b}$ avec \mathcal{A}_c .

(c8) Pour $v(a_6) = 5$ le modèle ainsi obtenu est régulier. Les calculs précédemment effectués pour la composante double de $\tilde{\mathcal{A}}_1$ en (c4), pour la composante quadruple de $\tilde{\mathcal{A}}_b$ d'équation $Y^4 = 0$ en (c7) et pour la composante sextuple en caractéristique 3 sont identiques à ceux intervenant ici, on a ainsi $v_P = 1$ en tous les points de ces composantes qui ne sont pas d'intersection.

- Composante double de $\tilde{\mathcal{A}}_3$: Soit $P_a = (a, 0, 1)$ un point quelconque de cette composante qui ne soit pas d'intersection, on a

$$y^2 + \pi a_{1,1}xy + \pi a_{3,3}y = \pi^2 x^3 + \pi^2 a_{2,2}x^2 + \pi^2 a_{4,4}x + \pi a_{6,5},$$

$$\mathcal{M}_{P_a} = (x - a, y)$$

et

$$L_{P_a} = (\pi a_{1,1}x + \pi a_{3,3}, \pi a_{1,1}y + \pi^2 x^2 + \pi^2 a_{4,4}).$$

Si $v(a_1) = 1$ alors $v_{P_a} = 1$ sauf pour $\tilde{a}_{1,1}a + \tilde{a}_{3,3} = 0$, point pour lequel $\pi y \in L_{P_a}$ soit $v_{P_a} = 2$.

Si $v(a_1) > 1$ alors pour $a \neq 0$, $v_{P_a} \leq 2$, et en tous cas:

$$\begin{aligned} & (a_{1,1}x + a_{3,3})(\pi a_{1,1}x + \pi a_{3,3}) + \pi^{-1} a_{1,1}^2 (\pi a_{1,1}y + \pi^2 x^2 + \pi^2 a_{4,4}) \\ & = \pi a_{3,3}^2 + a_{1,1}^3 y + \pi_{4,4} a_{1,1}^2 \in L_{P_a}. \end{aligned}$$

- Si $v(\pi a_{3,3}^2 + \pi_{4,4} a_{1,1}^2) > v(a_{1,1}^3)$ alors $v_{P_0} \leq 3v(a_1) - 2$ et $v(\mathcal{F}) = 6v(a_1) - 3 \geq v_{P_0} + 5$.

– Si $v(\pi a_{3,3}^2 + \pi_{4,4} a_{1,1}^2) \leq v(a_{1,1}^3)$ alors $v_{P_0} \leq v(a_1^2 a_4 + a_3^2) - 5$ et $v(\mathcal{F}) = 2v(a_1^2 a_4 + a_3^2) - 8 \geq v_{P_0} + 3$.

– Composante quadruple de $\tilde{\mathcal{A}}_b (Z^4 = 0)$: soit $P = (a, 0, 1)$, $a \neq 0$ un point quelconque qui ne soit pas d'intersection, on a

$$y^4 = \pi x^2 a_{6,5}^3 + \pi x^2 y (a_{1,1} + x) a_{6,5}^2 + \pi y^2 u.$$

Si $\tilde{a}_{1,1} + a \neq 0$ alors clairement $v_{P_a} = 1$, et en tous cas $\pi y \in L_{P_a}$ soit $v_{P_a} \leq 2$.

– Intersection entre les composantes de multiplicités 2 et 4 de $\tilde{\mathcal{A}}_{3,b}$: il a pour coordonnées $((1, 0, 0) \times (0, 0, 1))$, en posant

$$y = \frac{Y_2}{X_2}, \quad z = \frac{Z}{X_2}, \quad x' = \frac{X'}{Z'}, \quad y' = \frac{Y'}{Z'},$$

on obtient

$$\mathcal{M}_P = (y, z, x', y'), \quad y = z^2 y', \quad \pi = z^3 x' y'.$$

En reportant ces relations dans \mathcal{A}_3 on aboutit à

$$\begin{aligned} \pi &= a_{6,5} z^4 x'^2 + \pi a_{1,1} x' z + \pi a_{3,3} z^2 x' \\ &\quad + \pi z x'^2 + \pi a_{2,2} z^2 x'^2 + \pi a_{4,4} z^3 x'^2, \end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{M}_P = (z, x')$$

et

$$L_P = (\pi a_{1,1} z + \pi a_{3,3} z^2, \pi a_{1,1} x' + \pi x'^2 + \pi a_{4,4} z^2 x'^2),$$

d'où $v_P \leq 2$.

Intersection entre les composantes de multiplicités 4 et 6 de $\tilde{\mathcal{A}}_{b,c}$ il a pour coordonnées $(1, 0, 0) \times (0, 0, 1)$, en posant

$$y = \frac{Y'}{X'}, \quad z = \frac{Z'}{X'}, \quad x' = \frac{X''}{Z''}, \quad y' = \frac{Y''}{Z''},$$

on obtient

$$\mathcal{M}_P = (y, z, x', y'), \quad y = z y', \quad \pi = z^4 x'^3 y'.$$

En reportant ces relations dans l'équation de \mathcal{A}_b on aboutit à

$$y' = a_{6,5} x' z + x'^2 z + u, \quad \text{avec } u \in \mathcal{M}_P^4,$$

soit

$$\mathcal{M}_P = (x', z) \quad \text{et} \quad \pi = a_{6,5} x'^4 z^6 + x'^5 z^6,$$

d'où clairement $v_P = 1$.

En conclusion, si $v(a_1) = 1$ on a $v_P = 1$ sauf en un nombre fini de points, soit $\gamma_Q = 1$, et $v(\mathcal{F}) = 3 \geq \alpha_Q + 1$; si $v(a_1) > 1$ on a $v_P \leq 2$ sauf en un nombre fini de points, soit $\gamma_Q \leq 2$ et $v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q + 2$.

Enfin, si $v(a_6) \geq 6$, l'équation de départ n'est pas minimale. Par changement de variables on est ramené aux cas précédent avec les coefficients $a_{i,i}$ et la valuations du discriminant diminuée de 12.

On a donc montré $v(\mathcal{F}) \geq \alpha_Q + \gamma_Q$ pour tous les types de fibres possibles dans le cas d'égalité caractéristique 2.

5. Cas où j est entier

Dans le cas où j est constant on a $v_Q(j) = 0$ en tout point Q de C ou $j = 0$. Le cas isotrivial est donc un cas particulier du cas j entier. Or, lorsque j est entier et la caractéristique différente de 2, le nombre de composantes de la fibre spéciale associée à v est inférieur à 9 (toujours d'après [Nér64]), soit localement

$$v(\mathcal{F}_{E/C}) = v(\mathcal{D}_{E/C}) - m + 1 \geq \frac{1}{5}v(\mathcal{D}_{E/C}).$$

En caractéristique 2 il est possible d'avoir une fibre spéciale de type I_m^* – avec $m > 0$ et possiblement grand – ayant potentiellement bonne réduction. On verra plus loin (cf. (C.2.b.i) dans la démonstration de 7.1) que l'on a localement $v(\mathcal{F}_{E/C}) \geq \frac{1}{3}v(\mathcal{D}_{E/C})$ dans ce cas.

On a donc l'inégalité globale cherchée pour $g \geq 1$.

Remarquons que pour les mêmes raisons, on obtient un résultat dans le cadre arithmétique, soit:

PROPOSITION 5.1. *Soit E une courbe elliptique sur un corps de nombres ou un corps de fonction à une variable K , si son invariant j_E est entier (i.e., E a potentiellement bonne réduction lorsque K est un corps de nombre, et E est isotrivial lorsque K est un corps de fonction) on a $\mathcal{D}_{E/K} \leq \mathcal{F}_{E/K}^5$.*

On remarquera que l'inégalité obtenue dans ce cas est une relation de divisibilité.

Dans le cas géométrique, quand $g = 0$ il est nécessaire de supposer qu'il y a au moins une fibre singulière, c'est-à-dire, étant donné que f est isotriviale, que f n'est pas la projection sur \mathcal{P}^1 de son produit avec une courbe elliptique.

On a

$$6v_P(\mathcal{F}_{E/C}) - v_P(\mathcal{D}_{E/C}) = (12 - v_P(\mathcal{D}_{E/C})) + 6(v_P(\mathcal{D}_{E/C}) - m_P - 1),$$

d'après l'égalité de Ogg, le second terme du membre de droite étant toujours positif quand la réduction est additive. Soit s le nombre de fibres singulières,

– si $\deg(\mathcal{D}_{E/C}) < 12s$, l'égalité précédente donne

$$6 \deg(\mathcal{F}_{E/C}) - \deg(\mathcal{D}_{E/C}) \geq 12s - \deg(\mathcal{D}_{E/C}) \geq 12,$$

car $\deg(\mathcal{D}_{E/C}) = 12 \deg(\omega_E)$ implique que le degré du discriminant soit divisible par 12.

– si $\deg(\mathcal{D}_{E/C}) \geq 12s$, étant donné qu'ici $m_P \leq 9$, l'égalité donne:

$$6 \deg(\mathcal{F}_{E/C}) - \deg(\mathcal{D}_{E/C}) \geq 5 \deg(\mathcal{D}_{E/C}) - 48s \geq 12s \geq 12 \text{ si } s \geq 1.$$

On a donc toujours, $6(\deg \mathcal{F}_{E/C} - 2) \geq \deg \mathcal{D}_{E/C}$ lorsque j est entier en tout point de C (soit en particulier quand f est isotriviale) et $s > 0$.

EXEMPLE. La surface E sur \mathcal{P}^1 donnée par les équations

$$y^2 = x^3 + t, \quad y^2 = x^3 + u^5, \quad u = \frac{1}{t},$$

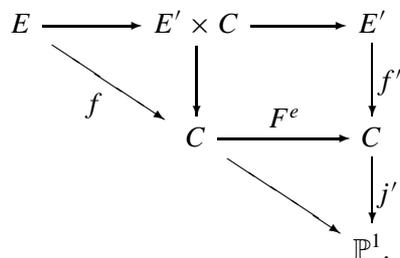
est telle que

$$6(\deg(\mathcal{F}_{E/\mathcal{P}^1}) - 2) = 12 = \deg(\mathcal{D}_{E/\mathcal{P}^1}),$$

l'inégalité est donc optimale dans ce cas.

6. Cas où f est image réciproque par le morphisme de Frobénius de C

Soit $f: E \rightarrow C$ comme en 0.2, on suppose maintenant que p est strictement positif et qu'il existe un entier e et une application $j': C \rightarrow \mathbb{P}^1$ tels que $j_E = j' \circ F^e$, où F est le Frobénius absolu de C . Il existe alors un pinceau elliptique $E' \rightarrow C$ tel que E soit le modèle régulier minimal de $E \times_{F^e} C$. Le diagramme suivant commute



6.1. f SEMI-STABLE

Dans le cas d'une fibre à réduction multiplicative, lorsque l'on passe de f' à f le conducteur reste inchangé, et la valuation du discriminant est multiplié par p^e . L'inégalité cherchée pour f , lorsque f est à réductions semi-stables, provient alors directement de celle pour f' . Cette dernière étant déjà prouvée car le morphisme de Kodaira–Spencer n'est alors plus nul.

6.2. RÉDUCTIONS ADDITIVES

Dans ces cas les conducteurs de f et f' sont identiques et le discriminant minimal de f est inférieur ou égal à p^e fois le discriminant minimal de f' , l'inégalité cherchée pour f provient alors de celle déjà prouvée pour f' .

On se convaincra du second point en considérant un modèle de Weierstrass local de la fibre générique de f' . Par changement de base, on obtient un modèle local de $E/k(C)$ dont la valuation du discriminant, obtenue par multiplication par p^e , est supérieure à celle du discriminant minimal.

Le premier point provient du fait qu'il existe par hypothèse une isogénie de degré une puissance de p de $E'/k(C)$ vers $E/k(C)$, isogénie qui induit donc un isomorphisme sur la l^n -torsion pour tout entier l premier à p et laisse donc invariant le conducteur d'après sa définition.

Nous remercions notre referee pour cet argument qui simplifie la preuve que nous proposons initialement. Nous présentons tout de même cette preuve en parallèle étant donné que – outre l'intérêt qu'elle peut présenter en soi – elle utilise des arguments qui nous seront utiles par la suite.

Pour prouver l'inégalité dans le cas où f admet des réductions de types additifs, on peut en effet également se ramener au cas multiplicatif en faisant une extension de la courbe de base, ramifiée au dessus des points dont la fibre spéciale associée est de type additif.

7. Inégalité déduite du cas semi-stable

Il est possible d'obtenir plus simplement un résultat similaire au théorème 0.1, mais moins bon (avec 12 à la place de 6 dans l'inégalité), en se ramenant au cas des surfaces elliptiques semi-stables. Pour cela, on fait une extension de la courbe de base pour faire apparaître des points de l -torsion ($l \neq p, 2, 3$) dans chaque fibre, de telle sorte que la surface obtenue ne puisse avoir que des bonnes réductions ou des réductions de types multiplicatifs. Cette méthode a l'avantage de donner un résultat dans le cas où la base est l'ordre d'un corps de nombre (cf. Sect. 8) et permet en outre de terminer la démonstration du cas géométrique (cf. Sect. 6.2) sans utiliser l'argument précédent.

7.1. VARIATION LOCALE

Nous allons maintenant étudier localement la variation relative du conducteur et du discriminant lors du passage à une extension sur laquelle la courbe a une réduction semi-stable.

LEMME 7.1. *Soient K un corps local pour une valuation v , E une courbe elliptique sur K et K' une extension de K , locale pour une valuation v' , telle que E/K' ait bonne réduction ou réduction multiplicative, alors*

$$v(\mathcal{D}_{E/K}) - \frac{v'(\mathcal{D}_{E/K'})}{e_{v'}} \leq 6(v(\mathcal{F}_{E/K}) - v'(\mathcal{F}_{E/K'})),$$

où $e_{v'}$ est le degré de ramification de l'extension.

On notera m_v le nombre de composante de la fibre spéciale du modèle régulier minimal de E sur $\text{Spec } R$, où R est l'anneau des entiers de K relativement à v , et p la caractéristique du corps résiduel.

- (A) Si $v(\mathcal{F}_{E/K}) = 0$ on a $0 = v'(\mathcal{F}_{E/K'}) = v(\mathcal{D}_{E/K}) = v'(\mathcal{D}_{E/K'})$.
- (B) Si $v(\mathcal{F}_{E/K}) = 1$ on a $v'(\mathcal{F}_{E/K'}) = 1$ et $v'(\mathcal{D}_{E/K}) = -v'(j) = -e_{v'}v(j) = e_{v'}v(\mathcal{D}_{E/K})$.

Ces résultats proviennent du fait que les bonnes réductions et les réductions multiplicatives sont semi-stables, i.e., ne changent pas de types par extension.

- (C) Si $v(\mathcal{F}_{E/K}) \geq 2$:
 - lorsque $v(j) \geq 0$ on a $v'(\mathcal{F}_{E/K'}) = 0$,
 - lorsque $v(j) < 0$ on a $v'(\mathcal{F}_{E/K'}) = 1$,
 et l'extension est obligatoirement ramifiée au-dessus de v .
 Il faut dès lors distinguer différents cas:
 - (C.1) Si E/K a une réduction en v de type II, III, IV, I_0 , IV^* , III^* ou II^* , alors $v(j) \geq 0$ et E/K' a bonne réduction au-dessus de v' d'où $v'(\mathcal{D}_{E/K'}) = v'(\mathcal{F}_{E/K'}) = 0$.
 De plus, d'après 1.1.3, $v(\mathcal{F}_{E/K}) = v(\mathcal{D}_{E/K}) + 1 - m_v$ avec $m_v = 1, 2, 3, 5, 7, 8$ ou 9 . Ainsi,

$$v(\mathcal{D}_{E/K}) - \frac{v'(\mathcal{D}_{E/K'})}{e_{v'}} = v(\mathcal{F}_{E/K}) + m_v - 1 \leq 5v(\mathcal{F}_{E/K}).$$

- (C.2) Si E/K a une réduction de type I_n^* , $n > 0$:
 - (C.2.a) Lorsque $p \neq 2$, $v(j) = -n$, $v(\mathcal{D}_{E/K}) = n + 6$ et $v(\mathcal{F}_{E/K}) = 2$, alors $v'(\mathcal{D}_{E/K'}) = -v'(j) = -e_{v'}v(j) = e_{v'}(v(\mathcal{D}_{E/K}) - 6)$ et $v'(\mathcal{F}_{E/K'}) = 1$, soit

$$v(\mathcal{D}_{E/K}) - \frac{v'(\mathcal{D}_{E/K'})}{e_{v'}} = 6(v(\mathcal{F}_{E/K}) - v'(\mathcal{D}_{E/K'})).$$

- (C.2.b) lorsque $p = 2$ on doit faire une étude un peu plus fine.

Soit

$$y^2 + a_1xy + a_3y + x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 = 0,$$

une équation de Weierstrass de E minimale pour v , lorsque la réduction est de type I_n^* , il existe (cf. Sect. 4.(c5m)) une équation de ce type avec $v(a_1) \geq 1$, $v(a_2) = 1$, et

$$v(a_3) = k + 1, \quad v(a_4) \geq k + 2, \quad v(a_6) \geq 2k + 2 \quad \text{si } n = 2k - 1,$$

$$v(a_3) \geq k + 2, \quad v(a_4) = k + 2, \quad v(a_6) \geq 2k + 3 \quad \text{si } n = 2k.$$

On définit

$$b_2 = a_1^2 + 4a_2, \quad b_4 = a_1a_3 + 2a_4, \quad b_6 = a_3^2 + 4a_6,$$

$$b_8 = a_4^2 - a_1a_3a_4 + a_1^2a_6 + a_2a_3^2 - 4a_2a_6.$$

Le discriminant minimal et l'invariant j_E de E sont alors donnés par

$$\mathcal{D}_{E/K} = b_2^2b_8 - 8b_4^3 - 27b_6^2 + 9b_2b_4b_6,$$

$$j_E = (b_2^2 - 24b_4)^3 / \mathcal{D}_{E/K}.$$

On a par parité,

$$v(b_2) = \inf(2v(a_1), 2v(2) + 1)$$

et

$$\begin{aligned} v(b_4) &\geq \inf(v(2) + k + 2, v(a_1) + k + 1) \\ &\geq \frac{v(b_2)}{2} + k + 1 \geq k + 2, \end{aligned}$$

soit $v(24b_4) > 2v(b_2)$ et $v(j) = 6v(b_2) - v(\mathcal{D}_{E/K})$.

Egalement,

$$v(b_6) = 2v(a_3),$$

$$v(b_8) = \begin{cases} v(a_2a_3^2) = 2k + 3 = n + 4 & \text{si } n \text{ impair,} \\ v(a_4^2) = 2k + 4 = n + 4 & \text{si } n \text{ pair.} \end{cases}$$

Or,

$$n + 4 = m_v - 1 = v(\mathcal{D}_{E/K}) - v(\mathcal{F}_{E/K}),$$

soit

$$v(\mathcal{D}_{E/K}) = v(\mathcal{F}_{E/K}) + v(b_8). \tag{1}$$

Alors,

$$\frac{v(8b_4^3)}{v(b_8)} \geq \frac{3k + 6}{2k + 4} \geq \frac{3}{2},$$

$$\frac{v(27b_6^2)}{v(b_8)} \geq \begin{cases} \frac{4k+4}{2k+3} \geq \frac{8}{5} & \text{si } n \text{ impair,} \\ \frac{4k+8}{2k+4} \geq 2 & \text{si } n \text{ pair,} \end{cases}$$

$$\frac{v(9b_2b_4b_6)}{v(b_8)} \geq \frac{3k+6}{2k+4} \geq \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad \frac{v(b_2^2b_8)}{b_8} = 2\frac{v(b_2)}{v(b_8)} + 1,$$

donc

(C.2.b.i) si $4v(b_2) \geq v(b_8)$ alors $v(\mathcal{D}_{E/K})/v(b_8) \geq 3/2$ Soit d'après (1)

$$v(\mathcal{F}_{E/K}) \geq \frac{1}{3}v(\mathcal{D}_{E/K}),$$

d'où

$$v(\mathcal{D}_{E/K}) - \frac{v'(\mathcal{D}_{E/K'})}{e_{v'}} \leq 6(v(\mathcal{F}_{E/K}) - v'(\mathcal{F}_{E/K'})),$$

car $v'(\mathcal{F}_{E/K'}) \leq 1$ et $v(\mathcal{F}_{E/K}) \geq 2$.

(C.2.b.ii) si $4v(b_2) < v(b_8)$ alors $v(\mathcal{D}_{E/K}) = v(b_2^2b_8)$, soit

$$v(j) = 6v(b_2) - v(\mathcal{D}_{E/K}) = 4v(b_2) - v(b_8) < 0.$$

Donc $v'(\mathcal{F}_{E/K'}) = 1$ et $v'(\mathcal{D}_{E/K'}) = 2v(b_2)$

$$v'(\mathcal{D}_{E/K'}) = -v'(j) = -e_{v'}v(j).$$

Ainsi

$$v(\mathcal{D}_{E/K}) - \frac{v'(\mathcal{D}_{E/K'})}{e_{v'}} = 6v(b_2) \leq 4(v(\mathcal{F}_{E/K}) - v'(\mathcal{F}_{E/K'})).$$

On a donc montré l'inégalité dans tous les cas.

7.2. VARIATION GLOBALE

Grothendieck a démontré [Ray65] que pour tout faisceau constructible A de \mathcal{F}_l -modules sur une courbe projective C on a

$$\chi(C, A) = \chi(C) \dim A_{\bar{\eta}} - \sum_{P \in C} (\dim A_{\bar{\eta}} - \dim A_P + \delta_P(C, A))$$

où χ est la caractéristique d'Euler-Poincaré (pour la cohomologie l -adique), $\chi(C) = 2 - 2g(C)$, $\dim = \dim_{\mathcal{F}_l}$, $A_{\bar{\eta}}$ est la fibre générique géométrique, $\delta_P(C, A) = \delta(K(\hat{C})_P, A)$ défini au Sect. 1 et A_P est la fibre spéciale de A en P .

Soit S un ensemble fini de points de C , s son cardinal et $U = C - S$, la suite exacte de cohomologie relative à un sous-espace fermé donne

$$\begin{aligned} \chi(U, A | U) &= \chi(C, A) + \sum_{P \in S} \sum_i (-1)^i \dim H^i_p(A) \\ &= \chi(C, A) + \sum_{P \in S} \dim A_P, \quad ([Mil80], \text{ p. 189}) \end{aligned}$$

et

$$\chi(U) = 2 - 2g - s.$$

Si S contient les points de C où A est ramifié (l'application canonique $A \rightarrow i_* A_{\bar{\eta}}$ est bijective en dehors de ces points), on obtient

$$\chi(U, A | U) = \chi(U) \dim A_{\bar{\eta}} - \sum_{P \in S} \delta_P(C, A). \tag{7.2.1}$$

On va maintenant appliquer ce résultat dû à Grothendieck au faisceau A_l des points de l -torsion obtenu à partir d'une surface elliptique $f: E \rightarrow C$.

Soient l un nombre premier différent de 2, 3 et p , $K' = K(C)(A_l)$ l'extension galoisienne de $K(C)$ obtenue en ajoutant les coordonnées des points de l -torsion, et C' la normalisée de C dans K' . On note $n = [K(C') : K(C)]$ et l'on considère $f': E' \rightarrow C'$ le modèle régulier minimal de la fibre générique de f relevée sur $K(C')$. Remarquons que le morphisme canonique $g: C' \rightarrow C$ ne se relève en un morphisme sur les modèles qu'en dehors de l'ensemble fini des points où il est ramifié. Les fibres ayant bonnes réductions possédant l^2 points de l -torsion, cet ensemble est contenu dans l'ensemble des points S de C au-dessus desquels E a mauvaise réduction. De plus

LEMME 7.2. $f': E' \rightarrow C'$ n'a que des fibres semi-stables.

En effet, pour tout point P de C' , soit $K_P = \widehat{K(C')}_P$ le complété de $K(C')$ suivant la valuation associée à P , les points de l -torsion de E'/K_P sont rationnels sur K_P . Or lorsque E' a une réduction de type additif en P , l'ordre de $E'(K'_P)_{\text{tors}}$ est de la forme $p^k m$ avec $m \leq 4$. Cela provient du fait que le nombre de composantes connexes géométriques de la fibre spéciale du modèle de Néron est inférieur à 4 dans le cas d'une réduction de type additif (Voir [FO90] 3, Prop. 3.). Or on a choisit l de telle sorte qu'il ne divise pas $p^k m$.

Remarquons également (cf. [Ray65]) que, g étant fini, g_* est exact, soit

$$\chi(U', A'_l | U') = \chi(U, g_* A'_l | U),$$

où $U' = g^{-1}(U)$.

Par notre choix de S , g n'est pas ramifié au-dessus des points de U , et $A_{l,P}$ (resp. $A'_{l,P}$) est formé par l^2 points pour tout P appartenant à U (resp. $g^{-1}(U)$), on obtient donc $\chi(U, g_* A'_l | U) = n \chi(U, A_l | U)$.

La formule (7.2.1) appliquée sur C et sur C' , donne alors

$$2(2g' - 2 + s') = n \left(2(2g - 2 + s) + \sum_{P \in S} \delta_P(C, A_I) \right) \tag{7.2.2}$$

où g' est le genre de C' et s' le nombre de fibres singulières de f' .

Evaluons maintenant

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= n(6p^e((2g - 2) + \deg \mathcal{F}_{E/C}) - \deg \mathcal{D}_{E/C}) - \\ &\quad - (6p^e((2g' - 2) + \deg \mathcal{F}_{E'/C'}) - \deg \mathcal{D}_{E'/C'}) \\ &= 6p^e \left(n \left(2g - 2 + \sum_{P \in S} (\varepsilon_P + \delta_P) \right) - (2g' - 2 + s') \right) + \\ &\quad + \sum_{P \in C} \sum_{\substack{P \in C \\ P' \rightarrow P}} v_{P'}(\mathcal{D}_{E'/C'}) - e_P v_P(\mathcal{D}_{E/C}) \\ &= \sum_{P \in S_1} \sum_{\substack{P \in S'_1 \\ P' \rightarrow P}} 3p^e e_P v_P(\mathcal{F}_{E/C}) + v_{P'}(\mathcal{D}_{E'/C'}) - e_P v_P(\mathcal{D}_{E/C}), \end{aligned}$$

où S_1 est l'ensembles des places où f est à réduction additive. Cela provient de l'égalité précédente en remarquant que les termes correspondants aux réductions multiplicatives disparaissent. \mathcal{A} est ainsi une somme de termes positifs quand $3p^e \geq 6$ d'après le Lemme 7.1.

Lorsque $e > 0$, de l'inégalité montrée en 5.1 dans les cas où f est à réductions semi-stables, et de la positivité de \mathcal{A} on déduit l'inégalité dans le cas où f est à réductions quelconques.

8. Courbes elliptiques sur les corps de nombres

En 1982, le second auteur [Szp90a] a fait la conjecture suivante

CONJECTURE 8.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout corps de nombres K , il existe une constante $B_{K,\varepsilon}$ telle que pour toute courbe elliptique E sur K on ait:*

$$\log N_{K/\mathbb{Q}} \mathcal{D}_{E/K} \leq (6 + \varepsilon) \log N_{K/\mathbb{Q}} \mathcal{F}_{E/K} + B_{K,\varepsilon}.$$

Notons que nous avons démontré cette conjecture au Sect. 5 dans le cas où la courbe E a potentiellement bonne réduction (avec 5 à la place de $6 + \varepsilon$). On sait de plus [Mas90] qu'on ne peut espérer une telle relation dans le cas général avec un exposant plus petit que $6 + \varepsilon$.

On peut, à l'aide de la Proposition 7.1, tenter de réduire le cas général au cas semi-stable. On considère l'extension $K' = K(E[l])$ avec l premier $\neq 2$ et 3 et tel

que E/\mathcal{Q} n'aie pas de fibre ayant mauvaise réduction au-dessus de l (le nombre de ces fibres est fini...). Le modèle régulier minimal de E/K' n'a alors que des réductions semi-stables suivant un argument identique à celui du Lemme 7.2.

On note M_K l'ensemble des places finies de K , si v' est une place finie de K' au-dessus de $v \in M_K$ (on écrira alors $v'|v$) on note e_v le degré de ramification correspondant (qui ne dépend pas du choix de v' car l'extension K'/K est galoisienne). On a alors

$$\log N_{K'/\mathcal{Q}}\mathcal{D}_{E/K'} = \sum_{v' \in M_{K'}} n_{v'} v'(\mathcal{D}_{E/K'}) = \sum_{v \in M_K} \sum_{\substack{v'|v \\ v' \in M_{K'}}} n_{v'} v'(\mathcal{D}_{E/K'})$$

et

$$\sum_{\substack{v'|v \\ v' \in M_{K'}}} n_{v'} e_v = [K' : K] n_v \quad \text{avec } n_v = \log N_{K/\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_v).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & [K : K'] \log N_{K/\mathcal{Q}}\mathcal{D}_{E/K} - \log N_{K'/\mathcal{Q}}\mathcal{D}_{E/K'} \\ &= \sum_{v \in M_K} \sum_{\substack{v'|v \\ v' \in M_{K'}}} n_{v'} (e_v v(\mathcal{D}_{E/K}) - v'(\mathcal{D}_{E/K'})) \\ &\leq \sum_{v \in M_K} \left(\sum_{\substack{v'|v \\ v' \in M_{K'}}} e_v n_{v'} 6(v(\mathcal{F}_{E/K}) - v'(\mathcal{F}_{E/K'})) \right) \\ &\leq C([K : K'] \log N_{K/\mathcal{Q}}\mathcal{F}_{E/K} - \log N_{K'/\mathcal{Q}}\mathcal{F}_{E/K'}), \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

pour toute constante $C \geq 6$.

Donc, quelque soit $C > 6$, s'il existe une constante $B_{K'}$ telle que pour toute courbe elliptique E sur K' à réduction semi-stables on ait

$$\log N_{K'/\mathcal{Q}}\mathcal{D}_{E/K'} \leq C \log N_{K'/\mathcal{Q}}\mathcal{F}_{E/K'} + B_{K'},$$

alors

$$\log N_{K/\mathcal{Q}}\mathcal{D}_{E/K} \leq C \log N_{K/\mathcal{Q}}\mathcal{F}_{E/K} + \frac{B_{K'}}{[K' : K]}.$$

Se pose alors le problème de majorer $\frac{B_{K'}}{[K' : K]}$ indépendamment de K' (qui dépend de E). La Conjecture 8.1 a été énoncée comme analogue au Théorème 0.1 dans le cas des corps de nombres, B_K joue ici un rôle similaire à celui du $2g - 2$

pour les courbes projectives. Il est ainsi naturel de supposer qu'il est linéaire en le logarithme du discriminant $\delta_{K/\mathcal{O}}$ de K . Or

$$\delta_{K'/\mathcal{O}} = (\delta_{K/\mathcal{O}})^{[K':K]} \cdot N_{K/\mathcal{O}}(\mathcal{D}_{K'/K}), \tag{8.1.2}$$

où $\mathcal{D}_{K'/K}$ est la différentielle de l'extension, et suivant un raisonnement semblable à celui de la section précédente, on majore la norme de la différentielle de l'extension à l'aide du conducteur.

En effet, l'extension étant galoisienne on a d'après [Ser68]

$$\log N_{K/\mathcal{O}}(\mathcal{D}_{K'/K}) = \sum_{v \in M_K} \frac{n_v [K' : K]}{e_v} \sum_{i=0}^{\infty} (g_{i,v} - 1),$$

où $g_{i,v}$ est le cardinal du i -ème groupe de ramification de l'extension de corps locaux K'_v/K_v avec $v'|v$.

Soit $\alpha_{i,v} = \dim_{\mathcal{F}_l}(E[l]_K/E[l]_K^{G_i(K'_v/K_v)})$, lorsque $g_{i,v} > 1$ on a $\alpha_{i,v} \geq 1$, sinon il existerait une sous-extension de K'/K au-dessus de laquelle E aurait l^2 points de l -torsion, ce qui est exclu par construction de K' .

On a donc

$$\begin{aligned} & \log N_{K/\mathcal{O}}(\mathcal{D}_{K'/K}) \\ & \leq [K' : K] \sum_{v \in M_K} n_v \left(\frac{e_v - 1}{e_v} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{g_{i,v}}{g_{0,v}} \alpha_{i,v} \right) \\ & \leq [K' : K] \sum_{v \in M_K} n_v \left(\frac{e_v - 1}{e_v} + \delta(K_v, E[l]) \right) \\ & \leq [K' : K] \log N_{K/\mathcal{O}} \mathcal{F}_{E/K} - \log N_{K'/\mathcal{O}} \mathcal{F}_{E/K'}, \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

Le passage à la dernière inégalité se vérifie en distinguant les places de K correspondant aux fibres de types multiplicatifs et celles correspondant aux fibres de types additifs.

Dans le cas d'une pinceau elliptique sur une courbe projective, ce type d'inégalité est une conséquence directe de l'égalité (7.2.2), il serait intéressant de savoir si la transposition de cette dernière dans le cadre arithmétique est également valable.

On peut maintenant démontrer le résultat annoncé en introduction

PROPOSITION 8.2. *Avec les notations précédemment adoptées, s'il existe des constantes C, D telles que pour tout corps de nombre L et toute courbe elliptique E/L à réductions semi-stables on ait*

$$\log N_{L/\mathcal{O}} \mathcal{D}_{E/L} \leq C \log N_{L/\mathcal{O}} \mathcal{F}_{E/L} + D \log N_{L/\mathcal{O}} \delta_{L/\mathcal{O}} \tag{8.1.4}$$

alors pour tout corps de nombre K et toute courbe elliptique E/K (plus forcément semi-stable)

$$\log N_{K/\mathcal{O}} \mathcal{D}_{E/K} \leq (C + D) \log N_{K/\mathcal{O}} \mathcal{F}_{E/K} + D \log N_{K/\mathcal{O}} \delta_{K/\mathcal{O}}.$$

Soit E/K une courbe elliptique, on considère l'extension $K' = K(E[l])$ évoquée plus haut. En combinant les inégalités (8.1.1), (8.1.3), (8.1.4) et la relation (8.1.2) on obtient le résultat escompté.

Références

- [FO90] Flexor, M. and Oesterlé J.: Sur les points de torsion des courbes elliptiques, *Astérisque* **183** (1990), 25–36.
- [Har77] Hartshorne, R.: *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
- [HS88] Hindry, M. and Silvermann, J. H.: The canonical height and integral point on elliptic curves, *Invent. Math.* **93** (1988), 419–450.
- [LS98] Liu, Q. and Saito, T.: Inequality for conductor and differentials of a curve over a local field, Prépublication de l'Université Bordeaux **1** (1998), 84.
- [Mas90] Masser, D. W.: Note on a conjecture of Szpiro, *Astérisque* **183** (1990), 19–23.
- [Mil80] Milne, J.: *Étale Cohomology*, Princeton Univ. Press, New Jersey, 1980.
- [Nér64] Néron, A.: Modèles minimaux des variétés abéliennes sur les corps locaux et globaux, *Publ. I.H.E.S.* **21** (1964), 5–128.
- [Ogg67] Ogg, A. P.: Elliptic function with wild ramification, *Amer. J. Math.* **89** (1967), 1–21.
- [Pes98] Pesenti, J.: Thèse de doctorat, Université d'Orsay (1998).
- [Ray65] Raynaud, M.: Caractéristique d'Euler–Poincaré d'un faisceau et cohomologie des variétés abéliennes, *Séminaire Bourbaki* (1965), p. 286.
- [Sai88] Saito, T.: Conductor, discriminant and Noether formula of arithmetic surfaces, *Duke Math. J.* **57**(1) (1988), 151–173.
- [Ser68] Serre, J.-P.: *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1968.
- [Sil86a] Silvermann, J. H.: *Advanced Topics about Elliptic Curves*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Sil86b] Silvermann, J. H.: *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Szp81] Szpiro L.: Séminaire sur les pinceaux de courbes de genre au moins deux, *Astérisque* **86** (1981).
- [Szp90a] Szpiro L.: Discriminant et conducteur, *Astérisque* **183** (1990), 7–18.
- [Szp90b] Szouri L.: Séminaire sur les pinceaux de courbes elliptiques, *Astérisque* **183** (1990).
- [Tat75] Tate, J.: Algorithm for determining the type of a singular fiber in an elliptic pencil, In: *Modular Functions in One Variable IV*, Lectures Notes in Maths. 476, Springer-Verlag, 1975, pp. 33–52.
- [Vol91] Voloch, F.: On the conjectures of Mordell and Lang in positive characteristic, *Invent. Math.* **104** (1991), 643–646.