Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society (1984), 27, 327–331 ©

SUR L'IMAGE D'UNE FONCTION ENTIERE DE DEUX VARIABLES COMPLEXES

par D. COUTY

(Reçu le 15 Mars 1984)

Soit Θ un automorphisme analytique de $\mathbb{C}^2$, Θ ayant un point fixe attractif z_0 (c'est-à-dire il existe un voisinage V de z_0 tel que pour tout élément z de V, on ait $\lim_{n\to+\infty}\Theta^n(z)=z_0$). Alors d'après un résultat bien connu, il existe une fonction F entière de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, injective, telle que $F(\mathbb{C}^2)=\{z\in\mathbb{C}^2, \lim_{n\to+\infty}\Theta^n(z)=z_0\}$. Ceci provient du fait qu'il existe une fonction F, définie au voisinage de z_0, telle que $F'(z_0)=I$, vérifiant l'équation fonctionnelle $\Theta\circ F=F\circ B$ où B est un automorphisme analytique de $\mathbb{C}^2$ vérifiant $\lim_{n\to+\infty}B^n(z)=0$ pour tout z élément de $\mathbb{C}^2$. F se prolonge en une fonction entière qui est injective sur $\mathbb{C}^2$ car Θ est un automorphisme de $\mathbb{C}^2$ et F a un jacobien constant et égal à 1 si le jacobien de Θ est constant (voir Kodaira [6], Lattès [7]).

Dans un article récent, [8], Nishimura a construit une fonction F du type ci-dessus dont l'image évite un voisinage de la droite complexe Δ d'équation $y=0$. L'objet de cette note est d'expliciter le type de voisinage U de Δ qu'une telle fonction peut éviter. On en déduit une fonction G telle que $G(\mathbb{C}^2)$ évite un ensemble $\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2:|x|<|y|$ et $|y|>2\}$ retrouvant ainsi un résultat de Sadullaev [9].

Je remercie B. Chevreau, J. Esterle et les membres du groupe de travail d'analyse de l'Université de Bordeaux pour les encouragements qu'ils m'ont prodigués pendant la rédaction de cette note.

Théorème. *Il existe une fonction F entière de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, injective, de Jacobien constant et égal à 1 telle que*

$$F(\mathbb{C}^2)\cap U=\emptyset \quad \textit{avec} \quad U=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2:|xy|<1 \text{ et } |y|<\tfrac{1}{2}\}.$$

Démonstration. Soit Θ l'automorphisme défini par $\Theta=\Theta_2\circ\Theta_1$ avec

$$\Theta_1:(x,y)\to\left(xe^{f(xy)},\frac{1}{e}ye^{-f(xy)}\right)$$

$$\Theta_2:(x,y)\to(x+g(y),y)$$

son inverse Θ^{-1} est donné par $\Theta^{-1}=\Theta_1^{-1}\circ\Theta_2^{-1}$ avec

$$\Theta_1^{-1}:(u,v)\to(ue^{-f(uve)},eve^{f(uve)})$$

$$\Theta_2^{-1}:(u,v)\to(u-g(v),v)$$

où f et g sont deux fonctions entières d'une variable telles que

$$f(0)=0 \quad f(1)=-1 \quad f'(1)=-1 \quad |f(u)|<1 \text{ si } |u|<1$$

$$g(0)=0 \quad g(1)=1-\frac{1}{e} \quad g'(1)=-2 \quad |g(u)|<1 \text{ si } |u|<\frac{1}{2}$$

(il suffit de prendre par exemple $f(u)=-u$ et

$$g(u)=\left(2-\frac{4}{3e}\right)u+\left(-1+\frac{1}{3e}\right)u^4$$

$\Theta_1'(x,y)$ est définie par la matrice

$$\begin{bmatrix} e^{f(xy)}+xyf'(xy)e^{f(xy)} & x^2f'(xy)e^{f(xy)} \\ -\frac{1}{e}y^2f'(xy)e^{-f(xy)} & \frac{1}{e}e^{-f(xy)}-\frac{1}{e}xyf'(xy)e^{-f(xy)} \end{bmatrix}$$

$\Theta_2'(x,y)$ est définie par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & g'(y) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc $\operatorname{Jac}\Theta_1=1/e$ et $\operatorname{Jac}\Theta_2=1$ d'où $\operatorname{Jac}\Theta=1/e$; en calculant $\Theta[(x,0)]$ et $\Theta[(1,1)]$ on constate que Δ est une droite de points fixes et que $(1,1)$ est un point fixe. Vérifions que $(1,1)$ est un point fixe attractif; $\Theta_1'(1,1)$ et $\Theta_2'(1/e,1)$ sont respectivement définies par les matrices

$$M_1=\begin{bmatrix} 0 & -1/e \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad M_2=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donc $\Theta'(1,1)$ est définie par la matrice

$$M=\begin{bmatrix} -2 & -1/e-4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

comme $\operatorname{Trace} M=0$ et $\operatorname{Det} M=1/e$ les valeurs propres de M sont $i/\sqrt{e}$ et $-i/\sqrt{e}$ donc de module inférieur à 1; donc $(1,1)$ est un point fixe attractif. Soit

$$\Theta:(x,y)\to(u,v)=\left(xe^{f(xy)}+g\left(\frac{1}{e}ye^{-f(xy)}\right),\frac{1}{e}ye^{-f(xy)}\right)$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500022471 Published online by Cambridge University Press

on a

$$d((x,y),\Delta)=|y|;\quad d(\Theta(x,y),\Delta)=|v|;\quad uv=\frac{1}{e}xy+vg(v).$$

Posons $U_\mu=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2:|xy|<\mu$ et $|y|<\mu/2\}$ pour $\mu\in[0,1[$ et $\alpha=(1/e)\exp(\sup_{|u|<\mu}|f(u)|)$ ($\alpha<1$ car $|f(u)|<1$ si $|u|<1$). Pour tout (x,y) élément de U_μ on a:

$$|v|=\left|\frac{1}{e}e^{-f(xy)}\right||y|$$

donc

$$\underline{|v|\leqq\alpha|y|}$$

en particulier $\underline{|v|<(\mu/2)}$ donc $|vg(v)|<(\mu/2)$(car $|g(u)|<1$ si $|u|<(1/2)$) on en déduit

$$|uv|\leqq\left|\frac{1}{e}xy\right|+|vg(v)|<\frac{\mu}{e}+\frac{\mu}{2}$$

d'où

$$\underline{|uv|<\mu.}$$

Donc U_μ est stable par Θ et $\lim_{n\to+\infty}d(\Theta^n(x,y),\Delta)=0$ pour tout (x,y) élément de U_μ or $U=\bigcup_{0<\mu<1}U_\mu$, donc $\lim_{n\to+\infty}d(\Theta^n(x,y),\Delta)=0$ pour tout (x,y) élément de U.

D'autre part, d'après un résultat rappelé dans l'introduction, on sait qu'il existe F entiére, injective et de Jacobien constant et égal à 1 (car $\operatorname{Jac}\Theta=1/e$) telle que

$$F(\mathbb{C}^2)=\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2:\lim_{n\to+\infty}\Theta^n(x,y)=(1,1)\right\}$$

donc $F(\mathbb{C}^2)\cap U=\varnothing$.

Corollaire 1. *Pour tout n, il existe une fonction F_n entière de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, injective, de jacobien constant et égal à* 1 *telle que*

$$F_n(\mathbb{C}^2)\cap U_n=\varnothing\quad avec\quad U_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{C}^2:|xy|<n^2\,\text{et}\,|y|<\frac{n}{2}\right\}.$$

Demonstration. Posons

$$F_n(x,y)=nF\left(\frac{x}{n},\frac{y}{n}\right)$$

alors

$$\operatorname{Jac}F_n=\operatorname{Jac}F=1$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500022471 Published online by Cambridge University Press

et

$$F_n(\mathbb{C}^2)=nF(\mathbb{C}^2)$$

donc

$$F_n(\mathbb{C}^2)\cap U_n=nF(\mathbb{C}^2)\cap nU$$
$$=\emptyset.$$

Corollaire 2. *Il existe une fonction G entière de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, injective telle que $G(\mathbb{C}^2)\cap\Omega=\emptyset$ avec*

$$\Omega=\{(x,y)\in\mathbb{C}^2:|x|<|y|\,\mathrm{et}\,|y|>2\}.$$

Demonstration. Soit H définie sur $\mathbb{C}^2\backslash\Delta$ par $H:(u,v)\to(u,1/v)$. Posons $G=H\circ F$ et $\Omega=H(U')$ où $U'=U\backslash\Delta$. Comme $F(\mathbb{C}^2)$ évite Δ, G est entière de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$; G est injective car H et F sont injectives et

$$G(\mathbb{C}^2)\cap\Omega=H\circ F(\mathbb{C}^2)\cap H(U')=\emptyset\,\mathrm{car}\,F(\mathbb{C}^2)\cap U'=\emptyset.$$

D'autre part, la valeur propre de Θ dans la direction transversale à Δ est $1/e$ en tout point de Δ. Il résulte alors du théorème 1 de Nishimura qu'il existe une fonction entiére de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$ injective telle que

$$S(\mathbb{C}^2)=\left\{z\in\mathbb{C}^2:\lim_{n\to+\infty}d(\Theta^n(z),\Delta)=0\right\}.$$

On a donc $U\subset S(\mathbb{C}^2)$. On peut de même trouver pour tout n une fonction entière de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}^2$, injective, d'image non dense et contenant U_n.

Les propriétés des images des fonctions entières de $\mathbb{C}^p$ dans lui-même, injectives, d'image non dense, restent trés mal connues. Un résultat récent (P.G. Dixon et J. Esterle) montre que s'il existait un entier p (p nécessairement supérieur ou égal à 2) et une suite (F_n) de fonctions entières de $\mathbb{C}^p$ dans lui-même telles que $\bigcap_n F_1\circ\cdots\circ F_n(\mathbb{C}^p)=\emptyset$ alors tous les caractères des algèbres de Fréchet seraient continus. Voir à ce sujet **[2]**, **[3]**, **[4]** où on trouvera une étude détaillée du phénomène de Bieberbach–Fatou (Les premières fonctions entières injectives, d'image non dense, de $\mathbb{C}^2$ dans lui-même, ont été construites par Fatou **[5]** et par Bieberbach **[1]**).

REFERENCES

1. L. Bieberbach, Beispiel zwier ganzen Funktionen zweier komplexen Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des R^4 auf einem Teil seiner selbst vermitten, *S. B. Preuss. Akad. Wiss.* (1933), 476–479.

2. P. G. Dixon et J. Esterle, Continuity of characters on Frechet algebras and Fatou–Bieberbach functions, *in preparation.*

3. J. Esterle, Problème de Michael et fonctions entières de plusieurs variables complexe, *Proc. de la Conférence d'Analyse complexe de Toulouse,* Mai 1982 (Springer Lect. Notes, à paraître).

4. J. Esterle, Mittag–Leffler methods in the theory of Banach algebras and a new approach of Michael's problem, *Proceedings of the Yale conference in honour to C. E. Richart,* 1983 (to appear).

5. P. Fatou, Sur certaines fonctions uniformes de deux variables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **175** (1922), 1030–1033.

6. K. Kodaira, Holomorphic mappings of polydiscs into compact complex manifolds, *J. Differential geometry* **6** (1971), 33–46.

7. S. Lattes, Sur les formes réduites des transformations ponctuelles à deux variables, *C. R. Acad. Sci. Paris* **152** (1911), 1566–1569.

8. Y. Nishimura, Automorphismes analytiques admettant des sous-variétés de points fixés attractives dans la direction transversale, *J. Math. Kyoto Univ.* **23** (1983), 289–299.

9. A. Sadullaev, On Fatou's example, *Mat. Zametki* **6** (1969), 437–441.

22 Rue de Béarn
Odos, 65310—Laloubere
France