SUR LES REPRESENTATIONS UNITAIRES DES GROUPES DE LIE NILPOTENTS. IV

JACQUES DIXMIER

Soit n un entier $\geqslant 1$. On notera M_n l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à éléments réels, et G_n le groupe des $x = (\xi_{jk}) \in M_n$ tels que $\xi_{jk} = 0$ pour $1 \leqslant j < k \leqslant n$, $\xi_{jj} = 1$ pour $1 \leqslant j \leqslant n$. Le groupe G_n est un groupe de Lie nilpotent simplement connexe, dont l'algèbre de Lie s'identifie à l'ensemble $\mathfrak{g}_n$ des $x = (\xi_{jk}) \in M_n$ tels que $\xi_{jk} = 0$ pour $1 \leqslant j \leqslant k \leqslant n$. Nous allons déterminer:

(1°) le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_n$;

(2°) la série "principale" de représentations unitaires irréductibles de G_n; (la recherche de *toutes* les représentations unitaires irréductibles de G_n ne semble pas facile);

(3°) la formule de Plancherel pour G_n;

(4°) les caractères globaux (au sens de (**5**)) des représentations de la série principale.

Pour n impair, l'étude est un peu plus compliquée que pour n pair. On exposera les démonstrations en détail pour n pair. Pour n impair, on insistera seulement sur les différences de calcul.

On emploiera les notations suivantes. La matrice $(\xi_{jk}) \in M_n$ telle que $\xi_{rs} = 1$ et $\xi_{jk} = 0$ pour $j \neq r$ ou $k \neq s$ sera notée e_{rs}. L'ensemble des matrices $(\xi_{jk}) \in M_n$ telles que $\xi_{jk} = 0$ pour $j + k \neq n + 1$ sera noté E_n. Pour toute matrice $x = (\xi_{jk}) \in M_n$, on posera:

$$\Delta_1(x) = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \ldots \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \ldots \xi_{2n} \\ \ldots & \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} \ldots \xi_{nn} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2(x) = \begin{vmatrix} \xi_{12} & \xi_{13} & \ldots \xi_{1n} \\ \xi_{22} & \xi_{23} & \ldots \xi_{2n} \\ \ldots & & \\ \xi_{n-1,2} & \xi_{n-1,3} & \ldots \xi_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_{n-1}(x) = \begin{vmatrix} \xi_{1,n-1} & \xi_{1n} \\ \xi_{2,n-1} & \xi_{2n} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n(x) = \xi_{1n}$$

$$\Delta_{n+1}(x) = 1.$$

Reçu le 15 août, 1958.

L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sera notée $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. L'algèbre symétrique d'un espace vectoriel V sera notée $\mathfrak{S}(V)$. Sur le groupe G_n, la mesure définie par la forme différentielle $\Pi_{1\leqslant k<j\leqslant n}d\xi_{jk}$, qui est une mesure de Haar, sera appelée mesure de Haar canonique, et sera la seule utilisée. De même, sur le groupe additif des matrices (η_{jk}) à n lignes et n' colonnes, la seule mesure utilisée sera la mesure $\Pi_{1\leqslant j\leqslant n, 1\leqslant k\leqslant n'}d\eta_{jk}$.

Les lemmes 1 et 3 se trouvent dans (**3**, pp. 8-10 et 12-14). Toutefois, comme la situation est ici légèrement différente à certains égards, on a explicité les calculs pour la commodité du lecteur.

1. Cas où n est pair. Centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_n)$. Nous poserons $n = 2m$. Tout $x \in G_n$ se met sous la forme

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 \\ w & z \end{pmatrix}$$

où $y \in G_m$, $z \in G_m$, $w \in M_m$. Si

$$x' = \begin{pmatrix} y' & 0 \\ w' & z' \end{pmatrix}$$

on a

$$xx' = \begin{pmatrix} yy' & 0 \\ wy' + zw' & zz' \end{pmatrix}$$

d'où facilement

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 \\ -z^{-1}wy^{-1} & z^{-1} \end{pmatrix} \qquad xx'x^{-1} = \begin{pmatrix} yy'y^{-1} & 0 \\ t & zz'z^{-1} \end{pmatrix}$$

avec $t = (wy' + zw' - zz'z^{-1}w)y^{-1}$. On voit que l'ensemble A_{2m} des $x \in G_{2m}$ tels que $y = z = 1$ est un sous-groupe distingué abélien de G_{2m}. L'idéal abélien $\mathfrak{a}_{2m}$ de $\mathfrak{g}_{2m}$ correspondant à A_{2m} est l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix},$$

où $w \in M_m$.

LEMME 1. *Soit N_m l'ensemble des $w \in M_m$ tels que $\Delta_2(w)\Delta_3(w)\ldots\Delta_m(w) \neq 0$. Si $w \in N_m$, il existe des éléments $y \in G_m$, $z \in G_m$, $e \in E_m$ uniques tels que $w = zey$. Si $e = (\epsilon_{jk})$, on a*

$$\epsilon_{m-j+1,j} = (-1)^{m-j}\frac{\Delta_j(w)}{\Delta_{j+1}(w)}. \tag{1}$$

Démonstration. Posant $z^{-1} = z'$, il revient au même de prouver qu'il existe des éléments $y \in G_m$, $z' \in G_m$, $e \in E_m$ uniques tels que $z'w = ey$. Soient $w = (\omega_{jk})$, $y = (\eta_{jk})$, $z' = (\zeta_{jk})$, $e = (\epsilon_{jk})$. On doit avoir:

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

$$(2) \qquad \sum_{r=1}^{m} \zeta_{jr}\,\omega_{rk} = 0 \qquad (j+k > m+1)$$

$$(3) \qquad \sum_{r=1}^{m} \zeta_{jr}\,\omega_{r,m-j+1} = \epsilon_{j,m-j+1}$$

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{m} \zeta_{jr}\,\omega_{rk} = \epsilon_{j,m-j+1}\,\eta_{m-j+1,k} \qquad (j+k < m+1).$$

Pour j fixé, les équations (2), qui s'écrivent

$$\sum_{r=1}^{j-1} \zeta_{jr}\,\omega_{rk} = -\,\omega_{jk} \qquad (k = m-j+2, m-j+3, \ldots, m)$$

forment un système de $j-1$ équations à $j-1$ inconnues, dont le déterminant est $\Delta_{m-j+2}(w)$. Ce déterminant est non nul puisque $\omega \in N_m$. D'où l'existence et l'unicité des ζ_{jk} satisfaisant à (2). Les équations (3) donnent alors les $\epsilon_{j,m-j+1}$. D'ailleurs, en éliminant $\zeta_{j1}, \ldots, \zeta_{j,j-1}$ entre les j équations (2)-(3) qui contiennent ces inconnues,il vient

$$\begin{vmatrix} \omega_{1,m-j+1} & \omega_{1,m-j+2} \ldots \omega_{1,m} \\ \omega_{2,m-j+1} & \omega_{2,m-j+2} \ldots \omega_{2,m} \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \\ \omega_{j,m-j+1} - \epsilon_{j,m-j+1} & \omega_{j,m-j+2} \ldots \omega_{j,m} \end{vmatrix} = 0.$$

D'où les formules (1).

Comme $w \in N_m$, on voit que $\epsilon_{1m} \neq 0$, $\epsilon_{2,m-1} \neq 0, \ldots, \epsilon_{m-1,2} \neq 0$. Les formules (4) prouvent alors l'existence et l'unicité des η_{jk}.

LEMME 2. *Soit $w = (\omega_{jk}) \to f(w)$ une fonction polynôme sur M_m. Pour qu'on ait $f(z\,w\,y) = f(w)$ quels que soient $w \in M_m$, $y \in G_m$, $z \in G_m$, il faut et il suffit que f soit dans l'algèbre engendrée par les fonctions $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_m$.*

Démonstration. Posant $w = (\omega_{jk})$, $y = (\eta_{jk})$, $z = (\zeta_{jk})$, $z\,w\,y = (\omega_{jk}')$, on a

$$\omega'_{jk} = \sum_{1 \leqslant r \leqslant m,\, 1 \leqslant s \leqslant m} \zeta_{jr}\,\omega_{rs}\,\eta_{sk} = \sum_{1 \leqslant r \leqslant j,\, k \leqslant s \leqslant m} \zeta_{jr}\,\omega_{rs}\,\eta_{sk}.$$

Donc

$$(\omega'_{jk})_{1 \leqslant j \leqslant t,\, m-t+1 \leqslant k \leqslant m} = (\zeta_{jk})_{1 \leqslant j \leqslant t,\, 1 \leqslant k \leqslant t}\,(\omega_{jk})_{1 \leqslant j \leqslant t,\, m-t+1 \leqslant k \leqslant m}\,(\eta_{jk})_{m-t+1 \leqslant j \leqslant m,\, m-t+1 \leqslant k \leqslant m}$$

et par suite

$$\det(\omega'_{jk})_{1 \leqslant j \leqslant t,\, m-t+1 \leqslant k \leqslant m} = \det(\omega_{jk})_{1 \leqslant j \leqslant t,\, m-t+1 \leqslant k \leqslant m}.$$

Ceci prouve que la condition de l'énoncé est suffisante.

Maintenant, soit $w = (\omega_{jk}) \to f(w) = f((\omega_{jk}))$ un polynôme tel que $f(z\,w\,y) = f(w)$ quels que soient $w \in M_m$, $y \in G_m$, $z \in G_m$. Si on remplace les ω_{jk} tels que $j + k \neq m+1$ par 0 dans $f((\omega_{jk}))$, on obtient un polynôme par rapport à $\omega_{m1}, \omega_{m-1,2}, \ldots, \omega_{1m}$, que nous noterons $g(\omega_{m1}, \ldots, \omega_{1m})$. Conservons la notation N_m du Lemme 1. Si $w \in N_m$, il existe $y \in G_m$, $z \in G_m$, $e = (\epsilon_{jk}) \in E_m$ tels que $w = z\,e\,y$. On a $f(w) = f(e) = g(\epsilon_{m1}, \ldots, \epsilon_{1m})$. D'après les formules (1),

$$f((\omega_{jk})) = g\left((-1)^{m+1}\frac{\Delta_1(w)}{\Delta_2(w)}, \ldots, -\frac{\Delta_{m-1}(w)}{\Delta_m(w)}, \Delta_m(w)\right). \tag{5}$$

Considérons maintenant les matrices w de la forme

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots & \omega_{1,m-1} & \omega_{1m} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Quand on restreint f à l'ensemble de ces matrices, on obtient un polynôme $h(\omega_{11}, \ldots, \omega_{1m})$ et la formule (5) devient

$$h(\omega_{11}, \ldots, \omega_{1m}) = g\left(\pm\frac{\omega_{11}}{\omega_{12}}, \ldots, \frac{\omega_{1,m-1}}{\omega_{1,m}}, \omega_{1m}\right) \tag{6}$$

valable pour $\omega_{12} \neq 0$, $\omega_{13} \neq 0, \ldots, \omega_{1m} \neq 0$. Les égalités (5) et (6) entraînent

$$f((\omega_{jk})) = h(\pm\Delta_1(w), \ldots, -\Delta_{m-1}(w), \Delta_m(w)),$$

égalité valable pour $w \in N_m$ et par suite pour toute $w \in M_m$ d'après le principe d'inconséquence des inégalités algébriques. D'où le lemme.

THÉORÈME 1. *Le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{2m})$ est engendré par les éléments algébriquement indépendants*

$$e_{2m,1}, \quad \begin{vmatrix} e_{2m-1,1} & e_{2m-1,2} \\ e_{2m,1} & e_{2m,2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} e_{m+1,1} & \ldots & e_{m+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{2m,1} & \ldots & e_{2m,m} \end{vmatrix}^{*}.$$

Démonstration. Nous allons d'abord chercher les éléments de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{2m})$ invariants pour la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_{2m}$. Un élément de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{2m})$ est de la forme $f((e_{jk})_{j>k})$, où f est un polynôme en $\frac{1}{2}n(n-1)$ variables à coefficients réels. Les seuls crochets non nuls des e_{jk} entre eux sont donnés par les formules

$$[e_{jk}, e_{kl}] = e_{jl} = -[e_{kl}, e_{jk}] \qquad (j > k > l).$$

La condition que $f((e_{jk}))$ soit invariant pour la représentation adjointe se traduit par les égalités

*Les e_{jk} qui figurent dans ces déterminants appartiennent à $\mathfrak{a}_{2m}$, donc sont deux à deux permutables; ainsi, il n'y a pas d'ambiguïté sur la signification de ces déterminants.

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

$$\sum_{j>k} [e_{rs}, e_{jk}] f'_{e_{jk}} = 0 \qquad (r > s)$$

c'est-à-dire

$$(7) \qquad \sum_{k<s} e_{rk} f'_{e_{sk}} - \sum_{j>r} e_{js} f'_{e_{jr}} = 0 \qquad (r > s).$$

Cette égalité se réduit à $0 = 0$ pour $r = n$ et $s = 1$. Pour $r = n - 1$, $s = 1$, elle donne

$$e_{n1} f'_{e_{n,n-1}} = 0,$$

de sorte que f est indépendant de $e_{n,n-1}$. Pour $r = n$, $s = 2$, elle donne

$$e_{n1} f'_{e_{21}} = 0,$$

de sorte que f est indépendant de e_{21}. Soit p un entier $< m$, et supposons démontré que f est indépendant des e_{jk} pour $j \leqslant p$ d'une part, pour $k \geqslant n - p + 1$ d'autre part. Ecrivons la condition (7) pour $r = n - p$, $s = 1, 2, \ldots, p$ (ce qui est possible car $p < n - p$). Nous obtenons

$$\sum_{j>n-p} e_{j1} f'_{e_{j,n-p}} = 0$$

$$\sum_{j>n-p} e_{j2} f'_{e_{j,n-p}} = e_{n-p,1} f'_{e_{21}}$$

$$\ldots$$

$$\sum_{j>n-p} e_{jp} f'_{e_{j,n-p}} = e_{n-p,1} f'_{e_{p1}} + e_{n-p,2} f'_{e_{p2}} + \ldots + e_{n-p,p-1} f'_{e_{p,p-1}}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, les deuxièmes membres sont nuls. Ces égalités entraînent alors que

$$f'_{e_{j,n-p}} = 0$$

pour $j > n - p$, c'est-à-dire que f est indépendant des e_{jk} pour $k = n - p$. Ecrivant maintenant la condition (7) pour $s = p + 1$, $r = n - p + 1$, $n - p + 2, \ldots, n$ (ce qui est possible car $n - p + 1 > p + 1$), on trouve de même que f est indépendant des e_{jk} pour $j = p + 1$.

Ainsi, f est indépendant des e_{jk} pour $j \leqslant m$ d'une part, pour $k \geqslant m + 1$ d'autre part, de sorte que $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{a}_{2m})$. Cherchons donc les éléments de $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_{2m})$ invariants pour la représentation adjointe de $\mathfrak{g}_{2m}$, ou, ce qui revient au même, pour la représentation adjointe ρ de G_{2m}. Identifions $\mathfrak{a}_{2m}$ à M_m par l'application

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \rightarrow w.$$

Alors, si

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 \\ w' & z \end{pmatrix} \in G_{2m},$$

on a

$$\rho(x) \,.\, w = \rho(x) \,.\, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ w' & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ w' & z \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z\,w\,y^{-1} & 0 \end{pmatrix} = z\,w\,y^{-1}.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

Notons $A_{y,z}$ l'automorphisme de l'algèbre $\mathfrak{S}(M_m)$ qui prolonge l'automorphisme $w \to z\,w\,y^{-1}$ de l'espace vectoriel M_m. Il s'agit donc de trouver les éléments de $\mathfrak{S}(M_m)$ qui sont invariants pour les automorphismes $A_{y,z}$.

Grâce a la forme bilinéaire $(w, w') \to \mathrm{tr}(w\,w')$ sur M_m nous identifierons l'espace vectoriel M_m à son dual. Dans cette identification, e_{jk} s'identifie à la forme linéaire $(\omega_{jk}) \to \omega_{kj}$ sur M_m. Alors, $\mathfrak{S}(M_m)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions polynômes sur M_m: à l'élément

$$e_{j_1k_1} \ldots e_{j_pk_p}$$

de $\mathfrak{S}(M_m)$ correspond la fonction polynôme

$$(\omega_{jk}) \longrightarrow \omega_{k_1j_1} \ldots \omega_{k_pj_p}.$$

Pour $y \in G_m$, $z \in G_m$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(w(A_{y,z}w')) &= \mathrm{tr}(w\,z\,w'\,y^{-1}) = \mathrm{tr}(y^{-1}\,w\,z\,w') \\ &= \mathrm{tr}((A_{z^{-1},y^{-1}}\,w)w').\end{aligned}$$

Donc le transposé de $A_{y,z}$ s'identifie à $A_{z^{-1},y^{-1}}$. Alors, d'après les propriétés élémentaires des algèbres symétriques, pour qu'un élément de $\mathfrak{S}(M_m)$ soit invariant par les $A_{y,z}$, il faut et il suffit que la fonction polynôme correspondante soit invariante par les $A_{y,z}$, c'est-à-dire par l'application $w \to z\,w\,y^{-1}$ de M_m sur M_m. Donc (Lemme 2) les éléments de $\mathfrak{S}(M_m)$ invariants pour les $A_{y,z}$ constituent l'algèbre engendrée par les éléments

$$e_{m,1}, \quad \begin{vmatrix} e_{m-1,1} & e_{m-1,2} \\ e_{m,1} & e_{m,2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} e_{11} & \ldots & e_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{m1} & \ldots & e_{mm} \end{vmatrix}.$$

Compte tenu de l'identification adoptée de $\mathfrak{a}_{2m}$ à M_m, on voit que les éléments de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{2m})$ invariants pour la représentation adjointe constituent l'algèbre engendrée par les éléments

$$e_{2m,1}, \quad \begin{vmatrix} e_{2m-1,1} & e_{2m-1,2} \\ e_{2m,1} & e_{2m,2} \end{vmatrix}, \ldots, \begin{vmatrix} e_{m+1,1} & \ldots & e_{m+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{2m,1} & \ldots & e_{2m,m} \end{vmatrix}.$$

Enfin, le centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{2m})$ est l'image, par l'application canonique ϕ de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{2m})$ sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{2m})$, de l'algèbre précédente. Comme $\mathfrak{a}_{2m}$ est abélien, la restriction de ϕ à $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_{2m})$ est un isomorphisme de $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_{2m})$ sur $\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_{2m}) \subset \mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{2m})$. D'où le théorème.

2. Cas où n est pair. Formule de Plancherel. Nous conservons les notations précédentes. Tout élément $e \in E_m$ définit la forme linéaire $w \to \mathrm{tr}(e\,w)$ sur M_m, donc la forme linéaire

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \to \mathrm{tr}(e\,w)$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

sur $\mathfrak{a}_{2m}$. D'autre part, l'application exponentielle de $\mathfrak{a}_{2m}$ sur A_{2m}, c'est-à-dire l'application

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme du groupe additif $\mathfrak{a}_{2m}$ sur le groupe abélien A_{2m}, de sorte que l'application

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \to \exp i \operatorname{tr}(e\,w) = \exp i \sum_{j=1}^{m} \epsilon_{j,m-j+1}\, \omega_{m-j+1,j}$$

(où $e = (\epsilon_{jk})$ et $w = (\omega_{jk})$) est un caractère ξ_e de A_{2m}. Nous noterons U_e la représentation unitaire de G_{2m} induite par ξ_e.

Tout élément de G_{2m} se met de manière unique sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ wy & z \end{pmatrix}$$

avec $y \in G_m$, $z \in G_m$, $w \in M_m$. Ainsi, G_{2m} est produit semi-direct de A_{2m} et d'un groupe canoniquement isomorphe à $G_m \times G_m$. En outre

$$\begin{pmatrix} y' & 0 \\ 0 & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ w & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'y & 0 \\ z'w & z'z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z'wy^{-1}y'^{-1} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'y & 0 \\ 0 & z'z \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Par suite, l'espace hilbertien où opère U_e s'identifie canoniquement à $L_C{}^2(G_m \times G_m)$, $G_m \times G_m$ étant muni de sa mesure de Haar canonique et C désignant le corps complexe; et, si $(y', z') \to f(y', z')$ est un élément de $L_C{}^2(G_m \times G_m)$, la formule (8) prouve que, pour

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 \\ w & z \end{pmatrix} \in G_{2m}$$

on a

$$(U_e(x)f)(y', z') = f(y'\,y, z'\,z)\, \xi_e\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z'\,w\,y^{-1}\,y'^{-1} & 1 \end{pmatrix}\right)$$

ou encore

$$(U_e(x)f)(y', z') = f(y'\,y, z'\,z) \exp i \operatorname{tr}(e\,z'\,w\,y^{-1}\,y'^{-1}). \tag{9}$$

La formule (9) définit explicitement la représentation U_e.

Théorème 2. *Pour* $e = (\epsilon_{jk}) \in E_m$, *posons* $\epsilon_1 = \epsilon_{m,1}$, $\epsilon_2 = \epsilon_{m-1,2}, \ldots, \epsilon_m = \epsilon_{1,m}$.

(i) *La représentation* U_e *admet le caractère infinitésimal* χ_e (*au sens de* **(2)**) *défini par*

$$\chi_e(e_{2m,1}) = i\,\epsilon_m, \quad \chi_e\left(\begin{vmatrix} e_{2m-1,1} & e_{2m-1,2} \\ e_{2m,1} & e_{2m,2} \end{vmatrix}\right) = i^2\,\epsilon_{m-1}\,\epsilon_m, \ldots,$$

$$\chi_e\left(\begin{vmatrix} e_{m+1,1} & \ldots & e_{m+1,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{2m,1} & \ldots & e_{2m,m} \end{vmatrix}\right) = i^m\,\epsilon_1\,\epsilon_2 \ldots \epsilon_m.$$

(ii) *Si on se limite aux* $e \in E_m$ *tels que* $\epsilon_2, \epsilon_3, \ldots, \epsilon_m \neq 0$, *les représentations* U_e *sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes.*

(iii) *Si* F *est une fonction intégrable sur* G_{2m}, *on a*

$$\int_{G_{2m}} |F(x)|^2 dx = (2\pi)^{-m^2} \int \ldots \int \operatorname{tr}(U_e(F)^* U_e(F)) \epsilon_2^2 \epsilon_3^4 \ldots \epsilon_m^{2(m-1)} d\epsilon_1 d\epsilon_2 \ldots d\epsilon_m.$$

Démonstration. Si

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ w & 1 \end{pmatrix} \in A_{2m},$$

la formule (9) devient

$$(U_e(x)f)(y', z') = f(y', z') \exp i \operatorname{tr}(e\, z'\, w\, y'^{-1}).$$

Donc l'opérateur différentiel correspondant à l'élément

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ w & 0 \end{pmatrix}$$

de $\mathfrak{a}_{2m}$ est l'opérateur de multiplication par la fonction

$$(y', z') \to i \operatorname{tr}(e\, z'\, w\, y'^{-1}) = i \operatorname{tr}((y'^{-1}\, e\, z')w).$$

Pour y' et z' fixés, la valeur de cette fonction divisée par i est la forme linéaire sur $\mathfrak{a}_{2m}$ définie par $y'^{-1}\, e\, z'$. Cette forme linéaire se prolonge en un homomorphisme ψ de $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_{2m}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_{2m})$ dans le corps complexe. La valeur de ψ pour un élément invariant de $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_{2m})$ est indépendante de y' et z'. Ainsi, l'opérateur différentiel correspondant à un élément du centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{2m})$ est un opérateur scalaire. Donc la représentation U_e admet un caractère infinitésimal χ_e, et on a

$$\chi_e\left(\begin{vmatrix} e_{2m-j+1,1} & \ldots & e_{2m-j+1,j} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{2m,1} & \ldots & e_{2m,j} \end{vmatrix}\right) = \begin{vmatrix} i \operatorname{tr}(e\, e_{m-j+1,1}) & \ldots & i \operatorname{tr}(e\, e_{m-j+1,j}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ i \operatorname{tr}(e\, e_{m,1}) & \ldots & i \operatorname{tr}(e\, e_{m,j}) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & i\epsilon_{j,m-j+1} \\ 0 & 0 & \ldots & i\epsilon_{j-1,m-j+2} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ i\epsilon_{1,m} & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{vmatrix} = i^j \epsilon_{m-j+1}\, \epsilon_{m-j+2} \ldots \epsilon_m.$$

Ceci prouve (i).

Soit

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 \\ w & z \end{pmatrix} \in G_{2m};$$

alors l'automorphisme intérieur de G_{2m} correspondant à x définit un automorphisme de A_{2m} donc de son dual. Nous allons montrer que, si $\epsilon_2, \epsilon_3, \ldots, \epsilon_m \neq 0$, x ne peut laisser fixe ξ_e que si $x \in A_{2m}$. Il en résultera ((**7**); cf. aussi (**1**)) que U_e est irréductible. Or, dire que x laisse fixe ξ_e signifie que x laisse fixe la forme linéaire $w' \to \operatorname{tr}(e\,w')$ sur M_m. Comme $\rho(x)\,.\,w' = z\,w'\,y^{-1}$, cela signifie encore que $\operatorname{tr}(e\,w') = \operatorname{tr}(e\,z\,w'\,y^{-1}) = \operatorname{tr}(y^{-1}\,e\,z\,w')$ quel que soit $w' \in M_m$, donc que $e = y^{-1}\,e\,z$, donc que $y = z = 1$ (Lemme 1). Ceci établit notre assertion.

Soit $e' = (\epsilon'_{jk}) \in E_m$, avec $\epsilon_2'\,\epsilon_3' \ldots \epsilon_m' \neq 0$ (où $\epsilon'_j = \epsilon'_{m-j+1,j}$). Si $e \neq e'$, (i) prouve que $\chi_e \neq \chi_{e'}$, donc que les représentations U_e, $U_{e'}$ sont inéquivalentes. Ainsi, (ii) est démontré.

Soit

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 \\ w & z \end{pmatrix} \to F(x) = F_1(y, z, w)$$

une fonction intégrable sur G_{2m}. Pour $f, f' \in L_C^2\,(G_m \times G_m)$, on a

$$(U_e(F)f|f') = \int_{G_{2m}} (U_e(x)f|f')\,F(x)\,dx$$
$$= \int_{G_{2m}} F(x)\,dx \iint_{G_m \times G_m} f(y'y, z'\,z)\,\overline{f'(y', z')}\,\exp i\,\operatorname{tr}(e\,z'w\,y^{-1}y'^{-1})\,dy'\,dz'.$$

La fonction

$$(x, y', z') \to F(x)\,f(y'\,y, z'\,z)\,\overline{f'(y', z')}\,\exp i\,\operatorname{tr}(e\,z'\,w\,y^{-1}\,y'^{-1})$$

sur $G_{2m} \times G_m \times G_m$ est mesurable pour $dx\,dy'\,dz'$, et

$$\iiint^* |F(x)\,f(y'\,y, z'\,z)\,\overline{f(y', z')}\,\exp i\,\operatorname{tr}(e\,z'\,w\,y^{-1}\,y'^{-1})|\,dx\,dy'\,dz'$$
$$= \int^* |F(x)|\,dx \iint^* |f(y'\,y, z'\,z)|\,|f'(y', z')|\,dy'\,dz' < +\infty.$$

On peut donc appliquer le théorème de Lebesgue-Fubini qui donne

$$(10)\quad (U_e(F)f|f') = \iiiint\!\!\int F_1(y, z, w)f(y'y, z'z)\overline{f'(y', z')}\,\exp i\,\operatorname{tr}(ez'wy^{-1}y'^{-1})\,dydzdwdy'dz'$$
$$= \iiiint\!\!\int F_1(y'^{-1}y, z'^{-1}z, w)f(y, z)\overline{f\,(y', z')}\,\exp i\,\operatorname{tr}(ez'wy^{-1})\,dydzdwdy'dz'$$
$$= \iiiint f(y, z)\overline{f'(y', z')}\,[\textstyle\int F_1(y'^{-1}y, z'^{-1}z, w)\,\exp i\,\operatorname{tr}(y^{-1}ez'\,w)\,dw]dydzdy'dz'.$$

Donc (**(2)**, Lemme 35)

$$\operatorname{tr}(U_e(F)^*U_e(F)) = \iiiint |\textstyle\int F_1(y'^{-1}y, z'^{-1}z, w)\,\exp i\,\operatorname{tr}(y^{-1}ez'w)dw|^2\,dy\,dz\,dy'\,dz'.$$

Comme on a identifié canoniquement l'espace vectoriel M_m à son dual, la transformée de Fourier de $(y, z, w) \to F_1(y, z, w)$ par rapport à la variable w est encore une fonction $(y, z, w) \to \tilde{F}(y, z, w)$ sur $G_m \times G_m \times M_m$, et on a

$$(11)\qquad \operatorname{tr}(U_e(F)^*\,U_e(F)) = \iiiint |\tilde{F}(y'^{-1}\,y, z'^{-1}\,z, y^{-1}\,e\,z')|^2\,dy\,dz\,dy'\,dz'$$
$$= \iiiint |\tilde{F}(y, z, y^{-1}\,y'^{-1}\,e\,z')|^2\,dy\,dz\,dy'\,dz'$$
$$= \iiiint |\tilde{F}(y, z, y'\,e\,z')|^2\,dy\,dz\,dy'\,dz'$$

Pour achever la démonstration, nous aurons besoin d'un lemme. Adoptons la notation N_m du Lemme 1. Soit $F_m = E_m \cap N_m$, c'est-à-dire l'ensemble des $e = (\epsilon_{jk}) \in M_m$ tels que $\epsilon_{jk} = 0$ pour $j + k \neq m + 1$, $\epsilon_{1m}\, \epsilon_{2,m-1} \ldots \epsilon_{m-1,2} \neq 0$. Posons $\epsilon_{m,1} = \epsilon_1, \ldots, \epsilon_{1,m} = \epsilon_m$. Tout $w \in N_m$ s'écrit de manière unique sous la forme $w = z\, e\, y$, avec $y \in G_m$, $z \in G_m$, $e \in F_m$ (Lemme 1), d'où une bijection ϕ de N_m sur $G_m \times G_m \times F_m$. Alors :

Lemme 3. *La bijection ϕ transforme la mesure dw sur N_m en la mesure $dy\, dz\, de$, où*

$$de = \epsilon_2^2 \epsilon_3^4 \ldots \epsilon_m^{2(m-1)}\, d\epsilon_1\, d\epsilon_2 \ldots d\epsilon_m$$

Démonstration. Posons $w = (\omega_{jk})$, $y = (\eta_{jk})$, $e = (\epsilon_{jk})$, $z = (\zeta_{jk})$. Si $w = z\, e\, y$ on a

$$\omega_{jk} = \sum_{r=1}^{m} \sum_{s=1}^{m} \zeta_{jr}\, \epsilon_{rs}\, \eta_{sk} = \sum_{r=1}^{m} \zeta_{jr}\, \epsilon_{r,m-r+1}\, \eta_{m-r+1,k}$$
$$= \sum_{r \leqslant \operatorname{Inf}(j,m-k+1)} \zeta_{jr}\, \epsilon_{m-r+1}\, \eta_{m-r+1,k}.$$

D'où

$$d\omega_{jk} = \sum_{1 \leqslant r \leqslant \operatorname{Inf}(j,m-k+1)} (\epsilon_{m-r+1}\, \eta_{m-r+1,k}\, d\zeta_{jr} + \zeta_{jr}\, \eta_{m-r+1,k}\, d\epsilon_{m-r+1} + \zeta_{jr}\, \epsilon_{m-r+1}\, d\eta_{m-r+1,k}).$$

On a en particulier $d\omega_{1m} = d\epsilon_m$. Supposons démontré que

$$(12) \qquad \prod_{j \leqslant p,\, k \geqslant m-p+1} d\omega_{jk} = \pm\, \epsilon_{m-p+2}^{2}\, \epsilon_{m-p+3}^{4} \ldots \epsilon_m^{2(p-1)} \Big(\prod_{1 \leqslant k < j \leqslant p} d\zeta_{jk}\Big)\Big(\prod_{m-p+1 \leqslant j \leqslant m} d\epsilon_j\Big) \Big(\prod_{m-p+1 \leqslant k \leqslant j \leqslant m} d\eta_{jk}\Big).$$

On a alors

$$\Big(\prod_{j \leqslant p,\, k \geqslant m-p+1} d\omega_{jk}\Big)\, d\omega_{1,m-p}$$
$$= \pm\, \epsilon_{m-p+2}^{2}\, \epsilon_{m-p+3}^{4} \ldots \epsilon_m^{2(p-1)} \Big(\prod_{1 \leqslant k < j \leqslant p} d\zeta_{jk}\Big)\Big(\prod_{m-p+1 \leqslant j \leqslant m} d\epsilon_j\Big)\Big(\prod_{m-p+1 \leqslant k < j \leqslant m} d\eta_{jk}\Big) (\eta_{m,m-p}\, d\epsilon_m + \epsilon_m\, d\eta_{m,m-p})$$
$$= \pm\, \epsilon_{m-p+2}^{2}\, \epsilon_{m-p+3}^{4} \ldots \epsilon_m^{2(p-1)} \Big(\prod_{1 \leqslant k < j \leqslant p} d\zeta_{jk}\Big)\Big(\prod_{m-p+1 \leqslant j \leqslant m} d\epsilon_j\Big)\Big(\prod_{m-p+1 \leqslant k < j \leqslant m} d\eta_{jk}\Big) \epsilon_m d\eta_{m\ m-p}.$$

Supposons démontré, pour un entier q tel que $1 \leqslant q \leqslant p$, que

$$(13) \qquad \Big(\prod_{j \leqslant p,\, k \geqslant m-p+1} d\omega_{jk}\Big)\, d\omega_{1,m-p}\, d\omega_{2,m-p} \ldots d\omega_{q-1,m-p}$$
$$= \pm\, \epsilon_{m-p+2}^{2}\, \epsilon_{m-p+3}^{4} \ldots \epsilon_m^{2(p-1)} \Big(\prod_{1 \leqslant k < j \leqslant p} d\zeta_{jk}\Big)\Big(\prod_{m-p+1 \leqslant j \leqslant m} d\epsilon_j\Big)\Big(\prod_{m-p+1 \leqslant k < j \leqslant m} d\eta_{jk}\Big) \epsilon_m\, \epsilon_{m-1} \ldots \epsilon_{m-q+2}\, d\eta_{m\ m-p}\, d\eta_{m-1,m-p} \ldots d\eta_{m-q+2,m-p}.$$

Alors

$$(14)\quad \Big(\prod_{j\leqslant p,\,k\geqslant m-p+1} d\omega_{jk}\Big)\, d\omega_{1,m-p}\, d\omega_{2,m-p}\ldots d\omega_{q,m-p}$$
$$= \pm\, \epsilon_{m-p+2}^{2}\,\epsilon_{m-p+3}^{4}\ldots\epsilon_{m}^{2(p-1)}\Big(\prod_{1\leqslant k<j\leqslant p} d\zeta_{jk}\Big)\Big(\prod_{m-p+1\leqslant j\leqslant m} d\epsilon_j\Big)\Big(\prod_{m-p+1\leqslant k<j\leqslant m} d\eta_{jk}\Big)$$
$$\epsilon_m\epsilon_{m-1}\ldots\epsilon_{m-q+2}\,d\eta_{m,m-p}\ldots d\eta_{m-q+2,m-p}(\epsilon_{m-q+1}d\eta_{m-q+1,m-p})$$

Le passage de (13) à (14) prouve, par récurrence sur q, que

$$\Big(\prod_{j\leqslant p,\,k\geqslant m-p+1} d\omega_{jk}\Big)\, d\omega_{1,m-p}\ldots d\omega_{p,m-p}$$
$$= \pm\, \epsilon_{m-p+2}^{2}\ldots\epsilon_{m}^{2(p-1)}\epsilon_{m-p+1}\ldots\epsilon_m\Big(\prod_{1\leqslant k<j\leqslant p} d\zeta_{jk}\Big)\Big(\prod_{m-p+1\leqslant j\leqslant m} d\epsilon_j\Big)\Big(\prod_{m-p\leqslant k<j\leqslant m} d\eta_{jk}\Big).$$

On passe de même de là, par récurrence, à la formule

$$\Big(\prod_{j\leqslant p,\,k\geqslant m-p+1} d\omega_{jk}\Big)d\omega_{1,m-p}\ldots d\omega_{p,m-p}d\omega_{p+1,m}\ldots d\omega_{p+1,m-p+1}$$
$$= \pm\, \epsilon_{m-p+1}^{2}\epsilon_{m-p+2}^{4}\ldots\epsilon_{m}^{2p}\Big(\prod_{1\leqslant k<j\leqslant p+1} d\zeta_{jk}\Big)\Big(\prod_{m-p+1\leqslant j\leqslant m} d\epsilon_j\Big)\Big(\prod_{m-p\leqslant k<j\leqslant m} d\eta_{jk}\Big).$$

Enfin, en multipliant par $d\omega_{p+1,m-p}$, il vient

$$(15)\quad \prod_{j\leqslant p+1,\,k\geqslant m-p} d\omega_{jk} = \pm\, \epsilon_{m-p+1}^{2}\ldots\epsilon_{m}^{2p}\Big(\prod_{1\leqslant k<j\leqslant p+1} d\zeta_{jk}\Big)\Big(\prod_{m-p\leqslant j\leqslant m} d\epsilon_j\Big)$$
$$\Big(\prod_{m-p\leqslant k<j\leqslant m} d\eta_{jk}\Big).$$

Le passage de (12) à (15) prouve, par récurrence sur p, le Lemme 3.

Ceci posé, revenons à la formule (11). Elle entraîne

$$\int_{F_m}\mathrm{tr}(U_e(F)^*\,U_e(F))\,de = \int_{G_m}\int_{G_m}\int_{G_m}\int_{G_m}\int_{F_m}|\tilde F(y,z,y'ez')|^2\,dy\,dz\,dy'\,dz'\,de$$
$$= \int_{G_m}\int_{G_m}\int_{N_m}|\tilde F(y,z,w)|^2\,dy\,dz\,dw = \int_{G_m}\int_{G_m}\int_{M_m}|\tilde F(y,z,w)|^2\,dy\,dz\,dw.$$

D'où, utilisant la formule de Plancherel sur le groupe abélien M_m,

$$\int_{E_m}\mathrm{tr}(U_e(F)^*\,U_e(F))\,de = (2\pi)^{m^2}\int_{G_m}\int_{G_m}\int_{M_m}|F_1(y,x,w)|^2\,dy\,dz\,dw$$
$$= (2\pi)^{m^2}\int_{G_{2m}}|F(x)|^2\,dx.$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 2.

3. Cas où n est pair. Caractères globaux des représentations U_e.

LEMME 4. *Soient $P_1(x_1,\ldots,x_r),\ldots,P_s(x_1,\ldots,x_r)$ des polynômes à coefficients réels. Soit φ l'application de R^r dans R^s définie par les égalités $y_1 = P_1(x_1,\ldots,x_r),\ldots,y_s = P_s(x_1,\ldots,x_r)$. On suppose qu'il existe des constantes $A>0$, $\delta>0$, telles que $\|\varphi(x)\|\geqslant A\|x\|^{\delta}$ pour $x\in R^r$, $\|x\|\geqslant 1$ (on pose $\|x\| = |x_1|+\ldots+|x_r|$, $\|y\| = |y_1|+\ldots+|y_s|$ pour $x=(x_1,\ldots,x_r)$*

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

$\in R^r$, $y = (y_1, \ldots, y_s) \in R^s$). *Alors, si $f \in \mathscr{S}(R^s)$ (avec les notations de* **(8)**), *on a $f\mathrm{o}\varphi \in \mathscr{S}(R^r)$, et l'application $f \to f\mathrm{o}\varphi$ de $\mathscr{S}(R^s)$ dans $\mathscr{S}(R^r)$ est continue.*

Démonstration. Soit f une fonction numérique quelconque sur R^s. On a, pour tout $\alpha > 0$,

$$\sup_{x \in R^r, ||x|| \geqslant 1} |(f\mathrm{o}\phi)(x)|\, ||x||^\alpha \leqslant A^{-\alpha/\delta} \sup_{x\in R^r, ||x||\geqslant 1} |f(\varphi(x))|\, ||\varphi(x)||^{\alpha/\delta}$$
$$\leqslant A^{-\alpha/\delta} \sup_{y \in R^s} |f(y)|\, ||y||^{\alpha/\delta}.$$

Supposons maintenant que $f \in \mathscr{S}(R^s)$. Alors, $f\mathrm{o}\varphi$ est indéfiniment dérivable sur R^r. Toute dérivée partielle $D(f\mathrm{o}\varphi)$ de $f\mathrm{o}\varphi$ est somme de termes de la forme $Q\,.\,((D'f)\mathrm{o}\varphi)$ où Q est un polynôme et où D' est une dérivation partielle (on le voit aussitôt par récurrence sur l'ordre de D). Il existe des constantes $B > 0$, $\epsilon > 0$ telles que $||Q(x)|| \leqslant B||x||^\epsilon$ pour $||x|| \geqslant 1$. Alors

$$\sup_{x\in R^r, ||x||\geqslant 1} |Q(x)((D'f)\mathrm{o}\phi)(x)|\, ||x||^\alpha \leqslant B \sup_{x \in R^r, ||x||\geqslant 1} |((D'f)\mathrm{o}\phi)(x)|\, ||x||^{\alpha+\epsilon}$$
$$\leqslant BA^{-\alpha/\delta} \sup_{y\in R^s} |(D'f)(y)|\, ||y||^{(\alpha+\epsilon)/\delta}$$

D'autre part,

$$\sup_{x\in R^r, ||x||\leqslant 1} |Q(x)((D'f)\mathrm{o}\varphi)(x)|\, ||x||^\alpha \leqslant (\sup_{x\in R^r, ||x||\leqslant 1} |Q(x)|)$$
$$\sup_{y \in R^s} |(D'f)(y)|.$$

Ceci prouve le lemme, en utilisant la définition de la topologie de $\mathscr{S}(R^r)$ et $\mathscr{S}(R^s)$ par semi-normes.

Soit maintenant $x = (\xi_{jk}) \to F(x) = F((\xi_{jk}))$ une fonction sur G_n. (Rappelons que $\xi_{jk} = 0$ pour $j < k$ et que $\xi_{jj} = 1$ si $x \in G_n$). Dire que F est indéfiniment dérivable sur G_n revient à dire que F est une fonction indéfiniment dérivable des ξ_{jk} $(j > k)$. Si de plus F est une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide des ξ_{jk} $(j > k)$, on dira que F est indéfiniment dérivable à décroissance rapide sur G_n. Il revient au même de dire que F, transportée sur $\mathfrak{g}_n$ grâce à l'application exponentielle (qui est un isomorphisme de la variété différentiable $\mathfrak{g}_n$ sur la variété différentiable G_n), devient une fonction indéfiniment dérivable á décroissance rapide au sens usuel sur l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_n$.

THÉORÈME 3. *Soit $e = (\epsilon_{jk}) \in E_m$; posons $\epsilon_1 = \epsilon_{m,1}, \ldots, \epsilon_m = \epsilon_{1,m}$; supposons $\epsilon_2\, \epsilon_3 \ldots \epsilon_m \neq 0$.*

(i) *Soit*

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 \\ w & z \end{pmatrix} \to F(x) = F_1(y, z, w)$$

une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide sur G_{2m}. Alors, l'opérateur $U_e(F)$ est un opérateur à trace.

(ii) *Il existe une distribution tempérée T_e sur M_m telle que*

$$\mathrm{tr}(U_e(F)) = \int F_1(1, 1, w)dT_e(w).$$

(iii) *Sur l'ensemble N_m des $w \in M_m$ tels que $\Delta_2(w)\Delta_3(w) \ldots \Delta_m(w) \neq 0$, T_e coïncide avec la fonction*

$$w \longrightarrow (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m-1)}|\epsilon_2^{-1}\epsilon_3^{-2}\ldots\epsilon_m^{-m+1}| \frac{\exp i\left[\epsilon_1\Delta_m(w) - \epsilon_2\dfrac{\Delta_{m-1}(w)}{\Delta_m(w)} + \epsilon_3\dfrac{\Delta_{m-2}(w)}{\Delta_{m-1}(w)} - \ldots + (-1)^{m+1}\epsilon_m\dfrac{\Delta_1(w)}{\Delta_2(w)}\right]}{|\Delta_2(w)\Delta_3(w)\ldots\Delta_m(w)|}.$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du Théorème 2, introduisons la fonction $(y, z, w) \to \tilde{F}(y, z, w)$ sur $G_m \times G_m \times M_m$, transformée de Fourier de la fonction $(y, z, w) \to F_1(y, z, w)$ par rapport à la variable w. La formule (10) prouve que $U_e(F)$ est défini par un noyau $(y, z, y', z') \to K(y, z, y', z')$ sur $(G_m \times G_m) \times (G_m \times G_m)$, ce noyau étant donné par la formule

$$K(y, z, y', z') = \tilde{F}(y'^{-1}y, z'^{-1}z, y^{-1}ez').$$

Nous allons montrer qu'il existe des constantes $A > 0$ et $\delta > 0$ telles que

$$(16) \qquad ||y'^{-1}y|| + ||z'^{-1}z|| + ||y^{-1}ez'|| \geqslant A(||y|| + ||z|| + ||y'|| + ||z'||)^{\delta}$$

(où l'on pose $||y|| = \Sigma_{j>k}|\eta_{jk}|$ pour un élément $y = (\eta_{jk})$ de G_m, et $||w|| = \Sigma|\omega_{jk}|$ pour un élément $w = (\omega_{jk})$ de M_m). Il est immédiat qu'il existe des constantes $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ telles que

$$||y^{-1}|| \leqslant A_1||y||^{\delta_1}, \; ||yz|| \leqslant A_2(||y|| + ||z||)^{\delta_2}$$

quels que soient $y \in G_m$, $z \in G_m$ avec $||y|| \geqslant 1$, $||z|| \geqslant 1$. D'autre part, la démonstration du Lemme 1 prouve qu'il existe des constantes $A_3 > 0$, $\delta_3 > 0$ telles que

$$||y|| \leqslant A_3||y^{-1}ez'||^{\delta_3}$$

quels que soient $y \in G_m$, $z' \in G_m$. (Rappelons que $e \in E_m$ est fixé et que $\epsilon_2 \ldots \epsilon_m \neq 0$; on tiendra compte aussi du fait que $||y^{-1}ez'|| \geqslant |\epsilon_m| > 0$). Prenant les transposés, on en déduit l'existence de constantes $A_4 > 0$, $\delta_4 > 0$ telles que

$$||z'|| \leqslant A_4||y^{-1}ez'||^{\delta_4}$$

quels que soient $y \in G_m$, $z' \in G_m$. D'où l'existence de constantes $A_5 > 0$, $\delta_5 > 0$ telles que

$$||y'|| = ||((y'^{-1}y)y^{-1})^{-1}|| \leqslant A_5(||y'^{-1}y|| + ||y^{-1}ez'||)^{\delta_5},$$

$$||z|| = ||(z'(z'^{-1}z))|| \leqslant A_5(||z'^{-1}z|| + ||y^{-1}ez'||)^{\delta_5}$$

quels que soient $y, y', z, z' \in G_m$. On en déduit enfin l'existence de constantes $A_6 > 0$, $\delta_6 > 0$ avec

$$||y|| + ||z|| + ||y'|| + ||z'|| \leqslant A_6(||y'^{-1}y|| + ||z'^{-1}z|| + ||(y^{-1}ez'||)^{\delta_6}$$

quels que soient $y, y', z, z' \in G_m$. D'où (16).

Comme F est une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide sur $G_m \times G_m \times M_m$, le Lemme 4 prouve alors que K est une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide sur $(G_m \times G_m) \times (G_m \times G_m)$. L'opérateur

$U_e(F)$, défini par le noyau K, est donc un opérateur d'Hilbert-Schmidt. Posons $X = G_m \times G_m$, de sorte que $K \in \mathscr{S}(X \times X)$ avec les notations de **(8)**. L'application canonique de $\mathscr{S}(X)$ dans $L^2(X)$ (il s'agit de l'espace L^2 pour la mesure de Haar canonique de $G_m \times G_m$) définit une application canonique de $\mathscr{S}(X) \hat{\otimes} \mathscr{S}(X)$ dans $L^2(X) \hat{\otimes} L^2(X)$ (cf. **(6)** pour les notations utilisées ici concernant les produits tensoriels topologiques). Or, comme $\mathscr{S}(X)$ est un espace nucléaire, on a $\mathscr{S}(X) \hat{\otimes} \mathscr{S}(X) = \mathscr{S}(X \times X)$, d'où une application canonique $\lambda : \mathscr{S}(X \times X) \to L^2(X) \hat{\otimes} L^2(X)$; d'autre part $L^2(X) \hat{\otimes} L^2(X)$ s'identifie à l'ensemble des opérateurs à trace dans $L^2(X)$, et il est immédiat que $\lambda(K)$ n'est autre que l'opérateur défini par K, c'est-à-dire $U_e(F)$. D'où (i). Par ailleurs, si $K_1 \in \mathscr{S}(X \times X)$, on a

$$\operatorname{tr}(\lambda(K_1)) = \int K_1(\xi, \xi)\, d\xi;$$

c'est évident si K_1 est un noyau élémentaire de la forme $(\xi, \xi') \to \varphi(\xi)\varphi'(\xi')$, où $\varphi \in \mathscr{S}(X)$, $\varphi' \in \mathscr{S}(X)$; et le cas général se déduit de là par linéarité et continuité. Donc

$$(17) \qquad \operatorname{tr}(U_e(F)) = \iint K(y, z, y, z)\, dy\, dz = \iint \tilde{F}(1, 1, yez)\, dy\, dz.$$

Or l'application $(y, z) \to yez$ de $G_m \times G_m$ dans M_m transforme la mesure $dy\, dz$ en une distribution tempérée sur M_m (à cause du Lemme 4 et des inégalités

$$||y|| \leqslant A_3||y^{-1}ez||^{\delta_3}, \ ||z|| \leqslant A_4||y^{-1}ez||^{\delta_4});$$

soit T_e la transformée de Fourier de cette distribution, qui est aussi une distribution tempérée; on a

$$\operatorname{tr}(U_e(F)) = \int F_1(1, 1, w)\, dT_e(w).$$

D'où (ii).

On a

$$\begin{aligned} \tilde{F}(1, 1, yez) &= \int F_1(1, 1, w) \exp i \operatorname{tr}(wyez)\, dw \\ &= \int F_1(1, 1, wy^{-1}) \exp\ i \operatorname{tr}(wez)\, dw. \end{aligned}$$

Posons $z = 1 + z^\circ$, de sorte que z° parcourt l'espace vectoriel $\mathfrak{g}_m$. On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{F}(1, 1, yez) &= \int F_1(1, 1, wy^{-1}) \exp i \operatorname{tr}(we)\, .\, \exp i \operatorname{tr}(wez^\circ)\, dw \\ &= \int \Phi(w) \exp i \operatorname{tr}(wez^\circ)\, dw \end{aligned}$$

en posant $\Phi(w) = F_1(1, 1, wy^{-1}) \exp i \operatorname{tr}(we)$. La fonction $w \to \Phi(w)$ est indéfiniment dérivable à décroissance rapide sur M_m. Soient $w = (\omega_{jk})$, $z = (\zeta_{jk})$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(wez^0) &= \sum_{j+k<m+1} \omega_{jk}\, \epsilon_{k, m-k+1}\, \zeta_{m-k+1, j} \\ &= \sum_{j+k<m+1} \omega_{jk}\, \epsilon_{m-k+1}\, \zeta_{m-k+1, j}. \end{aligned}$$

Donc

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

$$\tilde{F}(1, 1, yez) = \int \ldots \int \Phi((\omega_{jk})_{1\leqslant j\leqslant m,\, 1\leqslant k\leqslant m})\Big(\exp i \sum_{j+k<m+1} \omega_{jk}\epsilon_{m-k+1}\zeta_{m-k+1,\, j}\Big) d\omega_{11} \ldots d\omega_{mm}$$
$$= \int \ldots \int \Psi((\omega_{jk})_{j+k<m+1})\Big(\exp i \sum_{j+k<m+1} \omega_{jk}\, \epsilon_{m-k+1}\, \zeta_{m-k+1,\, j}\Big) \prod_{j+k<m+1} d\omega_{jk}$$

avec

$$\Psi((\omega_{jk})_{j+k<m+1}) = \int \ldots \int \Phi((\omega_{jk})_{1\leqslant j\leqslant m,\, 1\leqslant k\leqslant m}) \prod_{j+k\geqslant m+1} d\omega_{jk}.$$

La fonction Ψ est indéfiniment dérivable à décroissance rapide, et l'on a

$$\int \tilde{F}(1, 1, yez)dz$$
$$= \int \ldots \int \prod_{j+k<m+1} d\zeta_{m-k+1,\, j} \int \ldots \int \Psi((\omega_{jk})_{j+k<m+1})\Big(\exp i \sum_{j+k<m+1} \omega_{jk}\, \epsilon_{m-k+1}\, \zeta_{m-k+1,\, j}\Big) \prod_{j+k<m+1} d\omega_{jk}$$
$$= |\epsilon_2^{-1}\epsilon_3^{-2} \ldots \epsilon_m^{-m+1}| \int \ldots \int \prod_{j+k<m+1} d\zeta_{m-k+1,\, j} \int \ldots \int \Psi((\omega_{jk})_{j+k<m+1}) \Big(\exp i \sum_{j+k<m+1} \omega_{jk}\, \zeta_{m-k+1,\, j}\Big) \prod_{j+k<m+1} d\omega_{jk}$$
$$= (2\pi)^{m(m-1)/2}|\epsilon_2^{-1}\epsilon_3^{-2} \ldots \epsilon_m^{-m+2}|\, \Psi(0)$$
$$= (2\pi)^{m(m-1)/2}|\epsilon_2^{-1}\epsilon_3^{-2} \ldots \epsilon_m^{-m+1}| \int \Phi(t)dt$$

où l'on fait varier t dans l'ensemble $\mathfrak{h}_m$ des matrices $(\tau_{jk}) \in M_m$ telles que $\tau_{jk} = 0$ pour $j + k < m + 1$, et où dt désigne la mesure définie par la forme différentielle

$$\prod_{j+k\geqslant m+1} d\tau_{jk}$$

Ainsi

$$\int \tilde{F}(1, 1, ye\, z)dz = (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m-1)}|\epsilon_2^{-1}\epsilon_3^{-2} \ldots \epsilon_m^{-m+1}| \int F_1(1, 1, ty^{-1})\exp i \operatorname{tr}(te)\, dt.$$

Toute matrice $t = (\tau_{jk}) \in \mathfrak{h}_m$ telle que $\tau_{1,m}\tau_{2,m-1} \ldots \tau_{m,1} \neq 0$ se met de manière unique sous la forme ze', où $e' = (\epsilon_{jk}') \in E_m$ et où $z = (\zeta_{jk}) \in G_m$. Posant $\epsilon'_{m-j+1,j} = \epsilon_j'$, on a $\tau_{jk} = \zeta_{j,m-k+1}\, \epsilon_k'$, d'où $\epsilon_k' = \tau_{m-k+1,k}$. Donc

$$\operatorname{tr}(te) = \sum_j \tau_{j,m-j+1}\, \epsilon_j = \sum_j \epsilon'_{m-j+1}\, \epsilon_j$$
$$dt = |\epsilon_2'\epsilon_3'^2 \ldots \epsilon_m'^{m-1}|\, d\epsilon_1' \ldots d\epsilon_m'\, dz$$

ou, compte tenu du Lemme 3,

$$dt = |\epsilon_2'^{-1}\epsilon_3'^{-2} \ldots \epsilon_m'^{-m+1}|\, de'dz.$$

Par suite

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

$$\int \tilde{F}(1, 1, yez)dz = (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m-1)}|\epsilon_2^{-1}\epsilon_3^{-2} \dots \epsilon_m^{-m+1}| \iint F_1(1, 1, ze'y^{-1}) \left(\exp i \sum_j \epsilon'_{m-j+1}\,\epsilon_j\right)|\epsilon_2'^{-1}\epsilon_3'^{-2} \dots \epsilon_m'^{-m+1}|\, de'dz.$$

Soit F_2 la fonction $w \to F_1\,(1, 1, w)$ sur M_m. Supposons maintenant que le support de F_2 soit compact et contenu dans N_m. Alors, la fonction $w \to F_2(w)|\Delta_2(w)^{-1}\Delta_3(w)^{-1} \dots \Delta_m(w)^{-1}|$ est intégrable pour dw. Donc la fonction

$$(z, e', y) \to F_2(ze'y)|\epsilon_2'^{-1}\epsilon_3'^{-2} \dots \epsilon_m'^{-m+1}|$$

est intégrable pour la mesure $dy\, de'\, dz$. Donc

$$\iint \tilde{F}(1, 1, yez)\, dydz = (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m-1)}|\epsilon_2^{-1}\epsilon_3^{-2} \dots \epsilon_m^{-m+1}| \iiint F_1(1, 1, ze'y^{-1}) \left(\exp i \sum_j \epsilon'_{m-j+1}\,\epsilon_j\right)|\epsilon_2'^{-1}\epsilon_3'^{-2} \dots \epsilon_m'^{-m+1}|\, dyde'dz$$

$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m-1)}|\epsilon_2^{-1}\epsilon_3^{-2} \dots \epsilon_m^{-m+1}| \int F_1(1, 1, w) \frac{\exp i\left[\epsilon_1\Delta_m(w) - \epsilon_2 \dfrac{\Delta_{m-1}(w)}{\Delta_m(w)} + \dots + (-1)^{m+1}\epsilon_m \dfrac{\Delta_1(w)}{\Delta_2(w)}\right]}{|\Delta_2(w)\Delta_3(w) \dots \Delta_m(w)|}\, dw$$

ce qui prouve (iii).

Remarque. Sauf dans le cas trivial où $m = 1$, la fonction $w \to \Delta_2(w)^{-1} \dots \Delta_m(w)^{-1}$ est non localement intégrable pour dw, de sorte que T_e n'est pas une mesure.

4. Cas où n est impair. Centre de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_n)$. Nous poserons alors $n = 2m+1$. Tout élément x de G_{2m+1} se met sous la forme

$$x = \left(\begin{array}{c|c|c} y & 0 & 0 \\ \hline u & 1 & 0 \\ \hline w & v & z \end{array}\right)$$

où $y \in G_m$, $z \in G_m$, $w \in M_m$, et où u (resp. v) est une matrice à 1 ligne et m colonnes (resp. 1 colonne et m lignes). Si

$$x' = \begin{pmatrix} y' & 0 & 0 \\ u' & 1 & 0 \\ w' & v' & z' \end{pmatrix}$$

on a

$$xx' = \begin{pmatrix} y\,y' & 0 & 0 \\ u\,y' + u' & 1 & 0 \\ w\,y' + v\,u' + z\,w' & v + z\,v' & z\,z' \end{pmatrix}.$$

D'où facilement

$$x^{-1} = \begin{pmatrix} y^{-1} & 0 & 0 \\ -u\,y^{-1} & 1 & 0 \\ z^{-1}(vu - w)y^{-1} & -z^{-1}v & z^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$x\,x'\,x^{-1} = \begin{pmatrix} y\,y'\,y^{-1} & 0 & 0 \\ (u\,y' + u' - u)y^{-1} & 1 & 0 \\ t & v + z\,v' - z\,z'\,z^{-1}\,v & z\,z'\,z^{-1} \end{pmatrix} \tag{18}$$

avec $t = (w\,y' + v\,u' + z\,w' - v\,u - z\,v'\,u + z\,z'\,z^{-1}\,v\,u - z\,z'\,z^{-1}\,w)y^{-1}$. On voit que l'ensemble A_{2m+1} des $x \in G_{2m+1}$ tels que $y = z = 1$, $u = v = 0$ est un sous-groupe distingué abélien de G_{2m+1}. L'idéal abélien $\mathfrak{a}_{2m+1}$ de $\mathfrak{g}_{2m+1}$ correspondant à A_{2m+1} est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 4. *Le centre de* $\mathfrak{U}(\mathfrak{g}_{2m+1})$ *est engendré par les éléments algébriquement indépendants*

$$e_{2m+1,1}, \quad \begin{vmatrix} e_{2m,1} & e_{2m,2} \\ e_{2m+1,1} & e_{2m+1,2} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad \begin{vmatrix} e_{m+2,1} & \ldots & e_{m+2,m} \\ \ldots & & \ldots\ldots \\ e_{2m+1,1} & \ldots & e_{2m+1,m} \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du Théorème 1, on prouve d'abord qu'un élément de $\mathfrak{S}(\mathfrak{g}_{2m+1})$ invariant pour la représentation adjointe est dans $\mathfrak{S}(\mathfrak{a}_{2m+1})$. Soit ρ la représentation adjointe de G_{2m+1} dans $\mathfrak{a}_{2m+1}$. Identifions $\mathfrak{a}_{2m+1}$ à M_m par l'application

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix} \to w.$$

Alors, si

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w' & v & z \end{pmatrix} \in G_{2m+1},$$

on a

$$\rho(x)\,.\,w = \rho(x)\,.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w' & v & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w' & v & z \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ z\,w\,y^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix} = z\,w\,y^{-1}.$$

Le raisonnement s'achève alors exactement comme pour le Théorème 1.

5. Cas où n est impair. Formule de Plancherel. Nous noterons A_{2m+1}' l'ensemble des $x \in G_{2m+1}$ tels que $y = z = 1$, $v = 0$. La formule (18) montre que A_{2m+1}' est un sous-groupe distingué abélien de G_{2m+1}. Soit $\mathfrak{a}_{2m+1}'$ l'algèbre de Lie de A_{2m+1}', c'est-à-dire l'ensemble des matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ u & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

L'application exponentielle de $\mathfrak{a}_{2m+1}'$ sur A_{2m+1}' est un isomorphisme. Donc, pour $e \in E_m$, l'application

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \exp i \operatorname{tr}(e\, w)$$

est un caractère ξ_e de A_{2m+1}'. Nous noterons U_e la représentation unitaire de G_{2m+1} induite par ξ_e.

Tout élément de G_{2m+1} se met de manière unique sous la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & v & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ u\, y & 1 & 0 \\ w\, y & v & z \end{pmatrix}.$$

Ainsi, G_{2m+1} est produit semi-direct de A_{2m+1}' et d'un groupe canoniquement isomorphe à $G_m \times G_{m+1}$. En outre

$$(19) \qquad \begin{pmatrix} y' & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & v' & z' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w & v & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y'\, y & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ v'\, u + z'\, w & v' + z'\, v & z'\, z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ u\, y^{-1}\, y'^{-1} & 1 & 0 \\ (v'\, u + z'\, w)y^{-1}\, y'^{-1} & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y'\, y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & v' + z'\, v & z'\, z \end{pmatrix}.$$

Par suite, U_e opère dans $L_C^2\,(G_m \times G_{m+1})$, $G_m \times G_{m+1}$ étant muni de la mesure de Haar canonique; et, si $(y', z', v') \to f(y', z', v')$ est un élément de $L_C^2(G_m \times G_m)$, la formule (19) prouve que, pour

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w & v & z \end{pmatrix} \in G_{2m+1}$$

on a

$$(20) \quad (U_e(x)f)(y', z', v') = f(y'\, y, z'\, z, v' + z'\, v) \exp i \operatorname{tr}(e(v'\, u + z'\, w)y^{-1}\, y'^{-1}).$$

La formule (20) définit explicitement la représentation U_e.

Théorème 5. *Pour $e = (\epsilon_{jk}) \in E_m$, posons $\epsilon_1 = \epsilon_{m,1}, \ldots, \epsilon_m = \epsilon_{1,m}$.*

(i) *La représentation U_e admet le caractère infinitésimal χ_e défini par*

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

$$\chi_e(e_{2m+1,1}) = i\epsilon_m,\ \chi_e\left(\begin{vmatrix} e_{2m,1} & e_{2m,2} \\ e_{2m+1,1} & e_{2m+1,2}\end{vmatrix}\right) = i^2\epsilon_{m-1}\epsilon_m, \ldots,$$

$$\chi_e\left(\begin{vmatrix} e_{m+2,1} & \ldots & e_{m+2,m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ e_{2m+1,1} & \ldots & e_{2m+1,m}\end{vmatrix}\right) = i^m\epsilon_1\epsilon_2\ldots\epsilon_m.$$

(ii) *Si on se limite aux* $e \in E_m$ *tels que* $\epsilon_1\,\epsilon_2\ldots\epsilon_m \neq 0$, *les représentations* U_e *sont irréductibles et deux à deux inéquivalentes.*

(iii) *Si* F *est une fonction intégrable sur* G_{2m+1}, *on a*

$$\int_{G_{2m+1}} |F(x)|^2\,dx = (2\pi)^{-m^2-m}\int\ldots\int \operatorname{tr}(U_e(F)^*U_e(F))\,|\epsilon_1\epsilon_2^3\ldots\epsilon_m^{2m-1}|\,d\epsilon_1\,d\epsilon_2\ldots d\epsilon_m.$$

Démonstration. Si

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ w & 0 & 1\end{pmatrix} \in A_{2m+1},$$

la formule (20) devient

$$(U_e(x)f)(y', z', v') = f(y', z', v')\exp i\operatorname{tr}(e\,z'\,w\,y'^{-1}).$$

La démonstration de (i) s'achève alors exactement comme pour le Théorème 2.

Pour prouver (ii), on raisonne aussi comme pour le Théorème 2. Il s'agit de prouver que, si $\epsilon_1\,\epsilon_2\ldots\epsilon_m \neq 0$, un élément

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w & v & z\end{pmatrix} \in G_{2m+1}$$

qui laisse fixe ξ_e appartient à A_{2m+1}'. Or la condition que x laisse fixe ξ_e se traduit, en vertu de (18), par la condition

(21) $$\operatorname{tr}(e\,w') = \operatorname{tr}(e(v\,u' + z\,w')y^{-1})$$

quels que soient $w' \in M_m$ et la matrice u' à 1 ligne et m colonnes. Faisant $u' = 0$, ceci impose d'abord $\operatorname{tr}(e\,w') = \operatorname{tr}(y^{-1}\,e\,z\,w')$ quel que soit $w' \in M_m$, donc $e = y^{-1}e\,z$, donc (Lemme 1) $y = z = 1$. La condition (21) se réduit alors à $\operatorname{tr}(e\,v\,u') = 0$ quel que soit u'. Posant

$$v = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_m\end{pmatrix} \qquad u' = (\sigma_1' \ldots \sigma_m')$$

on a

$$v\,u' = (\sigma_j\,\sigma_k'),\ e\,v\,u' = (\epsilon_{j,m-j+1}\,\sigma_{m-j+1}\,\sigma_k'),$$
$$\operatorname{tr}(e\,v\,u') = \sum_j \epsilon_{m-j+1}\,\sigma_{m-j+1}\,\sigma_j',$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

d'où la condition $\epsilon_{m-j+1}\sigma_{m-j+1} = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$; comme les ϵ_j sont tous $\neq 0$, on en conclut que $v = 0$, d'où $x \in A_{2m+1}'$.

Soit $x \rightarrow F(x) = F_1(y, z, v, u, w)$ une fonction intégrable sur G_{2m+1}. Pour $f, f' \in L_C{}^2(G_m \times G_{m+1})$, on a

$$(22)\quad (U_e(F)f|f') =$$
$$\int\int\int\int\int\int\int\int F_1(y, z, v, u, w)\, f(y'y, z'z, v' + z'v)\, \overline{f'(y', z', v')}$$
$$\exp i\, \mathrm{tr}(e(v'u + z'w)y^{-1}y'^{-1})\, dy\, dz\, dv\, du\, dw\, dy'\, dz'\, dv'$$
$$= \int \ldots \int F_1(y'^{-1}y, z'^{-1}z, v, u, w)\, f(y, z, v' + z'v)\, \overline{f'(y', z', v')}$$
$$\exp i\, \mathrm{tr}(e(v'u + z'w)y^{-1})\, dy\, dz\, dv\, du\, dw\, dy'\, dz'\, dv'$$
$$= \int \ldots \int F_1(y'^{-1}y, z'^{-1}z, z'^{-1}(v - v'), u, w)\, f(y, z, v)\, \overline{f'(y', z', v')}$$
$$\exp i\, \mathrm{tr}(e(v'u + z'w)y^{-1})\, dy\, dz\, dv\, du\, dw\, dy'\, dz'\, dv'.$$

Donc

$$\mathrm{tr}(U_e(F)^* U_e(F)) = \int \ldots \int \Big| \int F_1(y'^{-1}y, z'^{-1}z, z'^{-1}(v - v'), u, w)$$
$$\exp i\, \mathrm{tr}(e(v'u + z'w)y^{-1})\, du\, dw \Big|^2 dy\, dz\, dv\, dy'\, dz'\, dv'.$$

Comme plus haut, nous identifions l'espace vectoriel M_m à son dual grâce à la forme bilinéaire $(w_1, w_2) \rightarrow \mathrm{tr}(w_1 w_2)$. D'autre part, l'espace vectoriel $M_{m,1}$ des matrices u à 1 ligne et m colonnes admet un dual que nous identifions à l'espace vectoriel $M_{1,m}$ des matrices v à m lignes et 1 colonne, en posant

$$<u, v> = \mathrm{tr}(v\, u).$$

Alors, la fonction

$$(y, z, v, u, w) \rightarrow F_1(y, z, v, u, w)$$

définie sur $G_m \times G_m \times M_{1,m} \times M_{m,1} \times M_m$, admet, par rapport aux variables u et w, une transformée de Fourier, que nous noterons $\tilde{F}$, définie sur $G_m \times G_m \times M_{1,m} \times M_{1,m} \times M_m$; et l'on a

$$\mathrm{tr}(U_e(F)^* U_e(F)) = \int \ldots \int |\tilde{F}(y'^{-1}y, z'^{-1}z, z'^{-1}(v - v'), y^{-1}ev', y^{-1}ez')|^2\, dy\, dz\, dv\, dy'\, dz'\, dv'$$
$$= \int \ldots \int |\tilde{F}(y, z, z'^{-1}(v - v'), y^{-1}y'^{-1}ev', y^{-1}y'^{-1}ez')|^2\, dy\, dz\, dv\, dy'\, dz'\, dv'$$
$$= \int \ldots \int |\tilde{F}(y, z, z'^{-1}(v - v'), y'ev', y'ez')|^2\, dy\, dz\, dv\, dy'dz'\, dv'$$
$$= \int \ldots \int |\tilde{F}(y, z, v, y'ev', y'ez')|^2\, dy\, dz\, dv\, dy'\, dz'\, dv'.$$

Pour $\epsilon_1 \epsilon_2 \ldots \epsilon_m \neq 0$, on a $\det(y'e) = \det e \neq 0$. Donc

$$\mathrm{tr}(U_e(F)^* U_e(F)) = \int \ldots \int |\tilde{F}(y, z, v, v', y'ez')|^2 |\det e|^{-1}\, dy\, dz\, dv\, dy'\, dz'\, dv'.$$

Alors, en utilisant le Lemme 3,

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

$$\begin{aligned}\int \ldots \int \operatorname{tr}(U_e(F)^* U_e(F)) |\epsilon_1 \epsilon_2^3 \ldots \epsilon_m^{2m-1}| \, d\epsilon_1 d\epsilon_2 \ldots d\epsilon_m \\ = \int \ldots \int |\tilde{F}(y, z, v, v', y'ez')|^2 \epsilon_2^2 \epsilon_3^4 \ldots \epsilon_m^{2m-2} \, dy\, dz\, dv\, dy'\, dz'\, dv'\, d\epsilon_1\, d\epsilon_2 \ldots d\epsilon_m \\ = \int \ldots \int |\tilde{F}(y, z, v, v', w)|^2 \, dy\, dz\, dv\, dv'\, dw \\ = (2\pi)^{m^2+m} \int \ldots \int |F(y, z, v, u, w)|^2 \, dy\, dz\, dv\, du\, dw \\ = (2\pi)^{m^2+m} \int |F(x)|^2 \, dx.\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 5.

6. Cas où n est impair. Caractères globaux des représentations U_e.

THÉORÈME 6. *Soit* $e = (\epsilon_{jk}) \in E_m$; *posons* $\epsilon_1 = \epsilon_{m,1}, \ldots, \epsilon_m = \epsilon_{1,m}$; *supposons* $\epsilon_1 \epsilon_2 \ldots \epsilon_m \neq 0$.

(i) *Soit*

$$x = \begin{pmatrix} y & 0 & 0 \\ u & 1 & 0 \\ w & v & z \end{pmatrix} \to F(x) = F_1(y, z, v, u, w)$$

une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide sur G_{2m+1}. *Alors, l'opérateur* $U_e(F)$ *est un opérateur à trace.*

(ii) *Il existe une distribution tempérée* T_e *sur* M_m *telle que*

$$\operatorname{tr}(U_e(F)) = \int F_1(1, 1, 0, 0, w) \, dT_e(w).$$

(iii) *Sur l'ensemble* N_m *des* $w \in M_m$ *tels que* $\Delta_2(w)\Delta_3(w) \ldots \Delta_m(w) \neq 0$, T_e *coïncide avec la fonction*

$$w \to (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m+1)} |\epsilon_1^{-1} \epsilon_2^{-2} \ldots \epsilon_m^{-m}| \frac{\exp i\left[\epsilon_1 \Delta_m(w) - \epsilon_2 \dfrac{\Delta_{m-1}(w)}{\Delta_m(w)} + \ldots + (-1)^{m+1} \epsilon_m \dfrac{\Delta_1(w)}{\Delta_2(w)}\right]}{|\Delta_2(w)\Delta_3(w) \ldots \Delta_m(w)|}.$$

Démonstration. Comme dans la démonstration du Théorème 5, introduisons la fonction $(y, z, v, u, w) \to \tilde{F}(y, z, v, u, w)$ sur $G_m \times G_m \times M_{1,m} \times M_{1,m} \times M_m$, transformée de Fourier de la fonction $(y, z, v, u, w) \to F_1(y, z, v, u, w)$ par rapport aux variables u et w. La formule (22) prouve que $U_e(F)$ est défini par le noyau

$$K(y, z, v, y', z', v') = \tilde{F}(y'^{-1}y, z'^{-1}z, z'^{-1}(v - v'), y^{-1}ev', y^{-1}ez').$$

Comme dans la démonstration du Théorème 3, nous introduisons les notations $\|y\|$, $\|w\|$ pour les éléments de G_m, M_m, et nous posons $\|v\| = \Sigma_j |\tau_j|$ si $v = (\tau_j) \in M_{1,m}$. On a vu qu'il existe des constantes $A_1 > 0$, $\delta_1 > 0$ telles que

$$\|y'^{-1}y\| + \|z'^{-1}z\| + \|y^{-1}ez'\| \geqslant A_1(\|y\| + \|z\| + \|y'\| + \|z'\|)^{\delta_1};$$

d'autre part, il existe des constantes $A_2 > 0$, $\delta_2 > 0$ telles que

$$\|v'\| = \|e^{-1}y(y^{-1}ev')\| \leqslant A_2(\|y\| + \|y^{-1}ev'\|)^{\delta_2}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1959-034-8 Published online by Cambridge University Press

et des constantes $A_3 > 0$, $\delta_3 > 0$ telles que

$$||v|| = ||z'(z'^{-1}(v - v')) + v'|| \leqslant A_3(||z'|| + ||v'|| + ||z'^{-1}(v - v'||)^{\delta_3}$$

Finalement, il existe des constantes $A > 0$, $\delta > 0$, telles que

$$||y'^{-1}y|| + ||z'^{-1}z|| + ||z'^{-1}(v - v')|| + ||y^{-1}ev'|| + ||y^{-1}ez'||$$
$$\geqslant A\ (||y|| + ||y'|| + ||z|| + ||z'|| + ||v|| + ||v'||)^{\delta}.$$

D'après le Lemme 4, K est donc une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide. Par suite, $U_e(F)$ est un opérateur à trace, et

$$\mathrm{tr}(U_e(F)) = \int\int\int \tilde{F}\ (1, 1, 0, yev, yez)\ dy\ dz\ dv.$$

L'application $(y, z, v) \rightarrow (yev, yez)$ de $G_m \times G_m \times M_{1,m}$ dans $M_{1,m} \times M_m$ transforme la mesure $dy\,dz\,dv$ en une distribution tempérée sur $M_{1,m} \times M_m$ d'après le Lemme 4 et les inégalités obtenues plus haut; soit T_e' la transformée de Fourier de cette distribution, qui est aussi une distribution tempérée; alors

$$\mathrm{tr}(U_e(F)) = \int F(1, 1, 0, u, w)\ dT_e'(u, w).$$

On a

$$\tilde{F}(1, 1, 0, yev, yez) = \int\int F_1(1, 1, 0, u, w) \exp i \,\mathrm{tr}(yevu + yezw)\ du\ dw$$

$$\int \tilde{F}\ (1, 1, 0, yev, yez)\ dv$$
$$= \int dv \int\int F_1\ (1, 1, 0, u, w) \exp i \,\mathrm{tr}(yevu + yezw)\ du\ dw$$
$$= \int |\det e|^{-1}\ dv \int\int F_1(1, 1, 0, u, w) \exp i \,\mathrm{tr}(vu + yezw)\ du\ dw$$
$$= \int |\det e|^{-1}\ dv \int\int F_1(1, 1, 0, u, we^{-1}y^{-1}) \exp i \,\mathrm{tr}(vu + zw) |\det e|^{-m}\, du\ dw$$
$$= |\det e|^{-1-m} \int dv \int\int F_1(1, 1, 0, u, we^{-1}y^{-1}) (\exp i \,\mathrm{tr}\, w)$$
$$(\exp i \,\mathrm{tr}(vu + z^{\circ}w))\ du\ dw$$

en posant $z = 1 + z^{\circ}$. D'où

$$\int \tilde{F}(1, 1, 0, yev, yez)\ dv = (2\pi)^m |\det e|^{-1-m} \int F_1\ (1, 1, 0, 0, we^{-1}y^{-1})$$
$$(\exp i \,\mathrm{tr}\, w)\ (\exp i \,\mathrm{tr}\, z^{\circ}\, w)\ dw.$$

Puis, raisonnant comme pour le Théorème 3

$$\int\int\ \tilde{F}(1, 1, 0, yev, yez) dz dv = (2\pi)^m |\det e|^{-1-m} (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m-1)}$$
$$\int\ F_1(1, 1, 0, 0, te^{-1}y^{-1}) (\exp i \,\mathrm{tr}\, t)\ dt$$

où t parcourt l'ensemble des matrices (τ_{jk}) telles que $\tau_{jk} = 0$ pour $j < k$ et où dt est définie par $\Pi_{j\geqslant k} d\tau_{jk}$. Posons $te^{-1} = ze'$, où $z \in G_m$ et $e' = (\epsilon_{jk}') \in E_m$, et $\epsilon_{m-j+1,j}' = \epsilon_j'$. Il vient

$$\mathrm{tr}\, t = \mathrm{tr}(ze'e) = \mathrm{tr}(e'e) = \sum_j \epsilon_{m-j+1}' \epsilon_j$$

$$dt = |\epsilon_1 \ldots \epsilon_m| |(\epsilon_1\epsilon_m')^{m-1} (\epsilon_2\epsilon_{m-1}')^{m-2} \ldots (\epsilon_{m-1}\epsilon_2')| d\epsilon_1' \ldots d\epsilon_m'\, dz$$
$$= |\epsilon_1^m \epsilon_2^{m-1} \ldots \epsilon_m| |\epsilon_2'^{-1} \epsilon_3'^{-2} \ldots \epsilon_m'^{-m+1}| de' dz.$$

D'où

$$\iint \tilde{F}(1, 1, 0, yev, yez)\, dzdv$$
$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m+1)} |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^{-2} \ldots \epsilon_m^{-m}| \iint F_1(1, 1, 0, 0, ze'y^{-1})\Big(\exp i \sum_j \epsilon'_{m-j+1}\epsilon_j\Big)$$
$$|\epsilon_2'^{-1} \ldots \epsilon_m'^{-m+1}|\, de'dz.$$

Supposons maintenant le support de la fonction $w \rightarrow F_1\,(1, 1, 0, 0, w)$ compact et contenu dans N_m. On a

$$\iiint \tilde{F}(1, 1, 0, yev, yez)\, dy\, dz\, dv$$
$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m+1)} |\epsilon_1^{-1}\epsilon_2^{-2} \ldots \epsilon_m^{-m}| \iiint F_1(1, 1, 0, 0, ze'y^{-1})\Big(\exp i \sum_j \epsilon'_{m-j+1}\epsilon_j\Big)$$
$$|\epsilon_2'^{-1} \ldots \epsilon_m'^{-m+1}|\, dy\, de'dz$$
$$= (2\pi)^{\frac{1}{2}m(m+1)} |\epsilon_1^{-1} \ldots \epsilon_m^{-m}| \int F_1(1, 1, 0, 0, w)$$
$$\frac{\exp i\Big[\epsilon_1\Delta_m(w) + \ldots + (-1)^{m+1}\epsilon_m \dfrac{\Delta_1(w)}{\Delta_2(w)}\Big]}{|\Delta_2(w) \ldots \Delta_m(w)|}\, dw.$$

Remarques. 1. Sauf dans le cas $m = 1$ (cas qui est étudié dans **(4)**), on voit que la distribution T_e du théorème n'est pas une mesure.

2. Soit G un groupe de Lie nilpotent simplement connexe. La conjecture suivante paraît vraisemblable : les caractères globaux des représentations unitaires irréductibles de G sont des distributions tempérées sur G (la notion de distribution tempérée se définissant grâce à l'application exponentielle).

Errata à un article antérieur :*

(1) P. 322, l.4, la conjecture que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ est de type fini est inexacte : on le voit en utilisant le contre-exemple au 14^e problème de Hilbert que vient d'obtenir Nagata.

(2) Les algèbres de Lie définies pp. 322-3 sont, pour les groupes de Lie définis pp. 330-1, les algèbres des champs de vecteurs invariants à droite. Or, dans l'article précédent de cette série, on a toujours utilisé les champs de vecteurs invariants à gauche. Il en résulte qu'il faut changer M_1 en $- M_1$ et M_2 en $- M_2$ dans les formules (9), (12), (15), (18), (21), (24), (27), (30), (33) et dans leurs démonstrations.

(3) Dans la formule (25), les 4 derniers termes du crochet doivent être :

$$- (\lambda^2 + \mu^2)\rho_3\theta - \mu^2\rho_1\rho_2\theta - \tfrac{1}{2}\,\lambda\mu(\rho_1^2 - \rho_2^2)\theta - \tfrac{1}{2}(\lambda^2 + \mu^2)(\mu\rho_1 - \lambda\rho_2)\theta^2.$$

P. 341, l.17, le dernier terme doit être : $\frac{1}{2}\lambda\mu(\rho_1{}^2 - \rho_2{}^2)$. Dans la formule (33), il faut :

$$U_\lambda(x_3) = - i\lambda M_2 + \tfrac{1}{2}\, i\lambda M_1^2 \qquad U_\lambda(x_4) = - i\lambda M_1$$

Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. III, Can. J. Math., *10* (1958), pp. 321–48.

Dans la formule (34), il faut

$$\exp i\lambda\left(\rho_5 - \rho_4\theta_1 + \tfrac{1}{2}\,\rho_2^2\theta_1 + \tfrac{1}{2}\,\rho_3\theta_1^2 - \frac{1}{6}\,\rho_2\theta_1^3 - \rho_3\theta_2 + \rho_2\theta_1\theta_2\right).$$

Bibliographie

1. F. Bruhat, *Sur les représentations induites des groupes de Lie*, Bull. Soc. Math. France, *84* (1956), 97–205.

2. J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II.*, Bull. Soc. Math. France, *85* (1957), 325–88.

3. I. M. Gelfand and M. A. Neumark, *Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen* (Berlin, 1957).

4. R. Godement, *Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires*, J. Math. pures et appl., *30* (1951), 1–110.

5. ———, *Théorie des caractères, II. Définition et propriétés générales des caractères*, Ann. Math., *59* (1954), 63–85.

6. A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., *16* (1955).

7. G. W. Mackey, *Imprimitivity for representations of locally compact groups, I.*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A., *35* (1949), 537–45.

8. L. Schwartz, *Théorie des distributions*, II (Paris, Hermann, Act. Sc. et Ind., *1122* [1951]).

Institut Henri Poincaré