Canad. Math. Bull. Vol. **40** (4), 1997 pp. 488–497

CARACTÉRISATIONS SPECTRALES DU RADICAL ET DU SOCLE D'UNE PAIRE DE JORDAN-BANACH

ABDELAZIZ MAOUCHE

RÉSUMÉ. If f and g are two analytic functions from a domain D of the complex plane into respectively the Banach spaces V^+ and V^-, we prove that $\lambda \longmapsto \operatorname{Sp}(f(\lambda), g(\lambda))$ is an analytic multivalued function. From this derives the subharmonicity of the functions $\lambda \longmapsto \rho_V(f(\lambda), g(\lambda))$ and $\lambda \longmapsto \log \rho_V(f(\lambda), g(\lambda))$ where ρ denotes the spectral radius. We apply these results to obtain nice caracterizations of the radical and the socle of a Banach Jordan pair, and finally we get an algebraic structural theorem.

1. **Introduction.** Ce travail porte sur la théorie spectrale dans les paires de Jordan-Banach. Après un rappel de quelques résultats de la théorie générale tirés de [6–10], on démontre une généralisation d'un théorème de J. D. Newburgh pour les paires de Jordan-Banach (Théorème 3.1), à l'aide duquel on établit par la suite que la fonction spectre pour les paires de Jordan-Banach est analytique multiforme. Ce résultat est dû à Aupetit-Zraïbi [4] dans le cas des algèbres de Jordan-Banach. On donne ensuite une jolie caractérisation spectrale du radical d'une paire de Jordan-Banach (Théorème 3.3) généralisant ainsi un résultat obtenu par B. Aupetit dans [2]. Enfin la dernière partie contient un théorème de structure pour les paires de Jordan-Banach. On montre d'abord que le socle d'une paire de Jordan-Banach semiprimitive à spectre dénombrable est non nul (Théorème 4.3). Ce résultat est dû à Barnes [5] pour les algèbres associatives et à Aupetit-Baribeau pour les algèbres de Jordan-Banach [3]. En utilisant ce théorème et ceux contenus dans [9] on réussit à établir un théorème de structure algébrique pour une paire de Jordan-Banach semiprimitive, séparable, à spectre dénombrable (Théorème 4.9).

2. **Généralités.** Soit V une paire de Jordan complexe. On dira que V est une paire de Jordan-Banach si les espaces V^+ et V^- sont normés complets et que $\|\{xyz\}\| \leq \|x\|\,\|y\|\,\|z\|$ pour tous $x, z \in V^+$ et tout $y \in V^-$. Fixons $y \in V^-$ et définissons pour tout $x \in V^+$ l'opérateur $U_x^{(y)} = Q_x Q_y$ et le carré $x^{(2,y)} = Q_x y$. Alors le triplet $\left(V^+, U^{(y)}, (2, y)\right)$ est une algèbre de Jordan notée V_y^+ et appelée y-homotope de V^+.

Maintenant soit $(x, y) \in V$ et posons $J = \mathbb{C} \times V_y^+$ l'algèbre de Jordan-Banach avec unité construite à partir de l'homotope V_y^+ et dont la norme est donnée par $\|\lambda \oplus a\| = |\lambda| + \|a\| \cdot \|y\|$. On dira que (x, y) est *quasi-inversible* dans V si et seulement si $1 - x$ est inversible dans J. Donc c'est aussi équivalent à dire que l'opérateur de Bergmann (voir [10]) défini par $B(x, y) = \mathrm{Id} - D(x, y) + Q_x Q_y$ est inversible. Comme dans [10] on notera

Reçu par les éditeurs le May 17, 1995; revised June 11, 1997.
Classification (AMS) par sujet : 46H70 (17A15).
Mots clés: Spectre, rayon spectral, multifonction analytique, quasi-inverse, paire de Jordan-Banach, radical de Jacobson, socle.

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-058-9 Published online by Cambridge University Press

par x^y le *quasi-inverse* de (x, y). Un élément $x \in V^+$ est dit *proprement quasi-inversible* si et seulement si (x, y) est quasi-inversible pour tout $y \in V^-$. Aussi on définit le *radical de Jacobson* de V par $\mathrm{Rad}(V) = (\mathrm{Rad}\, V^+, \mathrm{Rad}\, V^-)$ où $\mathrm{Rad}\, V^{\pm} = \{x \in V^{\pm} : x$ est proprement quasi-inversible$\}$.

LE SPECTRE. Soit A une algèbre de Jordan et A^1 l'algèbre de Jordan avec unité construite à partir de A. Pour $x \in A$ on définit

$$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_{A^1}(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda.1 - x \text{ non inversible dans } A^1\}.$$

Lorsque A possède une unité on a

$$\mathrm{Sp}'_A(x) = \mathrm{Sp}_{A^1}(x) = \mathrm{Sp}_A(x) \cup \{0\}.$$

Maintenant soit V une paire de Jordan-Banach et $(x, y) \in V$. On définit le spectre de la paire (x, y) par

$$\mathrm{Sp}_V(x, y) = \mathrm{Sp}'_{V_y^+}(x) = \mathrm{Sp}_J(x)$$

où $J = \mathbb{C} \times V_y^+$ est l'algèbre de Jordan-Banach avec unité construite à partir de l'homotope V_y^+. Il suit de cette définition et du résultat correspondant pour les algèbres de Jordan-Banach (voir [6], [13], [15]) que $\mathrm{Sp}_V(x, y)$ est un compact non vide de $\mathbb{C}$ et que 0 est toujours dans $\mathrm{Sp}_V(x, y)$. De plus, il suit des propriétés du quasi-inverse ([10]) que $0 \neq \lambda \in \mathrm{Sp}_V(x, y) \Leftrightarrow (\lambda^{-1}x, y)$ n'est pas quasi-inversible $\Leftrightarrow B(\lambda^{-1}x, y)\colon V^+ \longrightarrow V^+$ n'est pas inversible. Ayant défini le spectre de tout élément $(x, y) \in V$ on est en mesure de définir le *rayon spectral* comme pour les algèbres de Jordan en posant

$$\rho_V(x, y) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathrm{Sp}_V(x, y)\}.$$

REMARQUE 1. Voici un résultat qui nous sera très utile dans la démonstration du Théorème 3.3 et qui caractérise le radical de Jacobson d'une paire de Jordan-Banach V, à savoir: $\mathrm{Rad}\, V^+ = \{x \in V^+ : \rho_V(x, y) = 0\, \forall y \in V^-\}$.

En effet, si $x \in \mathrm{Rad}\, V^+$, alors $(x, \lambda y)$ est quasi-inversible pour tout $y \in V^-$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Ainsi, $\mathrm{Sp}_V(x, y) = \{0\}$ pour tout $y \in V^-$, et donc $\rho_V(x, y) = 0$. L'autre inclusion vient du fait que si $\rho_V(x, y) < 1$ alors (x, y) est quasi-inversible et plus précisément on a

$$x^y = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n,y} \text{ avec } x^{n+1,y} = Q_x y^{n,x}.$$

LE CALCUL FONCTIONNEL HOLOMORPHE. Soit V une paire de Jordan-Banach, $(x, y) \in V$ et G un voisinage ouvert de $\mathrm{Sp}_V(x, y)$. Notons par $\mathcal{H}(G)$ l'algèbre des fonctions holomorphes sur G. Alors il existe un homomorphisme d'algèbres de Jordan

$$\eta^G_{x,y}\colon \mathcal{H}(G) \longrightarrow V_y^+ \text{ tel que } 1_{\mathcal{H}(G)} \longmapsto 1_{V_y^+} \quad \text{et} \quad \mathrm{Id}_G \longmapsto x.$$

De plus, l'homomorphisme $\eta^G_{x,y}$ est continu relativement à la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de G. Plus précisément,

$$\eta^G_{x,y}(f) = f(0) \oplus f(x, y) \in \mathbb{C} \times V_y^+,$$

avec

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial K} f(\lambda)\,\mathrm{Res}(x,y,\lambda)\,d\lambda \in V_y^+$$

où ∂K est la frontière d'une enveloppe K de $\mathrm{Sp}_V(x,y)$ dans G, et où l'on désigne par $\mathrm{Res}(x,y,\lambda) = \lambda^{-1}(\lambda^{-1}x)^y$ la résolvante généralisée aux paires de Jordan-Banach. En procédant comme pour les algèbres de Jordan-Banach, mais en tenant compte du fait que 0 est toujours dans $\mathrm{Sp}_V(x,y)$, on obtient l'important théorème suivant (on trouvera plus de détails dans [8], [9] et [12]).

THÉORÈME SPECTRAL. *Si f est une fonction holomorphe de l'algèbre $\mathcal{H}(G)$ alors* $\mathrm{Sp}_V\big(f(x,y),y\big) = f\big(\mathrm{Sp}_V(x,y)\big) - f(0)$.

Une paire de Jordan V est dite *non dégénérée* s'il n'existe aucun $x \in V^{\pm}$ tel que $Q_x = 0$ et *semiprimitive* lorsque son radical de Jacobson $\mathrm{Rad}\,V$ est nul. On dira aussi que $e = (e_+, e_-)$ est un idempotent de V si $Q_{e_+}e_- = e_+$ et $Q_{e_-}e_+ = e_-$. En particulier V se décompose en une somme directe de sous-paires $V = V_0(e) \oplus V_1(e) \oplus V_2(e)$, relativement à e; c'est ce qu'on appelle la décomposition de Peirce. Il est bon de savoir qu'on peut toujours construire des idempotents dans une paire de Jordan à partir d'un élément régulier. En effet, si $a \in V^+$ est régulier, disons $a = Q_a b$, alors $(a, Q_b a)$ est un idempotent. Un idempotent e de V est dit de *division* si le sous-espace de Peirce $V_2(e)$ est une *paire de Jordan de division*, chaque élément non nul (x,y) de $V_2(e)$ est inversible. Une *transformation structurelle* entre deux paires de Jordan V et W est une paire (f,g) d'applications linéaires $f\colon V^+ \longrightarrow W^+$ et $g\colon W^- \longrightarrow V^-$ vérifiant $Q_{f(x)} = fQ_x g$ et $Q_{g(y)} = gQ_y f$ pour tout $x \in V^+$ et tout $y \in W^-$. On indique ceci par $(f,g)\colon V \rightleftharpoons W$. On trouvera plus de détails dans [12].

SOCLE D'UNE PAIRE DE JORDAN.. Un sous-espace $M \subset V^{\pm}$ est dit *idéal quadratique* si et seulement si $Q_M V^{\mp} \subset M$. Puisqu'on peut toujours remplacer V par $V^{op} = (V^-, V^+)$ il suffit de considérer les idéaux quadratiques de V^+. Si $x \in V^+$ alors $[x] = Q_x V^-$ est appelé *idéal quadratique principal* déterminé par x. L'idéal quadratique engendré par x, est $(x) = \mathbb{C}x + [x]$. Un idéal quadratique M est dit *trivial* si $Q_M V^- = \{0\}$; ce qui revient à dire que tout élément de M est un diviseur absolu de zéro. Un idéal quadratique M est *simple* s'il n'est pas *trivial* et s'il est minimal parmi tous les idéaux quadratiques non nuls de V^+. On dira qu'un élément $x \in V^+$ est simple si (x) est un idéal quadratique simple.

DÉFINITION 2.1 ([11]). Le socle de V est $\mathrm{Soc}\,V = (\mathrm{Soc}\,V^+, \mathrm{Soc}\,V^-)$ où $\mathrm{Soc}\,V^{\pm}$ est la somme de tous les idéaux quadratiques simples et de tous les idéaux quadratiques triviaux.

THÉORÈME 2.2 ([11]). *Soit V une paire de Jordan non dégénérée.*

(a) Un élément simple engendre un idéal simple de V.

(b) $\mathrm{Soc}\,V$ *est une somme directe d'idéaux simples de V.*

RÉSULTATS.

3. **Caractérisation du radical d'une paire de Jordan-Banach.** On commence par généraliser le théorème de J. D. Newburgh ([1]) aux paires de Jordan-Banach.

LEMME. *Soit V une paire de Jordan-Banach. Alors la multifonction spectrale* $(x, y) \longmapsto \mathrm{Sp}_V(x, y)$ *est semicontinue supérieurement.*

DÉMONSTRATION. Supposons au contraire qu'il existe un ouvert $\mathcal{O}$ du plan complexe contenant $\mathrm{Sp}_V(x_0, y_0)$ et deux suites $\{x_n\} \longrightarrow x_0$ dans V^+ et $\{y_n\} \longrightarrow y_0$ dans V^- tel que pour chaque entier positif n, $\mathrm{Sp}_V(x_n, y_n)$ n'est pas contenu dans $\mathcal{O}$. Alors il existe une suite bornée de nombres complexes $\{\alpha_n\} \subset \mathrm{Sp}_V(x_0, y_0) \cap (\mathbb{C} - \mathcal{O})$. Sans perte de généralité on peut supposer que $\{\alpha_n\}$ converge vers un nombre complexe α n'appartenant pas à $\mathcal{O}$. Donc $\alpha \notin \mathrm{Sp}_V(x_0, y_0)$, ce qui revient à dire que $B(\alpha^{-1}x_0, y_0)$ est un opérateur inversible, mais $B(\alpha_n^{-1}x_n, y_n)$ converge vers $B(\alpha^{-1}x_0, y_0)$ par continuité du produit triple, ce qui contredit $\alpha_n \in \mathrm{Sp}_V(x_n, y_n)$ pour chaque n, c'est-à-dire les opérateurs $B(\alpha_n^{-1}x_n, y_n)$ ne sont pas inversibles. ∎

THÉORÈME 3.1. *Soit V une paire de Jordan-Banach et $(x_0, y_0) \in V$. Soient $\mathcal{O}$ et $\mathcal{U}$ deux ouverts disjoints de $\mathbb{C}$ tels que $\mathrm{Sp}_V(x_0, y_0) \subset \mathcal{O} \cup \mathcal{U}$ et $\mathrm{Sp}_V(x_0, y_0) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$. Alors il existe $r > 0$ tel que si $\|x - x_0\| < r$ et $\|y - y_0\| < r$, on a $\mathrm{Sp}_V(x, y) \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$.*

DÉMONSTRATION. Par le Lemme la fonction $(x, y) \longmapsto \mathrm{Sp}_V(x, y)$ est semicontinue supérieurement sur V. Supposons le théorème faux: alors il existe une suite $\{(x_n, y_n)\} \subset V$ qui converge vers (x_0, y_0) tel que $\mathrm{Sp}_V(x_n, y_n) \subset \mathcal{U}$ pour tout entier positif n. Soit f la fonction holomorphe définie sur $\mathcal{O} \cup \mathcal{U}$ qui vaut 1 sur $\mathcal{O}$ et 0 sur $\mathcal{U}$. Le Théorème spectral pour les paires de Jordan-Banach nous permet d'écrire $f(x_0, y_0) = \lim_{n \to \infty} f(x_n, y_n)$, avec $f(x_n, y_n) = 0$, ce qui est contradictoire puisque $\mathrm{Sp}_V(f(x_0, y_0), y_o) = f\big(Sp_V(x_0, y_0)\big)$ contient 1. ∎

Avant de démontrer le résultat principal de cette section, rappelons un théorème très important dû à Z. Słodkowski [17], qui donne des conditions équivalentes pour qu'une multifonction soit analytique. On considère un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$ et on note par $\mathcal{K}(\mathbb{C})$ l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{C}$.

THÉORÈME (Z. SŁODKOWSKI [17]). *Soit $K: D \longrightarrow \mathcal{K}(\mathbb{C})$ une fonction semi-continue supérieurement. Dénotons par Ω le complémentaire du graphe de K:*

$$\Omega = \{(\lambda, z) : \lambda \in D, z \notin K(\lambda)\}.$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

a) K est analytique.

b) La fonction $(\lambda, z) \longmapsto -\log \mathrm{dist}\big(z, K(\lambda)\big)$ est plurisousharmonique sur Ω.

c) Ω est un ouvert pseudoconvexe de $\mathbb{C}^2$.

Ce théorème de Z. Słodkowski est d'une grande importance puisqu'il permet de rapprocher la théorie spectrale et la théorie des ouverts pseudoconvexes. Pour une bonne introduction à ce sujet (*cf.* [1], Chapitre 7). On démontre maintenant un théorème fondamental, qui nous permet d'appliquer les méthodes analytiques dans les paires de Jordan-Banach, en prenant pour K la fonction spectre dans le théorème de Z. Słodkowski.

THÉORÈME 3.2. *Soient V une paire de Jordan-Banach complexe, D un ouvert de $\mathbb{C}$ et f, g deux fonctions analytiques sur D à valeurs respectivement dans les espaces de Banach V^+ et V^-. Alors $\lambda \longmapsto \mathrm{Sp}\big(f(\lambda), g(\lambda)\big)$ est une fonction analytique multiforme.*

DÉMONSTRATION. (i) Par le Lemme on sait déjà que cette multifonction est semi-continue supérieurement.

(ii) Nous allons montrer que l'ouvert de $\mathbb{C}^2$

$$\begin{aligned}\Omega &= \big\{(\lambda, z) : \lambda \in D, z \notin \mathrm{Sp}\big(f(\lambda), g(\lambda)\big)\big\} \\ &= \{(\lambda, z) : \lambda \in D, f(\lambda) - z1 \text{ est inversible}\}\end{aligned}$$

est pseudoconvexe. D'après un critère bien connu (voir [18], p. 96), il suffit pour cela de construire une fonction Ψ plurisousharmonique sur Ω telle que

$$\lim_{(\lambda,z)\longrightarrow\partial\Omega} \Psi(\lambda, z) = \infty.$$

Posons

$$\Phi(\lambda, z) = \|(U^{(g(\lambda))}_{z-f(\lambda)})^{-1}\| = \Big\|z^{-2}B\big(z^{-1}f(\lambda), g(\lambda)\big)^{-1}\Big\|$$

et

$$\Psi(\lambda, z) = \Phi(\lambda, z) - \log \mathrm{dist}(\lambda, \partial D),$$

qui sont deux fonctions plurisousharmoniques sur Ω. Supposons maintenant que (λ_n, z_n) converge vers $(\lambda_0, z_0) \in \partial\Omega$.

(1) Si $\lambda_0 \in \partial D$ alors on a tout de suite

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \Psi(\lambda_n, z_n) = \infty \text{ car } \lim_{n\longrightarrow\infty} -\log \mathrm{dist}(\lambda_0, \partial D) = \infty.$$

(2) Sinon on a $\lambda_0 \in D$ et

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \Phi(\lambda_n, z_n) < \infty.$$

En effet, si ce n'était pas le cas, il existerait une sous-suite $(\lambda_{n_k}, z_{n_k}) \in \Omega$ et une constante positive M tels que

$$\Phi(\lambda_{n_k}, z_{n_k}) = \Big\|z_{n_k}^{-2}B\big(z_{n_k}^{-1}f(\lambda_{n_k}), g(\lambda_{n_k})\big)^{-1}\Big\| \leq M.$$

Posons

$$S_0 = z_0^{-2}B\big(z_0^{-1}f(\lambda_0), g(\lambda_0)\big)^{-1} \quad \text{et} \quad S_k = z_{n_k}^{-2}B\big(z_{n_k}^{-1}f(\lambda_{n_k}), g(\lambda_{n_k})\big)^{-1}.$$

En écrivant

$$S_0 = S_k + S_0 - S_k = S_k\big(1 + S_k^{-1}(S_0 - S_k)\big),$$

où

$$\|S_k^{-1}(S_0 - S_k)\| \leq M\|S_o - S_k\| < 1$$

pour k assez grand, on déduit que S_0 est un opérateur inversible, ce qui est contradictoire. Donc

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \Phi(\lambda_n, z_n) = \infty$$

et encore une fois nous avons

$$\liminf_{n\longrightarrow\infty} \Psi(\lambda_n, z_n) = \infty. \qquad \blacksquare$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-058-9 Published online by Cambridge University Press

APPLICATION. On donne dans ce qui suit une caractérisation du radical d'une paire de Jordan-Banach similaire à celle donnée par B. Aupetit dans [2] pour les algèbres de Jordan-Banach où il est démontré qu'un élément a d'une algèbre de Jordan-Banach J appartient à $\operatorname{Rad} J$ si et seulement si $\sup\{\rho(x+ta) < \infty, t \in \mathbb{C}\}$ quel que soit $x \in J$.

THÉORÈME 3.3. *Soit $V = (V^+, V^-)$ une paire de Jordan-Banach complexe et $(a,b) \in V$. Alors $(a,b) \in \operatorname{Rad}(V)$ si et seulement si $\sup\{\rho_V(x+ta, y+tb) : t \in \mathbb{C}\} < \infty$ pour tout $(x,y) \in V$.*

DÉMONSTRATION. Par la Remarque 1 on a $\operatorname{Rad} V^+ = \{x \in V^+ : \rho_V(x,y) = 0 \, \forall y \in V^-\}$. D'autre part d'après [10, 4.18] on a $\operatorname{Rad} V^+ = \bigcap_{y \in V^- \setminus \{0\}} \operatorname{Rad} V_y^+$. Soit $(a,b) \in \operatorname{Rad} V$ et montrons que $\rho_V(x+ta, y+tb) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ et quel que soit $(x,y) \in V$. Par définition $(a,b) \in \operatorname{Rad} V$ si et seulement si $a \in \operatorname{Rad} V^+$ et $b \in \operatorname{Rad} V^-$. D'autre part, $\rho_V(x+ta, y+tb) = \rho_{V^+_{y+tb}}(x+ta)$. Comme $a \in \operatorname{Rad} V^+$ équivaut à $a \in \operatorname{Rad} V_z^+$ pour tout z non nul de V^-, en posant $J = V_z^+$, il suit que $\operatorname{Sp}(x+ta) = \operatorname{Sp} x$ quel que soit $a \in \operatorname{Rad} V_z^+$ puisque ce résultat est valide pour les algèbres de Jordan [2]. En particulier, $\rho_V(x+ta, z) = \rho_{V_z^+}(x+ta) = \rho(x) = \rho(x,z)$, quel que soit $(x,z) \in V$. Par conséquent $\rho_V(x+ta, z) < \infty$ et comme $\rho_V(x+ta, z) = \rho_{V^{op}}(z, x+ta)$, il suffit de prendre $z = y+tb$ et on obtient $\rho_{V^{op}}(y+tb, x+ta) = \rho_V(x+ta, y+tb) = \rho_V(x, y+tb) = \rho_V(x,y) < \infty$. Il en résulte que $(a,b) \in \operatorname{Rad} V$ entraîne $\rho_V(x+ta, y+tb) = \rho_V(x,y) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ et quel que soit $(x,y) \in V$. Réciproquement, supposons que $\sup\{\rho_V(x+ta, y+tb) : t \in \mathbb{C}\} < \infty$ pour tout $(x,y) \in V$. Par le Théorème 3.2 la fonction $\lambda \longmapsto \operatorname{Sp}\big(f(\lambda), g(\lambda)\big)$ est analytique multiforme; ainsi les fonctions $\lambda \longmapsto \rho_V\big(f(\lambda), g(\lambda)\big)$ et $\lambda \longmapsto \log \rho_V\big(f(\lambda), g(\lambda)\big)$ sont sousharmoniques. Par conséquent, on a $t \longmapsto \rho_V(x+ta, y+tb)$ est une fonction sousharmonique bornée sur $\mathbb{C}$, quel que soit $(x,y) \in V$. Par le théorème de Liouville pour les fonctions sousharmoniques elle est constante. Autrement dit $\rho_V(x+ta, y+tb) = \rho_V(x,y)$ pour toute paire $(x,y) \in V$ et pour tout $t \in \mathbb{C}$. En posant $y = -tb$ on obtient $0 = \rho_V(x+ta, 0) = \rho_V(x, -tb)$ pour tout $x \in V^+$. Il suit de la Remarque 1 que $tb \in \operatorname{Rad} V^-$, donc $b \in \operatorname{Rad} V^-$. Maintenant, le même argument utilisé avec $x = -ta$ donne $\rho_V(0, y+tb) = \rho_V(-ta, y) = 0$ pour tout $y \in V^-$. Il en résulte que $ta \in \operatorname{Rad} V^+$ donc $a \in \operatorname{Rad} V^+$. Ce qui termine la démonstration. ∎

COROLLAIRE 3.4. *Soit $a \in V^+$. Alors $(a,0) \in \operatorname{Rad} V$ si et seulement si $\rho_V(x+ta, y) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{C}$ et pour tout $y \in V^-$.*

DÉMONSTRATION. Découle directement du Théorème 3.3 en prenant $b = 0$. ∎

4. **Un théorème de structure.** Soit V une paire de Jordan-Banach. On suppose que le spectre de toute paire est dénombrable. Alors on montre que le socle de V est non nul.

LEMME 4.1. *Soit V une paire de Jordan-Banach et $(x,y) \in V$. Supposons que $\operatorname{Sp}_V(x,y)$ est une réunion de deux ensembles non vides fermés et disjoints. Alors V contient un idempotent non nul.*

DÉMONSTRATION. Posons $\mathrm{Sp}_V(x,y) = S_0 \cup S_1$ avec S_0, S_1 fermés, disjoints, non vides et $0 \in S_0$. On utilise le calcul fonctionnel holomorphe dans l'algèbre de Jordan-Banach unitaire $J = \mathbb{C} \times V_y^+$ (voir [15]). D'abord la fonction holomorphe définie sur $S_0 \cup S_1$, qui vaut 0 sur S_0 et 1 sur S_1, se prolonge en une fonction holomorphe $f = f^2$ dans un voisinage de $\mathrm{Sp}_V(x,y) = \mathrm{Sp}_J(x)$. Soit $f(x) = \alpha \oplus a \in J$ la projection spectrale associée à S_1 (dans J). On voit facilement que $\alpha = f(0) = 0$. Il suit de $a = a^2 = Q_a y$ que a est régulier et donc on peut construire un idempotent non nul $(a, Q_y a) \in V$. ∎

REMARQUE 2. En fait, par le lemme qui précède on construit deux idempotents non nuls qu'on notera par $e = \alpha_{S_1}(x,y) = (p, Q_y p)$ et $e' = \beta_{S_1}(x,y) = (Q_x q, q)$ obtenus par le calcul fonctionnel holomorphe respectivement dans les algèbres de Jordan-Banach $A = \mathbb{C} \times V_y^+$ et $B = \mathbb{C} \times V_x^-$. Ceci permet d'obtenir le résultat qui suit sur la décomposition spectrale de Peirce.

THÉORÈME 4.2 ([9]). *Soient V une paire de Jordan-Banach, $(x,y) \in V$ tel que $\mathrm{Sp}_V(x,y) = S_0 \cup S_1$ avec S_0, S_1 des ensembles non vides fermés et disjoints. Considérons l'idempotent $(p, Q_y p)$ et posons $x = x_2 \oplus x_1 \oplus x_0$ et $y = y_2 \oplus y_1 \oplus y_0$ avec $x_j, y_j \in V_j = V_j(e), j = 0, 1, 2$. Alors $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ et $\mathrm{Sp}_{V_0}(x_0, y_0) = \mathrm{Sp}_V(x_0, y) = \mathrm{Sp}_V(x, y_0) = S_0$, et $\mathrm{Sp}_{V_2}(x_2, y_2) = \mathrm{Sp}_V(x_2, y) = \mathrm{Sp}_V(x, y_2) = S_1 \cup \{0\}$.*

Le résultat qui suit est une extension aux paires de Jordan-Banach d'un théorème établi dans [5] pour les algèbres de Banach associatives et dans [3] pour les algèbres de Jordan-Banach.

THÉORÈME 4.3. *Soit V une paire de Jordan-Banach semiprimitive, et $0 \neq y \in V^-$ tel que $\mathrm{Sp}_V(x,y)$ est fini ou dénombrable pour chaque $x \in V^+$. Alors le socle de V est non nul.*

DÉMONSTRATION. L'algèbre locale V_y de V en y, définie par $V_y = V_y^+ / \ker(Q_y)$, où V_y^+ est le y-homotope de V^+ et $\ker(Q_y)$ est un idéal fermé (voir [7, (1.2.4ii)]), est une algèbre de Jordan semiprimitive [7, (3.1ii)]. Il est clair que $\mathrm{Sp}(\overline{x}, V_y) \subset \mathrm{Sp}_V(x,y)$ pour tout $x \in V^+$. Donc tout élément de V_y a un spectre fini ou dénombrable. Il suit de [3, Théorème 11] que le socle de V_y est non nul, et par [7, (2.1.5)] le socle de V est aussi non nul. ∎

On utilisera le théorème qui précède pour établir un théorème de structure qui caractérise les paires de Jordan-Banach à spectre dénombrable.

DÉFINITION 4.4. Soit V une paire de Jordan-Banach semiprimitive. Considérons le morphisme canonique $\phi \colon V \longrightarrow V / \overline{\mathrm{Soc}\, V} \colon (x,y) \longmapsto (\overline{x}, \overline{y})$. Alors $I(V) = \phi^{-1}\big(\mathrm{Rad}(V / \overline{\mathrm{Soc}\, V})\big) \supseteq \overline{\mathrm{Soc}\, V}$ est un idéal non essentiel.

On dira que $(x,y) \in V$ est *Riesz* si $\mathrm{Sp}_V(x,y) \setminus \{0\}$ est discret. Aussi on dira que V est *Riesz* si toute paire (x,y) de V est Riesz. Un élément $x \in V^+$ est dit *proprement Riesz* si (x,y) est Riesz pour tout $y \in V^-$. Les éléments proprement Riesz de V^- sont définis de façon analogue. On désigne par $p\mathcal{R}\, V^\sigma$ l'ensemble des éléments proprement Riesz de V^σ et on pose $p\mathcal{R}\, V = (p\mathcal{R}\, V^+, p\mathcal{R}\, V^-)$. De même on note par $p\mathcal{F}\, V$ l'ensemble des éléments

https://doi.org/10.4153/CMB-1997-058-9 Published online by Cambridge University Press

de V à *spectre proprement fini*. On rappelle aussi que si I est un idéal de V, on note par $\mathrm{kh}(I)$ l'intersection de tous les idéaux primitifs qui contiennent I.

THÉORÈME 4.5 (CARACTÉRISATION DE $I(V)$ [9]). *Soit V une paire de Jordan–Banach, L un idéal proprement Riesz de V et notons par $\phi\colon V \longrightarrow V/\bar{L}$ l'homomorphisme canonique. Posons $I = \phi^{-1}\big(\mathrm{Rad}(V/\bar{L})\big) \supseteq \bar{L}$. Alors $I \subseteq p\mathcal{R}\,V$, et pour $(x,y) \in I$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}_V(x,y) \setminus \{0\}$, les idempotents $\alpha_{\{\lambda\}}(x,y)$ et $\beta_{\{\lambda\}}(x,y)$ sont dans L.*

COROLLAIRE 4.6. *Soit V une paire de Jordan-Banach semiprimitive. Alors $I(V)$ est le plus grand idéal de Riesz dans V et contient tout idéal quadratique constitué par des éléments proprement Riesz. En fait on a l'égalité $I(V) = \mathrm{kh}(\overline{\mathrm{Soc}\,V}) = \mathrm{kh}(\mathrm{Soc}\,V)$.*

DÉMONSTRATION. Puisque V est semiprimitive on a $\mathrm{Soc}\,V \subseteq p\mathcal{F}\,V$ en vertu du Théorème 3.6 de [12]. Donc $\mathrm{Soc}\,V \subseteq p\mathcal{R}\,V$ et par le théorème précédent la même chose a lieu pour $I(V)$. Le reste vient du Théorème 2.6 de [9]. ∎

DÉFINITION 4.7. Un système de Jordan-Banach semiprimitif est dit *modulaire annihilateur* si le quotient $V/\overline{\mathrm{Soc}\,V}$ est radical.

THÉORÈME 4.8 ([9]). *Soit V une paire de Jordan-Banach semiprimitive. Alors V est modulaire annihilatrice si et seulement si V est Riesz.*

DÉMONSTRATION. Par définition de $I(V)$ on a $V/\overline{\mathrm{Soc}\,V}$ est radicale si et seulement si $V = I(V)$. Puisque $I(V)$ est un idéal, ceci a lieu si et seulement si $V = p\mathcal{R}\,V$. ∎

On démontre dans ce qui suit un théorème de structure pour les systèmes de Jordan-Banach à spectre dénombrable. Ce résultat englobe celui obtenu par B. Aupetit dans le cas des algèbres de Banach associatives ainsi que la généralisation de ce dernier au cas Jordan obtenue par B. Aupetit et L. Baribeau [3].

THÉORÈME 4.9. *Soit V une paire de Jordan-Banach complexe et semiprimitive où le spectre de chaque élément $(x,y) \in V$ est au plus dénombrable. On suppose aussi que V est séparable (V^+ et V^- sont des espaces de Banach séparables). Alors il existe un ordinal α_0 de première ou deuxième classe et une suite de compositions $(I_\alpha)_{\alpha\leq\alpha_0}$ d'idéaux fermés de V telle que $I_0 = \mathrm{Rad}\,V$, $I_{\alpha_0} = V$ et $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ est modulaire annihilatrice pour $\alpha \leq \alpha_0$.*

DÉMONSTRATION. Par le Corollaire 4.6 $I(V) = \mathrm{kh}(\mathrm{Soc}\,V)$ pour toute paire de Jordan-Banach semiprimitive. Notons tout de suite que puisque $I(V)$ est un idéal alors $\mathrm{kh}(\mathrm{Soc}\,V)$ est une paire de Jordan-Banach à spectre avec au plus 0 comme point d'accumulation. On pose $V_0 = V/\mathrm{Rad}\,V = V$ et $V_1 = V_0/\mathrm{kh}(\mathrm{Soc}\,V_0) = V/\mathrm{kh}(\mathrm{Soc}\,V) = V/I(V)$. Pour $n \geq 1$ on pose $V_n = V_{n-1}/\mathrm{kh}(\mathrm{Soc}\,V_{n-1})$. Soient ϕ_1 la projection de V sur V_1 et π_n la projection de V_n sur V_{n+1}. Par induction on peut définir pour tout n un homomorphisme ϕ_n de V sur V_n par $\phi_n = \pi_{n-1} \circ \phi_{n-1}$ et on pose $I_n = \ker(\phi_n)$. On désigne par Ω la classe des ordinaux de première ou deuxième classe. On peut alors étendre la construction qui précède à tout $\alpha \in \Omega$ comme suit:

- Si α n'est pas un ordinal limite, on pose $V_\alpha = V_{\alpha-1}/\operatorname{kh}(\operatorname{Soc} V_{\alpha-1})$ et $\phi_\alpha = \pi_{\alpha-1} \circ \phi_{\alpha-1}$ où $\pi_{\alpha-1}$ est le morphisme canonique de $V_{\alpha-1}$ sur V_α, et $I_\alpha = \ker \phi(\alpha)$.
- Si α est un ordinal limite, on prend $I_\alpha = \operatorname{kh}(\cup_{\beta<\alpha} I_\beta)$, $V_\alpha = V/I_\alpha$ et ϕ_α le morphisme canonique $u\colon V \longrightarrow V/I_\alpha$.

Il est à noter que les paires de Jordan ainsi construites sont toutes semiprimitives et à spectre dénombrable. D'autre part, les idéaux I_α forment une suite croissante d'idéaux fermés (noyaux de morphismes continus). D'aprés le théorème de Kuratowski ([1] p. 113) cette suite se stabilise à partir d'un plus petit ordinal α_0. On a alors $\{(0,0)\} = I_{\alpha_0+1}/I_{\alpha_0} \cong \operatorname{kh}(\operatorname{Soc} V_{\alpha_0})$. Par le Théorème 4.3 on sait que $\operatorname{Soc} V_\alpha$ est non nul si V_α est non nul. Il suit alors que $V_{\alpha_0} = \{(0,0)\}$, d'où $I_{\alpha_0} = V$. D'autre part, $I_{\alpha+1}/I_\alpha \cong \operatorname{kh}(\operatorname{Soc} V_\alpha)$ est une paire de Jordan-Banach semiprimitive car $\operatorname{Rad} \operatorname{kh}(\operatorname{Soc} V_\alpha) = \operatorname{kh}(\operatorname{Soc} V_\alpha) \cap \operatorname{Rad} V_\alpha = \{(0,0)\}$. De plus, le spectre de tout élément de $\operatorname{kh}(\operatorname{Soc} V_\alpha)$ a au plus 0 comme point limite. Donc par le Théorème 4.8, $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ est modulaire annihilatrice pour tout $\alpha \leq \alpha_0$. ∎

COROLLAIRE 4.10 (B. AUPETIT ET L. BARIBEAU [3]). *Soit A une algèbre de Banach associative (ou bien une algèbre de Jordan-Banach) à spectre dénombrable. On suppose de plus que A est séparable. Alors il existe un ordinal α_0 de première ou deuxième classe et une suite de compositions $(I_\alpha)_{\alpha\leq\alpha_0}$ d'idéaux fermés de A telle que $I_0 = \operatorname{Rad} A$, $I_{\alpha_0} = A$ et $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ est modulaire annihilatrice pour tout $\alpha \leq \alpha_0$.*

DÉMONSTRATION. On considère la paire de Jordan-Banach $V = (A, A)$ et on applique le théorème précédent avec les bonnes définitions. ∎

REMERCIEMENTS. Je remercie l'arbitre pour toutes ses suggestions qui ont contribué à améliorer la présentation générale de cet article et aussi pour m'avoir communiqué une démonstration directe et plus simple du Théorème 4.3.

REFERENCES

1. B. Aupetit, *A Primer on Spectral Theory*. Universitext, Springer-Verlag, 1991.
2. ———, *Spectral characterization of the radical in Banach and Jordan-Banach algebras*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **114**(1993), 31–35.
3. B. Aupetit and L. Baribeau, *Sur le socle dans les algèbres de Jordan-Banach*. Canad. J. Math. **41**(1989), 1090–1100.
4. B. Aupetit and A. Zraïbi, *Proprietés analytiques du spectre dans les algèbres de Jordan-Banach*. Manuscripta Math. **38**(1982), 381–386.
5. B. A. Barnes, *On the existence of minimal inner ideals in a Banach algebra*. Trans. Amer. Math. Soc. **133**(1968), 511–517.
6. M. Benslimane and A. Rodríguez Palacios, *Caractérisation spectrale des algèbres de Jordan-Banach non commutatives complexes modulaires annihilatrices*. J. Algebra **140**(1991), 344–354.
7. A. D'amour and K. McCrimmon, *The Local Algebra of Jordan Systems*. J. Algebra **177**(1995), 199–239.
8. G. Hessenberger, *A spectral characterization of the socle of Banach Jordan systems*. preprint.
9. ———, *Inessential and Riesz elements in Banach Jordan systems*. Quart. J. Math. Oxford (2) **47**(1996), 337–347.
10. O. Loos, *Jordan Pairs*. Lecture Notes in Math. **460**, Springer Verlag, 1975.
11. ———, *On the socle of a Jordan pair*. Collect. Math. **40**(1989), 109–125.
12. ———, *Properly algebraic and spectrum-finite ideals in Jordan Systems*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **114**(1993), 149–161.

13. A. Maouche, *Extension d'un Théorème de Harte et Applications aux Algèbres de Jordan-Banach*. Mh. Math. **122**(1996), 205–213.
14. ______, *Théorie spectrale dans les systèmes de Jordan-Banach*. Thèse de Doctorat, Ph.D, Université Laval, Québec, 1994.
15. J. Martinez, *Holomorphic functional calculus in Jordan-Banach algebras*. Ann. Sci. Univ. Blaise pascal, Clermont II, Ser. Math. Fasc **27**(1991), 125–134.
16. C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*. D. Van Nostrand, Princeton, 1960.
17. Z. Słodkowski, *Analytic Set-Valued Functions and Spectra*. Math. Ann. **256**(1981), 363–386.
18. V. S. Vladimirov, *Les fonctions de plusieurs variables complexes*. Dunod, Paris, 1967.

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval
Cité Universitaire
Québec G1K 7P4
e-mail: maouche@mat.ulaval.ca