SUR LA STRUCTURE D'UNE CLASSE D'ANNEAUX

Gabriel Thierrin

(reçu le 13 août, 1959)

L'objet de ce travail est de déterminer la structure d'une classe d'anneaux, celle des anneaux bipotents à droite.

1. Anneaux bipotents à droite. Un anneau A est dit bipotent à droite, si l'on a

$$aA = a^2A ,$$

pour tout $a \in A$. On voit facilement qu'un anneau A est bipotent à droite, si et seulement si pour tout couple $a, b \in A$, il existe $x \in A$ tel que l'on ait $ab = a^2x$.

Voici quelques exemples d'anneaux bipotents à droite:

1. Les corps [1)] et les sommes directes de corps.

2. Les anneaux A tels que pour chaque $a \in A$, on a soit $aA = 0$, soit $aA = A$. En particulier, tout anneau de carré nul et tout idéal à droite minimal d'un anneau quelconque sont des anneaux bipotents à droite.

3. Les anneaux A tels que pour tout $a \in A$, il existe $x \in A$ vérifiant l'égalité $a^2x = a$.

Nous allons définir maintenant une classe particulière d'anneaux bipotents à droite, qui joue un rôle fondamental dans la détermination de la structure des anneaux bipotents à droite. Soient K un corps quelconque et (K, K) l'ensemble des couples (a, b) d'éléments de K. Nous définissons dans (K, K) une addition et une multiplication de la manière suivante:

Ce travail a été effectué au Summer Research Institute of the Canadian Mathematical Congress, Kingston.

1) Nous appelons corps tout anneau tel que l'ensemble des éléments non nuls forme un groupe pour la multiplication.

Can. Math. Bull. vol. 3, no. 1, Jan. 1960

https://doi.org/10.4153/CMB-1960-003-6 Published online by Cambridge University Press

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac, ad)$$

On vérifie facilement que, vis-à-vis de ces deux opérations, l'ensemble (K, K) est un anneau bipotent à droite, que nous appellerons le _pseudo-carré à droite_ du corps K. Tout anneau isomorphe au pseudo-carré à droite d'un corps sera dit un _pseudo-corps à droite_.

Remarquons que si A est un anneau bipotent à droite, on a $a^n A = aA$ pour tout $a \in A$ et tout entier positif n.

PROPOSITION 1. Pour qu'un anneau A soit bipotent à droite, il faut et il suffit que pour tout idéal à droite D de A, la relation $a^n \in D$, n entier positif, entraîne $aA \subseteq D$.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante; en effet si a est un élément quelconque de A, on a $a^3 \in a^2 A$, donc $aA \subseteq a^2 A$ et $aA = a^2 A$.

PROPOSITION 2. L'ensemble N des éléments nilpotents d'un anneau A bipotent à droite est un idéal et l'on a $NA = 0$.

Soit $a \in N$. Il existe un entier positif n tel que $a^n = 0$. D'où $a^n A = aA = 0$. Par conséquent, N est l'annulateur à gauche de A, donc un idéal.

PROPOSITION 3. Pour tout élément a non nilpotent d'un anneau A bipotent à droite, il existe $x \in A$ tel que $a^2 x$ soit un élément idempotent différent de zéro.

L'égalité $a^4 A = aA$ entraîne l'existence d'un élément x tel que $a^4 x = a^2$. On vérifie facilement que l'élément $a^2 x a^2 - a^2$ est nilpotent. D'où, d'après la proposition 2, $a^2 x a^2 x - a^2 x = 0$. Par conséquent, l'élément $a^2 x$ est idempotent, avec $a^2 x \neq 0$.

PROPOSITION 4. Tout anneau bipotent à droite A est un I-anneau et son radical (dans le sens de N. Jacobson [1]) est formé de l'ensemble de ses éléments nilpotents.

D'après [1] , un anneau est un I-anneau si et seulement si tout idéal à droite contenant des éléments non nilpotents contient un élément idempotent différent de zéro. Un anneau bipotent à droite est un I-anneau d'après la proposition 3.

https://doi.org/10.4153/CMB-1960-003-6 Published online by Cambridge University Press

D'après [1], le radical d'un anneau contient tous les nil-idéaux à droite de cet anneau et, d'autre part, le radical d'un I-anneau est un nilidéal. La seconde partie de la proposition découle alors de la proposition 2.

THEOREME 1. Pour qu'un anneau A soit un corps, il faut et il suffit qu'il soit primitif et bipotent à droite.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est suffisante. L'anneau A étant primitif, son radical se réduit à zéro. Par conséquent, d'après la proposition 4, A ne contient pas d'éléments nilpotents différents de zéro. D'autre part, (0) est un idéal premier. Soient $ab = 0$ et x un élément quelconque de A. De $ab = 0$ suit $(bxa)^2 = 0$, donc $bxa = 0$. Par conséquent, $bAa = 0$, ce qui entraîne, puisque (0) est premier, $a = 0$ ou $b = 0$. L'anneau A est donc un anneau sans véritables diviseurs de zéro. Soit a un élément quelconque non nul de A. D'après la proposition 3, il existe x tel que $a^2x = e$ soit un élément idempotent différent de zéro. Comme A est sans diviseurs de zéro, e est élément unité de A. Il s'ensuit alors immédiatement que A est un corps.

COROLLAIRE. Si R est le radical d'un anneau bipotent à droite A et si R est distinct de A, l'anneau-quotient A/R est isomorphe à une somme sous-directe de corps.

En effet, A/R est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux primitifs, qui sont des corps, car tout anneau homomorphe à un anneau bipotent à droite est évidemment bipotent à droite.

PROPOSITION 5. Soit e un élément idempotent non nul d'un anneau bipotent à droite A. On a les propriétés suivantes:

1. Si a et b sont des éléments quelconques de A, l'élément $ea - ae$ est nilpotent et l'on a $eae = ae$ et $eab = aeb$.

2. Les idéaux à droite eA et $(1 - e)A$ sont bilatères. 2)

1. De $(eae - ae)^2 = 0$ suit, d'après la proposition 2, $eae - ae = (eae - ae)e = 0$. De là, on vérifie facilement que $(ea - ae)^2 = 0$. L'élément $ea - ae$ étant nilpotent, on a alors $(ea - ae)b = eab - aeb = 0$.

2) D'après [1], on désigne par $(1 - e)A$ l'ensemble $\{a - ea | a \in A\}$, même si A ne possède pas d'élément unité.

2. L'idéal à droite eA est bilatère, car si $ea \in eA$, on a $xea = exa \in eA$. Il en est de même pour l'idéal à droite $(1 - e)A$; en effet, $x(a - ea) = xa - xea = xa - exa$.

2. Structure des anneaux bipotents à droite.

THEOREME 2. Tout anneau A, bipotent à droite et sous-directement irréductible, est soit un anneau de carré nul, soit un corps, soit un pseudo-corps à droite.

Montrons d'abord que pour chaque $a \in A$, on a soit $aA = 0$, soit $aA = A$. En effet, supposons que $aA \neq 0$. Dans ce cas, la proposition 2 montre que l'élément a n'est pas nilpotent. D'après la proposition 3, il existe par conséquent un élément x tel que $a^2x = e$ soit un élément idempotent différent de zéro. Cet élément e est élément unité à gauche de A. En effet, d'après la proposition 5, eA et $(1 - e)A$ sont des idéaux bilatères et l'on a $eA \cap (1 - e)A = 0$. L'anneau A étant sous-directement irréductible et l'idéal eA étant différent de zéro, on doit avoir $(1 - e)A = 0$, c'est-à-dire $x = ex$ pour tout $x \in A$. De $A = eA = a^2xA \subseteq aA$ suit $A = aA$.

Supposons maintenant que l'anneau A ne soit pas de carré nul. De ce qui précède, on déduit l'existence dans A d'un élément unité à gauche e. Posons $K = Ae$. On a $K \neq 0$ et e est élément unité de K. Soit $k \in K$, $k \neq 0$. De $kA \neq 0$ suit $kA = A$ et donc $kK = kAe = Ae = K$; par conséquent, K est un corps.

Posons $T = \{x-xe \mid x \in A\}$. On a $A = K + T$ (somme directe pour l'addition). D'autre part, $TA = 0$; en effet,

$$(x - xe)a = xa - xea = xa - xa = 0.$$

Si $T = 0$, on a $A = K$ et A est un corps.

Supposons $T \neq 0$. Soit t un élément <u>fixé</u> de T, $t \neq 0$. On voit facilement que l'ensemble Kt est un idéal non nul de A et que $Kt \subseteq T$. Montrons que $Kt = T$. En effet, soit $v \in T$, $v \neq 0$. L'ensemble Kv étant un idéal non nul de A, on a, puisque A est sous-directement irréductible, $Kt \cap Kv \neq 0$. Par conséquent, il existe k, $h \in K$ tels que $kt = hv \neq 0$. D'où, puisque K est un corps, $h^{-1}kt = ev = v$, c'est-à dire $v \in Kt$. De ce qui précède, il résulte que si t est un élément <u>fixé</u> non nul de T, tout élément v de T est de la forme $v = kt$, avec $k \in K$. Cette décomposition est d'autre part unique. En effet, si $v = kt = ht$, on a $(k - h)t = 0$. Si $k - h \neq 0$, il existe $p \in K$ tel que $p(k - h) = e$. D'où $et = t = 0$, ce qui est contradictoire. Comme $A = K + T$, tout

https://doi.org/10.4153/CMB-1960-003-6 Published online by Cambridge University Press

élément $a \in A$ est d'une manière unique de la forme $a = k + ht$, avec $k, h \in K$. Soit (K, K) le pseudo-carré à droite du corps K. A tout $a \in A$ faisons correspondre l'élément $(k, h) \in (K, K)$. Cette application est évidemment une application biunivoque de A sur (K, K). Montrons que c'est un isomorphisme d'anneau. Soit $b = k' + h't$, avec $k', h' \in K$.

On a:

1. $$a + b = k + k' + (h + h')t$$

$$\longrightarrow (k + k', h + h') = (k, h) + (k', h').$$

2. $$ab = (k + ht)(k' + h't)$$

$$= kk' + htk' + kh't + hth't = kk' + kh't$$

$$\longrightarrow (kk', kh') = (k, h)(k', h').$$

L'anneau A est donc un pseudo-corps à droite.

THEOREME 3. Tout anneau A bipotent à droite est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux appartenant à l'une des catégories suivantes: anneaux de carré nul, corps, pseudo-corps à droite.

En effet, tout anneau A est isomorphe à une somme sous-directe d'anneaux sous-directement irréductible A_i. Les anneaux A_i, étant homomorphes à l'anneau A qui est bipotent à droite, sont également bipotents à droite. Le présent théorème découle alors du théorème 2.

3. <u>Noyau bipotent à droite d'un anneau</u>. Un complexe (partie non vide) H d'un anneau quelconque A est dit <u>bipotent à droite</u>, si l'on a $aH = a^2H$ pour tout $a \in A$. On voit facilement qu'un complexe H est bipotent à droite, si et seulement si pour tout $a \in A$ et tout $h \in H$, il existe $h_1, h_2 \in H$ tels que

$$ah = a^2h_1 \ , \quad ah_2 = a^2h.$$

L'élément zéro est évidemment un complexe bipotent à droite.

PROPOSITION 6. Tout idéal bilatère M d'un anneau A, qui est un idéal à droite minimal de A, est un complexe bipotent à droite.

Cela découle du fait que l'on a alors $aM = 0$ ou $aM = M$, pour tout $a \in A$.

PROPOSITION 7. Si H et K sont des complexes bipotents à droite d'un anneau A, les complexes HA, $H^* = \{-h | h \in H\}$ et $H + K = \{h + k | h \in H, k \in K\}$ sont des complexes bipotents à droite.

Le complexe HA est bipotent à droite, car l'égalité $aH = a^2H$ entraîne $aHA = a^2HA$.

Le complexe H^* est bipotent à droite, car si $a \in A$, $h \in H$, il existe $h_1, h_2 \in H$ tels que $ah = a^2h_1$, $ah_2 = a^2h$; d'où

$$a(-h) = a^2(h_1),\ a(-h_2) = a^2(-h).$$

Montrons enfin que H + K est bipotent à droite. Si $h \in H$, $k \in K$, il existe $h_1, h_2 \in H$ et $k_1, k_2 \in K$ tels que

$$ah = a^2h_1,\ ah_2 = a^2h,\ ak = a^2k_1,\ ak_2 = a^2k.$$

D'où

$$a(h + k) = a^2(h_1 + k_1),\ a(h_2 + k_2) = a^2(h + k).$$

La réunion B de tous les complexes bipotents à droite d'un anneau A est appelée le <u>noyau</u> <u>bipotent</u> <u>à</u> <u>droite</u> de A.

THEOREME 4. Le noyau bipotent à droite B d'un anneau quelconque A, est un complexe bipotent à droite, un idéal à droite et un anneau bipotent à droite.

Soient $a \in A$, $b \in B$. Il existe un complexe bipotent à droite H, contenant l'élément b. Par conséquent, il existe $h_1, h_2 \in H \subseteq B$ tels que $ab = a^2h_1$, $ah_2 = a^2b$, ce qui montre que B est un complexe bipotent à droite.

Soient $x, y \in B$. De la proposition 7 et du fait que B est un complexe bipotent à droite contenant tous les complexes bipotents à droite de A, on déduit que $-y \in B$ et $x - y \in B$, ce qui montre que B est un sous-groupe additif. Le complexe BA étant bipotent à droite d'après la proposition 7, on a donc $BA \subseteq B$. Par conséquent, B est un idéal à droite.

Il est immédiat que B est un anneau bipotent à droite.

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications 37(1956).

Université de Montréal

https://doi.org/10.4153/CMB-1960-003-6 Published online by Cambridge University Press