Can. J. Math., Vol. XXX, No. 3, 1978, pp. 638-649

SUR LA CONVERGENCE PRESQUE PARTOUT DES SUITES DE FONCTIONS MESURABLES

D. BUCCHIONI ET A. GOLDMAN

L'objet de cet article est de donner quelques résultats concernant la structure des suites de fonctions mesurables sur un espace mesuré abstrait (X, Σ, μ), le théorème principal étant le suivant:

THEOREME (A). *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables sur un espace mesuré* (X, Σ, μ) *dont aucune sous-suite ne converge presque partout. Il existe alors un élément* $Y \in \Sigma$, $\mu(Y) > 0$, *deux nombres* $r \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ *et une partie infinie* M *de* $\mathbf{N}$ *tels que, pour tout* $A \in \Sigma$, $A \subset Y$, $\mu(A) > 0$ *et pour toute partie infinie* $L \subset_{\text{p.s.}} M$ *(c'est-à-dire* $L \backslash M$ *est fini), on puisse trouver* x *et* $y \in A$ *vérifiant* $f_n(x) > r + \delta$ *et* $f_n(y) < r$ *pour une infinité d'indices* $n \in L$.

Une fois établi un critère de non mesurabilité pour les fonctions numériques, la méthode utilisée fait appel à des techniques analogues à celles développées par Odell et Rosenthal [**4**; **5**; **6**] pour l'étude des fonctions de la première classe de Baire. La théorème (A), dont l'énoncé est par lui-même assez peu suggestif, permet d'obtenir, en admettant l'hypothèse du continu, une caractérisation des ensembles simplement compacts de fonctions mesurables sous la forme suivante:

THEOREME (B). *Supposons que* card $\Sigma \leqq 2^{\aleph_0}$; *alors, avec l'hypothèse du continu, tout ensemble* A *de fonctions mesurables, compact dans* $\mathbf{R}^X$ *et séparé pour la topologie* $\mathcal{T}_m$ *de la convergence en mesure, est compact pour* $\mathcal{T}_m$.

Des résultats de ce type (et d'ailleurs plus généraux) ont été obtenus par une méthode totalement différente par D. H. Fremlin [**2**]. Toutefois, la méthode développée par Fremlin ne s'applique que pour des mesures de Radon et ainsi, même dans le cas où la tribu Σ est dénombrablement engendrée et la mesure μ bornée, elle ne redonne pas le théorème (B).

Enfin, par analogie aux travaux récents de Odell, Rosenthal [**4**; **6**] et Haydon [**3**] consacrés à l'étude des espaces de Banach contenant l'espace $l^1(\mathbf{N})$, on donne quelques précisions sur les suites de fonctions mesurables qui possèdent une sous-suite équivalente (pour la norme de l'espace $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$) à une base de $l^1(\mathbf{N})$. On retrouve ainsi, sans utiliser la convexité, le théorème (4.2) de Haydon [**3**] suivant lequel un espace de Banach X ne contient pas de sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$ si et seulement si tout élément $x'' \in X''$ est une fonction universellement mesurable sur la boule unité K de X', (munie de la topologie faible $\sigma(X', X)$).

Reçu le 14 mars, 1977.

https://doi.org/10.4153/CJM-1978-055-1 Published online by Cambridge University Press

Dans tout ce travail, on désigne par (X, Σ, μ) un espace mesuré abstrait; la mesure μ est toujours supposée positive et bornée. Lorsque l'on parle de fonctions numériques mesurables, c'est toujours relativement à la tribu Σ et à la tribu borélienne $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}$. Signalons encore que pour deux parties infinies M et L de $\mathbf{N}$, la notation $L \subset_{\text{p.s.}} M$ (L inclus presque sûrement dans M) signifie que l'ensemble $L \backslash M$ est fini; de plus, pour toute partie A d'un ensemble T, on désigne par A^c le complémentaire de A dans l'ensemble T.

1. Un critère de non mesurabilité. Avant d'aborder l'étude proprement dite des suites de fonctions mesurables, nous allons établir un critère particulièrement maniable de non mesurabilité pour les fonctions numériques définies sur un espace mesuré (X, Σ, μ). On rappelle que la mesure μ est toujours suposée positive et bornée.

Supposons tout d'abord que la tribu Σ est complète et soit B une partie quelconque de X. Il est clair que si B n'appartient pas à Σ, il existe $Y \in \Sigma$, $\mu(Y) > 0$ de sorte que pour tout $A \subset Y$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$ on ait $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cap (Y \backslash B) \neq \emptyset$. Cette propriété se généralise au cas d'une fonction numérique de la manière suivante:

(1.1) THEOREME. *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré complet et soit $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction numérique non mesurable relativement à la tribu Σ et à la tribu borélienne $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}$. Alors la propriété suivante est réalisée:*

(P) Il existe $Y \in \Sigma$, $\mu(Y) > 0$ et deux nombres $r \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ tels que pour tout $A \subset Y$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$, on puisse trouver x et $y \in A$ vérifiant $f(x) > r + \delta$ et $f(y) < r$.

Preuve. En effet, si f est une fonction non mesurable, il existe un réel r tel que l'ensemble $f^{-1}(]r, +\infty))$ n'appartienne pas à Σ. En vertu de la remarque qui précède le théorème, il existe $Z \in \Sigma$, $\mu(Z) > 0$ tel que pour tout $A \subset Z$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$, on ait deux points x et y dans A tels que $f(x) > r$ et $f(y) \leqq r$. Nous affirmons qu'il existe $Y \in \Sigma$, $Y \subset Z$, $\mu(Y) > 0$ et un réel $\delta > 0$ tels que la condition (P) soit vérifiée avec (Y, r, δ). En effet, dans le cas contraire, pour tout $\epsilon > 0$ et tout $A \subset Z$, il existe $B \in \Sigma$, $B \subset A$, $\mu(B) > 0$ vérifiant $f(x) < r + \epsilon$ pour tout $x \in B$. Fixons $\epsilon = 1/p$ et considérons les familles $\mathscr{B} = \{B_i^p\}$ d'éléments de Σ inclus dans Z, de mesure non nulle, deux à deux disjoints et tels que $f(x) < r + 1/p$, pour tout $x \in B_i^p$. Ordonnons les familles $\mathscr{B}$ par inclusion; il est facile de voir qu'il existe un élément maximal $\mathscr{B}_m$. La mesure μ étant bornée, la famille $\mathscr{B}_m$ est dénombrable et le caractère maximal de $\mathscr{B}_m$ assure que $N_p = Z \backslash \bigcup_{B_n \in \mathscr{B}_m} B_n$ est négligeable. Soit $N = \bigcup_p N_p$; pour tout $x \in Z \backslash N$, on a $f(x) < r + 1/p$, quel que soit $p \geqq 1$, donc $f(x) \leqq r$; ceci est absurde puisque $\mu(Z \backslash N) > 0$.

Inversement, que la tribu Σ soit complète ou non, le critère (P) est une condition suffisante pour qu'une fonction numérique définie sur l'espace mesuré (X, Σ, μ) soit non mesurable relativement à la tribu Σ et à la tribu borélienne

https://doi.org/10.4153/CJM-1978-055-1 Published online by Cambridge University Press

$\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}$. Ce point est tout à fait évident si f est une fonction indicatrice d'ensembles. Dans le cas général, il nécessite toutefois une démonstration.

(1.2) THEOREME. *Pour qu'une fonction numérique f définie sur un espace mesuré quelconque (X, Σ, μ) soit non mesurable relativement à la tribu Σ et à la tribu borélienne $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}$, il suffit qu'elle vérifie la condition (P) du théorème* (1.1).

Preuve. Supposons tout d'abord que f soit de la forme $\sum_1^n \alpha_k 1_{E_k}$, où les E_k forment une partition de X; il est facile de voir qu'il existe un indice k tel que $E_k \notin \Sigma$, donc f n'est pas mesurable. Considérons maintenant une fonction f quelconque vérifiant le critère (P). Si on suppose f mesurable, il existe une suite (f_n) de fonctions étagées mesurables qui converge presque uniformément vers f. Fixons $\epsilon > 0$ tel que $\mu(Y) > \epsilon$; on peut trouver $Y_\epsilon \in \Sigma$, $\mu(Y \backslash Y_\epsilon) \leqq \epsilon/2$ et un entier $n \geqq 1$ tel que $||f - f_n||_{Y_\epsilon} \leqq \delta/4$. On en déduit que la fonction f_n vérifie également le critère (P) avec $(Y \cap Y_\epsilon, r + \delta/4, \delta/2)$, d'où la contradiction.

Remarquons que lorsque la mesure μ est intérieurement régulière relativement à une classe $\mathscr{C}$ d'éléments de Σ, c'est-à-dire lorsqu'on a:

$$\mu(A) = \operatorname{Sup}\{\mu(B); B \subset A, B \in \mathscr{C}\}$$

pour tout $A \in \Sigma$, alors, aussi bien dans l'énoncé du théorème (1.1) que dans celui du théorème (1.2), on peut supposer que Y appartient à $\mathscr{C}$ et que les ensembles $A \subset Y$, $\mu(A) > 0$ sont aussi choisis dans $\mathscr{C}$. En particulier, lorsque μ est une mesure de Radon sur un espace topologique T, on a le résultat suivant:

(1.3) COROLLAIRE. *Soit μ une mesure de Radon sur un espace topologique T. Pour qu'une application $f : T \rightarrow \mathbf{R}$ ne soit pas μ-mesurable il faut et il suffit qu'elle vérifie le critère suivant:*

(P_R) *Il existe un compact K_0 de T, $\mu(K_0) > 0$, et deux nombres $r \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ tels que, pour tout compact $K \subset K_0$, $\mu(K) > 0$, on puisse trouver x et $y \in K$ vérifiant $f(x) > r + \delta$ et $f(y) < r$.*

2. Sur les valeurs d'adhérence d'une suite de fonctions mesurables.

On se propose d'utiliser une technique, inspirée par les travaux de Odell et Rosenthal [**4**; **5** et **6**], pour étudier les suites de fonctions réelles mesurables admettant des valeurs d'adhérence (pour la topologie de la convergence simple) non mesurables. D'une manière générale, lorsqu'on désire construire des fonctions non mesurables, on se ramène nécessairement soit à une construction du "type Vitali" (utilisant l'invariance de la mesure par translation), soit à une construction du "type Bernstein" (c'est-à-dire par récurrence ordinale). Une étude des suites de fonctions mesurables par la "méthode Vitali" est effectuée par Fremlin dans [**2**] qui obtient comme résultat principal le théorème suivant:

(2.1) THEOREME (Fremlin). *Soit (X, Σ, μ) un espace mesuré parfait et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables. Alors, l'une des deux conditions suivantes est réalisée:*

(a) *Il existe une sous-suite* (f_{n_k}) *qui converge presque partout.*

(b) *Il existe une sous-suite* (f_{n_k}) *dont aucune valeur d'adhérence (pour la topologie de la convergence simple sur* X*) n'est mesurable.*

La "méthode Vitali" a l'inconvénient d'être basée sur les propriétés de la mesure de Haar, et de ce fait, son domaine d'efficacité est limité au cas topologique. D'ailleurs, à partir du moment où l'on suppose que l'espace mesuré (X, Σ, μ) est parfait, il est aisé de transporter le problème envisagé dans le théorème (2.1), dans le cadre d'un espace du type $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \bar{\mathscr{B}}_\nu, \nu)$, où ν est une mesure de Radon sur l'espace $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, et où $\bar{\mathscr{B}}_\nu$ désigne la tribu borélienne complétée pour ν. Ce point de vue ne nous semble pas être clairement explicité dans [**2**]; établissons-le. Fixons une suite (f_n) de fonctions mesurables et considérons l'application $I : X \to \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ définie par $I(X) = (f_n(x))$; I est évidemment mesurable relativement à la tribu Σ et à la tribu borélienne $\mathscr{B}$ de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. On notera $\mathscr{M}$ l'ensemble des parties A de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telles que $I^{-1}(A)$ appartienne à Σ et on désignera par ν la mesure image du μ par l'application I. Il est clair que les applications f_n se factorisent à travers $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ sous la forme $f_n = p_n^0 \circ I$ avec $p_n^0 = p_n \times 1_{I(X)}$, ($p_n$ est la projection sur $\mathbf{R}$ relative à l'indice $n \geqq 0$). De même, si f est une valeur d'adhérence de la suite (f_n) pour la topologie de la convergence simple sur X, f peut se mettre sour la forme $g \circ I$, où $g : \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \to \mathbf{R}$ est une valeur d'adhérence de la suite (p_n^0). Le résultat suivant justifie nos affirmations:

(2.2) Proposition. *Lorsque l'espace mesuré* (X, Σ, μ) *est parfait, les conditions suivantes sont réalisées:*

(a) *La tribu* $\mathscr{M}$ *coïncide exactement avec la tribu complétée* $\bar{\mathscr{B}}_\nu$*;*

(b) *La fonction* f *est mesurable relativement à* Σ *si et seulement si la fonction* g *est mesurable pour* $\bar{\mathscr{B}}_\nu$*;*

(c) *Pour qu'une sous-suite* (f_{n_k}) *converge presque partout il faut il suffit que la sous-suite* $(P_{n_k}{}^0)$ *correspondante converge* ν*-presque partout.*

Preuve. (a) Désignons par (U_n) une base d'ouverts de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, la fonction borélienne $h = \sum 3^{-n} 1_{U_n}$ permet de plonger l'espace measurable $(\mathbf{R}^{\mathbf{N}}, \mathscr{B})$ dans l'espace $(\mathbf{R}, \mathscr{B}_0)$, où $\mathscr{B}_0$ est la tribu borélienne de $\mathbf{R}$. L'espace (X, Σ, μ) étant parfait, pour tout $A \in \mathscr{M}$, il existe deux boréliens $B \subset A$ et $B' \subset \mathbf{R}^{\mathbf{N}} \backslash A = A^c$ de sorte que l'on ait $\mu(I^{-1}(B)) = \mu(I^{-1}(A)) = \nu(B)$ et $\mu(I^{-1}(B')) = \mu(I^{-1}(A^c)) = \nu(B')$; ainsi $\mathscr{M} = \bar{\mathscr{B}}_\nu$.

(b) C'est une conséquence immédiate de (a).

(c) Soit D l'ensemble des points de X où la suite (f_{n_k}) converge; on a alors $D = I^{-1}(I(D))$ et de même $\mathbf{R}\backslash D = D^c = I^{-1}(I(D^c)) = I^{-1}(I(D)^c)$. Il en résulte que les ensembles $I(D)$ et $I(D)^c$ appartiennent à $\bar{\mathscr{B}}_\nu$, ce qui suffit.

Passons maintenant à l'étude des suites (f_n) en utilisant le procédé ordinal. L'espace (X, Σ, μ) est un espace mesuré abstrait quelconque, néanmoins la mesure μ est toujours supposée positive et bornée. Commençons par faire la remarque élémentaire suivante, qui sera essentielle pour la compréhension de ce qui suit:

https://doi.org/10.4153/CJM-1978-055-1 Published online by Cambridge University Press

(2.3) PROPOSITION. *Supposons que l'espace mesuré* (X, Σ, μ) *soit complet et soit* f *une valeur d'adhérence non mesurable de la suite* (f_n). *Il existe alors* $Y \in \Sigma$, $\mu(Y) > 0$ *et deux nombres* $r \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ *tels que, pour tout* $A \subset Y$, $A \in \Sigma$, $\mu(A) > 0$ *on puisse trouver deux points* x *et* $y \in A$ *vérifiant:*

$f_n(x) > r + \delta$ *pour une infinité d'indices* $n \in \mathbf{N}$, *et*
$f_p(y) < r$ *pour une infinité d'indices* $p \in \mathbf{N}$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate du critère (P) énoncé dans le théorème (1.1).

Or, il s'avère que si la suite (f_n) de fonctions mesurables n'a aucune sous-suite convergeant presque partout, la condition énoncée dans la proposition (2.3) est précisément réalisée (on obtient en fait une condition un peu plus forte). Ce point est loin d'être trivial et, avant de l'établir, nous allons donner quelques résultats intermédiaires. Donnons tout d'abord un résultat de mesurabilité basé sur les propriétés de l'opération (A) de Souslin.

(2.4) PROPOSITION. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables et soit* M *une partie infinie de* $\mathbf{N}$. *Alors pour tout* $r \in \mathbf{R}$ *et tout* $\delta > 0$, *l'ensemble* K_M *des points* $x \in X$ *pour lesquels il existe deux parties infinies* P *et* P' *de* M *telles que* $f_n(x) > r + \delta$ *pour tout* $n \in P$ *et* $f_n(x) < r$ *pour tout* $n \in P'$, *appartient à la tribu complétée* $\hat{\Sigma}$.

Preuve. Quitte à renuméroter les points, on peut supposer que $M = \mathbf{N}$. Pour toute suite finie d'entiers $s = (n_1, \ldots, n_k)$, on pose

$$H_s = \{x \in X; f_{n_j}(x) > r + \delta, j = 1, \ldots, k\}.$$

Il est clair que si l'on a $s < s'$ (s est une section commençante de s') alors $H_{s'} \subset H_s$. Ainsi, l'application $s \rightarrow H_s$ est un système déterminant sur Σ. Pour toute suite infinie $\sigma \in (\mathbf{N}^*)^{\mathbf{N}^*} = I$, posons

$$H_\sigma = \bigcap_{s<\sigma} H_s \quad \text{et} \quad K_1 = \bigcup_{\sigma \in I} H_\sigma.$$

On construit de manière identique un ensemble K_1' à partir des ensembles $H_s' = \{x \in X; f_{n_j}(x) < r, j = 1, \ldots, k\}$. Les ensembles K_1 et K_1' résultent de l'opération (A) appliquée à des éléments de Σ; or on a $K_{\mathbf{N}} = K_1 \cap K_1'$, d'où le résultat.

Supposons de plus que la suite (f_n) n'a aucune sous-suite qui converge presque partout; on a alors la précision supplémentaire suivante:

(2.5) PROPOSITION. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables dont aucune sous-suite ne converge presque partout. Il existe une partie infinie* M' *de* $\mathbf{N}$ *et deux nombres* $r \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ *tels que pour toute partie* $M \subset_{\text{p.s.}} M'$, *l'ensemble* K_M *soit de mesure extérieure* $\mu^*(K_M)$ *non nulle.*

Preuve. La démonstration suit à quelques variantes près une idée de Dor [**1**]. En numérotant les couples de rationnels, on peut écrire $\mathbf{Q} \times \mathbf{Q}^+ = \{(r_n, \delta_n)\}_n$.

En raisonnant par l'absurde, on fabrique par récurrence une suite (M_n) de parties infinies de $\mathbf{N}$ telle que $M_{n+1} \subset_{\text{p.s.}} M_n$ et telle que, pour chaque n, on ait $\mu^*(K_{M_n}) = 0$. (L'ensemble K_{M_n} est associé au couple (r_n, δ_n)). Avec le procédé diagonal, on peut trouver une partie infinie M de $\mathbf{N}$ telle que $M \subset_{\text{p.s.}} M_n$, pour tout n. On va montrer que la suite (f_n), $n \in M$, converge presque partout, d'où la contradiction. En effet, dans le cas contraire, désignons par A l'ensemble des points $x \in X$ pour lesquels la suite $(f_n(x))$, $n \in M$, ne converge pas; c'est un élément de Σ de mesure non nulle, donc on peut trouver un point $x_0 \in A \backslash \bigcup_n K_{M_n}$. Comme la suite $(f_n(x_0))$ ne converge pas, il existe $(r, \delta) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}^+$ tel que:

$$\underline{\lim}_{k \in M} f_k(x_0) < r < r + \delta < \overline{\lim}_{k \in M} f_k(x_0).$$

Soit n tel que $(r, \delta) = (r_n, \delta_n)$. Le point x_0 n'appartient pas à K_{M_n} et on a $M \subset_{\text{p.s.}} M_n$, donc l'une au moins des inégalités suivantes est vérifiée:

$$\overline{\lim}_{k \in M} f_k(x_0) \leqq r + \delta \quad \text{ou} \quad \underline{\lim}_{k \in M} f_k(x_0) \geqq r$$

ce qui est absurde.

Donnons finalement le résultat essentiel de ce paragraphe qui n'est pas, bien-sûr, sans évoquer le résultat analogue de [**6**].

(2.6) THEOREME. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables dont aucune sous-suite ne converge presque partout. Il existe alors une partie infinie M de $\mathbf{N}$ et deux nombres $r \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ tels que pour toute partie infinie $L \subset_{\text{p.s.}} M$, on ait*

$$\mu^*(K_M) = \mu^*(K_L) > 0.$$

Preuve. En raisonnant par l'absurde, on construit par récurrence transfinie une famille (M_α), $\alpha \in [0, \omega_1[$, de parties infinies de $\mathbf{N}$ telles que, pour $\alpha < \beta < \omega_1$ on ait $M_\beta \subset_{\text{p.s.}} M_\alpha$ et $\mu^* \ (K_{M_\alpha} \backslash K_{M_\beta}) > 0$. La famille $(K_{M_\alpha} \backslash K_{M_{\alpha+1}})$, $\alpha \in [0, \omega_1[$, est alors formée d'une infinité non dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints de mesure strictement positive; comme la mesure μ est bornée, on a une contradiction. Reste à construire la famille (M_α); supposons la construction réalisée pour tout ordinal $\beta < \alpha$:

Premier cas: α est de la forme $\beta + 1$; comme la partie M_β ne convient pas, il existe une partie infinie de $\mathbf{N}$, notée M_α, telle que $M_\alpha \subset_{\text{p.s.}} M_\beta$ et telle que $\mu^*(K_{M_\beta} \backslash K_{M_\alpha}) > 0$.

Deuxième cas: α est un ordinal limite; la famille (M_β), $\beta < \alpha$, étant dénombrable et telle que $M_\gamma \subset_{\text{p.s.}} M_\beta$ pour $\beta < \gamma < \alpha$, le procédé diagonal permet de trouver une partie infinie $M_\alpha \subset_{\text{p.s.}} M_\beta$, pour tout $\beta < \alpha$.

Par ailleurs, si α et β sont deux ordinaux quelconques tels que $\alpha < \beta < \omega_1$, on a de façon évidente $K_{M_\alpha} \backslash K_{M_{\alpha+1}} \subset K_{M_\alpha} \backslash K_{M_\beta}$, donc $\mu^*(K_{M_\alpha} \backslash K_{M_{\alpha+1}}) \leqq \mu^*(K_{M_\alpha} \backslash K_{M_\beta})$; or, par construction, il est clair que $\mu^*(K_{M_\alpha} \backslash K_{M_{\alpha+1}}) > 0$, ce qui suffit.

Le théorème (2.6) permet enfin d'obtenir le résultat annoncé un peu plus tôt, à la suite de la proposition (2.3).

(2.7) COROLLAIRE. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions mesurables dont aucune sous-suite ne converge presque partout. Il existe* $Y \in \Sigma$, $\mu(Y) > 0$, *deux nombres* $r \in \mathbf{R}$, $\delta > 0$ *et une partie infinie* M *de* $\mathbf{N}$ *tels que, pour toute partie infinie* $L \subset_{\text{p.s.}} M$ *et pour tout* $A \in \Sigma$, $A \subset Y$, $\mu(A) > 0$, *on puisse trouver* x *et* $y \in A$ *vérifiant* $f_n(x) > r + \delta$ *et* $f_n(y) < r$ *pour une infinité d'indices* $n \in L$.

Preuve. Il suffit de prendre pour Y un élément de Σ contenant K_M et de même mesure. En effet, soit L une partie infinie telle que $L \subset_{\text{p.s.}} M$ et soit A un élément de Σ inclus dans Y tel que $\mu(A) > 0$. Comme on a $\mu^*(K_L) = \mu(Y)$, il est clair que l'ensemble $A \cap K_L$ n'est pas vide, donc il existe un point $x \in A$ et une partie infinie $L' \subset L$ tels que $f_n(x) > r + \delta$ pour tout $n \in L'$. Pour les mêmes raisons, l'ensemble $A \cap K_{L'}$ n'est pas vide, ce qui prouve l'existence d'un point $y \in A$ et d'une partie infinie L'' de L' tels que $f_n(y) < r$ (et $f_n(x) > r + \delta$), pour tout $n \in L''$.

Remarque 1. Associons à toute fonction f_n les ensembles

$$A_n^+ = \{x \in X; f_n(x) > r + \delta\} \quad \text{et} \quad A_n^- = \{x \in X; f_n(x) < r\},$$

et supposons que la suite (f_n) n'ait aucune sous-suite qui converge presque partout. Si M désigne la partie infinie de $\mathbf{N}$ obtenue avec le théorème (2.6), il est facile de voir qu'aucune sous-suite de $(1_{A_n^+})$, $n \in M$, (resp. $(1_{A_n^-})$, $n \in M$), ne converge presque partout.

3. Ensembles simplement compacts de fonctions mesurables et l'hypothèse du continu. Dans ce paragraphe nous allons donner, moyennant l'hypothèse du continu, quelques applications du théorème (2.6) à des résultats de compacité dans les ensembles de fonctions mesurables. On suppose que l'espace mesuré (X, Σ, μ) vérifie la condition de cardinalité card $\bar{\Sigma} \leqq 2^{\aleph_0}$, où $\bar{\Sigma}$ désigne l'ensemble des parties $A \in \Sigma$ de mesure non nulle; c'est par exemple le cas lorsque la tribu Σ est dénombrablement engendrée.

(3.1) THEOREME. *Soit* (f_n) *une suite simplement bornée de fonctions mesurables dont aucune sous-suite ne converge presque partout. Alors, avec l'hypothèse du continu, il existe une fonction non mesurable* f *qui est valeur d'adhérence de la suite* (f_n) *pour la topologie de la convergence simple.*

Preuve. On considère la sous-suite (f_n), $n \in M$, où M est la partie de $\mathbf{N}$ obtenue avec le théorème (2.6), et on désigne par Y un élément de Σ contenant K_M et de même mesure. Moyennant la condition de cardinalité sur $\bar{\Sigma}$ et avec l'hypothèse du continu, on peut indexer les parties $A \in \Sigma$, $A \subset Y$, $\mu(A) > 0$, par les ordinaux $\alpha \in [0, \omega_1[$. On construit alors par récurrence transfinie une famille (M_α) de parties infinies de M telle que $M_\alpha \subset_{\text{p.s.}} M_\beta$ si $\beta < \alpha$, et une famille (x_α, y_α) de points de A_α vérifiant $f_n(x_\alpha) > r + \delta$ et $f_n(y_\alpha) < r$ pour tout $n \in M_\alpha$. En effet, supposons la construction réalisée pour tout ordinal $\beta < \alpha$. La famille (M_β), $\beta < \alpha$, est dénombrable et telle que $M_\gamma \subset_{\text{p.s.}} M_\beta$ si $\beta < \gamma < \alpha$, donc avec le procédé diagonal, on peut trouver une partie infinie M' de M telle que $M' \subset_{\text{p.s.}} M_\beta$ pour tout $\beta < \alpha$. Avec le théorème (2.6), on a $\mu^*(K_{M'}) = \mu^*(K_M) = \mu(Y)$, donc il est clair que l'ensemble $A_\alpha \cap K_{M'}$ n'est pas vide. Soit $x_\alpha \in A_\alpha \cap K_{M'}$; il existe alors une partie infinie $M'' \subset M'$ telle que $f_n(x_\alpha) > r + \delta$ pour tout $n \in M''$. Mais on a encore $A_\alpha \cap K_{M''} \neq \emptyset$, ce qui prouve l'existence d'un point $y_\alpha \in A$ et d'une partie infinie $M_\alpha \subset M''$ vérifiant $f_n(y_\alpha) < r$ pour tout $n \in M_\alpha$, d'où le résultat. Pour tout ordinal $\alpha \in [0, \omega_1[$, (resp. pour tout entier $k \in \mathbf{N}$), désignons par D_α, (resp. D_k'), l'adhérence de la suite (f_n), $n \in M_\alpha$ (resp. $n \geqq k$), dans l'espace $\mathbf{R}^X$. La famille de compacts $\{D_\alpha, D_k'\}$ est filtrante décroissante, donc il existe une fonction $f \in (\bigcap_\alpha D) \cap (\bigcap_k D_k')$. Il est clair que f est valeur d'adhérence de la suite (f_n) dans l'espace $\mathbf{R}^X$ et que f vérifie le critère (P) relativement au triplet (Y, r, δ); par conséquent f n'est pas mesurable en vertu du théorème (1.2).†

Ce résultat va permettre de donner des précisions intéressantes sur certains ensembles A de fonctions mesurables qui sont compacts dans $\mathbf{R}^X$. On obtient ainsi le théorème suivant qui répond, dans notre cas particulier, à une question posée par A. Ionescu-Tulcea (et évoquée dans [**2**]).

(3.2) THEOREME. (a) *Tout ensemble A de fonctions mesurables, compact dans $\mathbf{R}^X$, est précompact pour la topologie de la convergence en mesure.*

(b) *Si de plus A est séparé pour la topologie $\mathscr{T}_m$ de la convergence en mesure, alors A est compact pour $\mathscr{T}_m$ et sur A ces deux topologies compactes coïncident.*

Preuve. (a) Sinon il existe $\epsilon > 0$ et une suite (f_n) d'éléments de A vérifiant:

$$\mu\{x \in X; |f_n(x) - f_m(x)| > \epsilon\} > \epsilon$$

pour tout $n \neq m$. La compacité de l'ensemble A dans $\mathbf{R}^X$ assure que toutes les valeurs d'adhérence de la suite (f_n), pour la convergence simple, sont des éléments de A, donc sont mesurables. Par ailleurs, la suite (f_n) est simplement bornée, donc du théorème (3.1) on déduit qu'elle possède nécessairement une sous-suite (f_{n_k}) qui converge presque partout. La suite (f_{n_k}) converge alors en mesure, donc elle est de Cauchy en mesure, ce qui est absurde.

(b) Il suffit de montrer que A est séquentiellement compacte pour $\mathscr{T}_m$. Soit (f_n) une suite d'éléments de A; comme en (a), le théorème (3.1) montre qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}), une fonction mesurable f et une partie négligeable N de X telles que la suite (f_{n_k}) converge simplement vers f sur l'ensemble $\dot{X} = X \backslash N$. Désignons par π la surjection canonique de $\mathbf{R}^X$ dans $\mathbf{R}^{\dot{X}}$ qui à toute fonction $h \in \mathbf{R}^X$ associe sa restriction $\dot{h}$ à $\dot{X}$. L'ensemble $\dot{A} = \pi(A)$ est évidemment compact dans $\mathbf{R}^{\dot{X}}$ et il est clair que π est un homéomorphisme de A sur $\dot{A}$. Ainsi, comme la suite $(\dot{f}_{n_k})$ converge simplement vers $\dot{f} \in \dot{A}$, il existe $g \in A$ telle que $g/\dot{X} = \dot{f}$ et la suite (f_{n_k}) converge simplement vers g; a fortiori, la suite (f_{n_k}) converge vers g pour la topologie $\mathscr{T}_m$. Pour terminer,

†Le théorème (3.2) a été obtenu indépendamment par M. Talagrand avec l'axiome de Martin et sans hypothèse de cardinalité sur la tribu $\bar{\Sigma}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1978-055-1 Published online by Cambridge University Press

il suffit de prouver que sur A, la topologie $\mathscr{T}_s$ induite par $\mathbf{R}^X$ est moins fine que la topologie $\mathscr{T}_m$. Soit B une partie de A, fermée pour $\mathscr{T}_s$; alors B est compacte dans $\mathbf{R}^X$, évidemment B est séparée pour $\mathscr{T}_m$, donc B est compacte pour $\mathscr{T}_m$, avec ce qui précède. A fortiori, B est fermée pour la topologie $\mathscr{T}_m$, ce qui suffit.

Notons que même dans le cas où la tribu Σ est dénombrablement engendrée et où la mesure μ est bornée, l'espace mesuré (X, Σ, μ) n'est pas pour autant parfait (voir par exemple Sazonov [**7**]). Ainsi, comme nous l'avons déjà dit dans l'introduction, le théorème (3.1) ne peut pas se déduire du résultat correspondant obtenu par D. H. Fremlin [**2**] pour les espaces parfaits. Toutefois, notre méthode ne possède pas que des avantages; ainsi par exemple nous n'avons pu retrouver les résultats de D. H. Fremlin pour les mesures de Radon. On peut se demander également s'il est indispensable de faire appel à l'hypothèse du continu pour démontrer le théorème (3.1); remarquons cependant que, en vertu d'un exemple de [**8**], le résultat obtenu dans (3.1) n'est pas valable pour un espace mesuré quelconque.

4. Quelques remarques complémentaires. Les résultats de H. P. Rosenthal [**6**] sur les fonctions de la première classe de Baire permettent de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un espace de Banach séparable E contienne un sous-espace isomorphe à $l^1(\mathbf{N})$. Dans le même ordre d'idée, R. Haydon [**3**] a obtenu des conditions nécessaires et suffisantes, s'exprimant en termes de mesurabilité, pour qu'un espace de Banach, non nécessairement séparable, contienne $l^1(\mathbf{N})$. Examinons le lien qui existe entre ces travaux et les résultats de cet article. Tout d'abord, dans le cas où μ est une mesure de Radon sur un espace compact K, on a le lemme suivant, très proche d'un résultat de Rosenthal (voir [**6**, proposition 2]).

(4.1) LEMME. *Soient K un espace compact, μ une mesure de Radon sur K et soit A une famille uniformément bornée de fonctions continues sur K. S'il existe une fonction non μ-mesurable f qui est valeur d'adhérence de A dans l'espace $\mathbf{R}^K$, alors A contient une suite (f_n) équivalente, pour la norme de l'espace $L^\infty(K, \mu)$, à une base de l'espace $l^1(\mathbf{N})$.*

Preuve. Notons tout d'abord qu'une suite (f_n) uniformément bornée sur K, satisfait à la conclusion du lemme dès que, pour toute suite finie $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de scalaires, on a:

$$(*) \quad N^\infty\left(\sum_1^n \alpha_k f_k\right) \geqq C \times \sum_1^n |\alpha_k| \quad \text{avec } C > 0.$$

Par ailleurs, si K' est un compact inclus dans K et si l'inégalité (*) est satisfaite pour la norme de l'espace $L^\infty(K', \mu)$, elle est a fortiori satisfaite pour celle de l'espace $L^\infty(K, \mu)$. En restreignant au besoin le compact K, on peut donc supposer que K est le support de la mesure μ. Comme la fonction f n'est pas

μ-mesurable, elle vérifie le critère (P) associé à un triplet (Y, r, δ). En procédant comme dans [**6**], on construit par récurrence une suite (f_n) d'éléments de A telle que, pour tout entier $n \geqq 0$ et tout $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ (où $\epsilon_k = \pm 1$), l'ensemble $B_\epsilon^n = \bigcap_1^n \epsilon_k A_k$ soit un ouvert non vide Y, où, comme dans la remarque 1, $\epsilon_k A_k$ désigne l'ensemble des points $x \in Y$ tels que $f_k(x) > r + \delta$ (resp. $f_k(x) < r$) si $\epsilon_k = +1$ (resp. si $\epsilon_k = -1$). Pour tout entier $n \geqq 0$ et pour tout $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$, on a alors $\mu(B_\epsilon^n) > 0$, et, en suivant à nouveau [**6**] on déduit aisément de là que la suite (f_n) ainsi construite vérifie l'inégalité (*) avec $C = \delta/2$.

Remarque 2. Il est à noter que dans l'énoncé du lemme (4.1) il n'est pas indispensable de prendre pour μ une mesure de Radon. Il suffit en fait que μ soit une mesure borélienne sur K pour laquelle il existe un élément $A \in \bar{\mathscr{B}}_\mu$ (tribu complétée de $\mathscr{B}$ relativement à μ) tel que $\mu(A) > 0$ et tel que A soit le support de μ/A, restriction de la mesure μ à la partie A (c'est-à-dire que pour tout ouvert non vide U de A, on a $\mu(U) \neq 0$). On peut remarquer par ailleurs qu'une mesure μ vérifiant cette propriété n'est pas nécessairement de Radon. En effet, si l'on prend pour K l'espace compact (non radonien) $\{0, 1\}^{\aleph_1}$, on peut construire sur K une mesure borélienne μ qui satisfait à la condition énoncée ci-dessus et qui n'est pas de Radon.

Le lemme (4.1) redonne comme corollaire (et sans utiliser la convexité) le résultat suivant de R. Haydon [**3**]:

(4.2) Corollaire (R. Haydon). *Pour un espace de Banach E, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *E ne contient aucun sous-espace isomorphe à l'espace $l^1(\mathbf{N})$.*

(b) *Tout élément $x'' \in E''$ est (Lusin-) mesurable sur la boule unité K de E', munie de la topologie faible $\sigma(E', E)$.*

Preuve. (a) $\Rightarrow$ (b). En effet, dans le cas contraire, il existe un élément $x'' \in E''$ et une mesure de Radon μ sur K telle que x'' ne soit pas μ-mesurable. Or, si B désigne la boule unité de E, on peut identifier B à une famille uniformément bornée de fonctions continues sur K, et x'' est valeur d'adhérence de B pour la topologie de la convergence simple sur K. Du lemme (4.1), on déduit alors que B contient une suite (x_n) équivalente, pour la norme de l'espace de Banach $C(K)$ c'est-à-dire pour la norme de E, à une base de l'espace $l^1(\mathbf{N})$, ce qui contredit l'assertion (a).

(b) $\Rightarrow$ (a). La démonstration de cette implication est classique et due à Sierpinski (voir par exemple Haydon [**3**]).

Du lemme (4.1), on déduit également le résultat suivant:

(4.3) Proposition. *Soient K un espace compact, μ une mesure de Radon sur K et soit (f_n) une suite bornée dans l'espace $L^\infty(K, \mu)$. Considérons les assertions suivantes:*

(a) *La suite* (f_n) *possède une valeur d'adhérence, pour la topologie induite par* $\mathbf{R}^K$, *qui est une fonction non* μ*-mesurable.*

(b) *La suite* (f_n) *possède une sous-suite* (f_{n_k}) *dont aucune sous-suite ne converge* μ*-presque partout.*

(c) *La suite* (f_n) *possède une sous-suite* (f_{n_k}) *qui est équivalente, pour la norme de l'espace* $L^\infty(K, \mu)$, *à une base de l'espace* $l^1(\mathbf{N})$.

On a alors les implications: (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c).

Preuve. (b) $\Rightarrow$ (a). C'est une conséquence du théorème $(2 - F)$ de Fremlin [**2**]; c'est également une conséquence du théorème (3.1), mais celui-ci n'est valable qu'en admettant l'hypothèse du continu, ce qui est inutile dans ce cas particulier.

(a) $\Rightarrow$ (c) et (a) $\Rightarrow$ (b). On démontre ces deux implications simultanément. Comme la suite (f_n) est constituée de fonctions μ-mesurables, on peut trouver un compact $K' \subset K$ tel que $\mu(K') > 0$ et tel que chaque fonction f_n soit continue sur K'. Du lemme (4.1) on déduit alors que la suite (f_n) possède une sous-suite (f_{n_k}) équivalente, pour la norme de l'espace $L^\infty(K', \mu)$ et a fortiori pour celle de l'espace $L^\infty(K, \mu)$, à une base de l'espace $l^1(\mathbf{N})$, d'où l'implication (a) $\Rightarrow$ (c). Montrons maintenant que cette suite (f_{n_k}) n'a aucune sous-suite qui converge μ-presque partout sur K, ce qui terminera tout. Pour simplifier, désignons par g_k la restriction de l'application f_{n_k} au compact K'. Il est clair que la suite (g_k) est aussi équivalente à une base de $l^1(\mathbf{N})$ dans l'espace de Banach $C(K')$ des fonctions continues sur K'. On déduit de là que la suite (g_k) n'a aucune sous-suite qui converge μ-presque partout sur K', ce qui suffit. En effet dans le cas contraire, le théorème de convergence dominée de Lebesgue joint au fait que tout élément $\bar{\alpha}$ de $l^\infty(\mathbf{N})$ se prolonge en une mesure de Radon sur K', permet aisément d'obtenir une contradiction.

On peut se demander ce que devient la proposition 4.3 dans le cas d'un espace mesuré abstrait (X, Σ, μ). Il est clair que l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) est encore vérifiée. On peut également noter que si l'on veut démontrer les implications (a) $\Rightarrow$ (c) et (a) $\Rightarrow$ (b) en utilisant le critère (P) de non mesurabilité, on doit supposer que la tribu Σ est complète. Mais, même si c'est le cas, on ne sait pas faire dans le cas abstrait une démonstration analogue à celle du cas compact. Tout ce que nous somme en mesure de dire, c'est qu'en adaptant une autre technique de Rosenthal (voir [**5**]), on peut établir l'implication (b) $\Rightarrow$ (c) pour des espaces mesurés abstraits quelconques. Notons pour terminer que nous ignorons, même dans le cas compact, si l'implication (c) $\Rightarrow$ (b) est toujours vérifiée (c'est bien entendu le cas si la suite (f_n) est formée de fonctions continues sur K).

Bibliographie

1. L. E. Dor, *On sequences spanning a complex l^1 space*, Proc. Amer. Math. Soc. *47* (1975), 515–516.

2. D. H. Fremlin, *Pointwise compact subsets of measurable functions*, Manuscripta Math. *15* (1975), 219–242.

3. R. Haydon, *Some more characterizations of Banach spaces containing* l^1, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. *80* (1976), 269–276.
4. E. Odell et H. P. Rosenthal, *A double-dual characterization of separable Banach spaces containing* l^1, Israël J. Math. *20* (1975), 375–384.
5. H. P. Rosenthal, *Characterization of Banach spaces containing* l^1, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *71* (1974), 2411–2413.
6. ——— *Pointwise compact subsets of the first Baire-class, with some applications to the Banach space theory*, Aarhus Universitet, Mathematisk Institut, Various publications, series n°. *24* (1975), 176–187.
7. V. V. Sazonov, *On perfect measures*, Amer. Math. Soc. Transl., (2), *48* (1965), 229–254.
8. M. Talagrand, *Extensions aux filtres de la mesure de Lebesgue*, C. R. Acad. Sci. Paris *283* (1976), 95–98.

Université Claude Bernard,
43, bd. du 11 Novembre 1918,
69621 Villeurbanne, France