Canad. Math. Bull.Vol. **35** (2), 1992 pp. 186–193

SUR UN PROBLÈME PÉRIODIQUE

ZINE E. A. GUENNOUN

RÉSUMÉ. Dans cet article, nous considérons le problème d'existence d'une solution périodique du problème de la forme: $y'' = f(t,y,y')$, $0 \leqq t \leqq 1$ où $f: [0,1] \times R \times R \to R$ est une fonction continue qui n'est pas nécessairement périodique et sans condition de croissance sur la variable y'. Nous obtenons certaines extensions d'un théorème du type Nirenberg ainsi que de l'équation de Liénard.

0. **Introduction.** Le but de cet article est de démontrer un théorème d'existence d'une solution périodique pour le problème:

$$(*) \qquad y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \qquad 0 \leqq t \leqq 1.$$

THÉORÈME 1. *Supposons que $f: [0,1] \times R^2 \to R$ est une fonction continue qui vérifie les hypothèses suivantes:*

(H1) L'une des conditions suivantes est satisfaite:

(1) Il existe $M > 0$ tel que $yf(t,y,0) > 0$ pour tout $|y| > M$;

(2) Il existe $M > 0$, $f(t,M,0) \geqq 0$ et $f(t,-M,0) \leqq 0$ dans $[0,1]$;

(H2) L'une des conditions suivantes est satisfaite:

(3) (i) $f(0,y,p) = f(1,y,p)$;

(ii) Il existe $M_1 > 0$ tel que $\inf\{\,|f(t,y,p)| \mid (t,y) \in [0,1] \times [-M,M]$ et $|p| > M_1\} > 0$;

(4) (i) Il existe $M_1 > 0$ tel que $\operatorname{sign}(f(0,y,p)) = \operatorname{sign}(f(1,y,p))$ où $\operatorname{sign}(r) = 1$ si $r > 0$ et $\operatorname{sign}(r) = -1$ si $r < 0$;

(ii) $f(t,y,p) \neq 0$ pour tout $(t,y) \in [0,1] \times [-M,M]$ et $|p| > M_1$;

(5) (i) Il existe $M_1 > 0$ tel que pour tout $y \in [-M,M]$ et $|p| > M_1$ il existe un voisinage U de $(0,y,p)$ et un voisinage V de $(1,y,p)$ tels que: $\operatorname{sign}(f(t,u,q)) = \operatorname{sign}(f(s,v,z))$, pour tout $(t,u,q) \in U$ et $(s,v,z) \in V$;

(ii) $f(t,y,p) \neq 0$ pour tout $(t,y) \in (0,1) \times (-M,M)$ et $|p| > M_1$;

(6) (i) $f(t,y,p)$ vérifie la condition (i) de (5);

(ii) Pour tout $(t,y) \in (0,1) \times (-M,M)$, $|p| > M_1$ qui vérifie $f(t,y,p) = 0$, il existe un voisinage $U \times V$ de $(t,(y,p))$ tel que l'une des alternatives est toujours vérifiée:

(a) $f(u,v,q) > 0$ pour tout $u \in U \setminus \{t\}$ et $(v,q) \in V$ ou bien

(b) $f(u,v,q) < 0$ pour tout $u \in U \setminus \{t\}$ et $(v,q) \in V$.

Reçu par les éditeurs le 8 juin 1990.
AMS subject classification: 34A10, 34B10, 34B15.
© Société mathématique du Canada 1992.

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-027-5 Published online by Cambridge University Press

Alors le problème périodique:

$$(P)\qquad \begin{aligned} &y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \qquad 0 \leqq t \leqq 1;\\ &y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1) \end{aligned}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M \leqq y(t) \leqq M$ pour tout $t \in [0,1]$.

Notons qu'on a la relation suivante entre les conditions du théorème 1:

$$(1) \Rightarrow (2)$$
$$(3) \Rightarrow (4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6).$$

Exemples:

La fonction $f(t,y,p) = y^3 + e^{-|p|y} + \sin(\pi t)$ vérifie (1) et (4) mais ne vérifie pas (3); la fonction $f(t,y,p) = t^2y + t^2p^5 + t^3$ vérifie (2) et (5) mais ne vérifie pas (1) , (3) et (4); la fonction $f(t,y,p) = (t-1/2)^4(y+p^2+e^t)$ vérifie (2) et (6) mais ne vérifie pas (1) , (3) , (4) et (5). Remarquons aussi que les deux dernières fonctions ne vérifient pas la condition de périodicité $f(0,y,p) = f(1,y,p)$. La condition (6) permet à la fonction $f(t,y,p)$ de s'annuler sans changer de signe.

Si $f(t,y,p)$ est une fonction continue qui vérifie (1) et (3), on retrouve un théorème d'existence dû à Granas-Guenther-Lee, voir [8].

Dans le cas d'un problème périodique de type Nirenberg où la fonction $f(t,y,p) = y\alpha(t,y,p) - \beta(t,y,p)$, nous obtenons le résultat suivant:

THÉORÈME 2. *Soient $\alpha, \beta : [0,1] \times R^2 \longrightarrow R$ deux fonctions continues qui vérifient les hypothèses:*

(i) Il existe $M > 0$ tel que $\beta(t,M,0)/M \leqq \alpha(t,M,0)$ et $\beta(t,-M,0)/-M \leqq \alpha(t,-M,0)$;

(ii) Il existe $M_1 > 0$ tel que l'équation $y\alpha(t,y,p) - \beta(t,y,p) = 0$ n'admet pas de solution pour tout (t,y) dans $[0,1] \times [-M,M]$ et $|p| > M_1$;

(iii) $\operatorname{sign}(y\alpha(0,y,p) - \beta(0,y,p)) = \operatorname{sign}(y\alpha(1,y,p) - \beta(1,y,p))$ pour tout $|y| \leqq M$, $|p| > M_1$.

Alors le problème périodique:

$$(P)\qquad \begin{aligned} &y''(t) = y(t)\alpha(t, y(t), y'(t)) - \beta(t, y(t), y'(t)) \quad 0 \leqq t \leqq 1;\\ &y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1), \end{aligned}$$

admet au moins une solution y dans C^2 telle que $-M \leqq y(t) \leqq M$ pour tout $t \in [0,1]$.

Le théorème 2 généralise un résultat d'existence démontré par Nirenberg voir [8], [11] et une formulation plus générale établie par Granas-Guenther-Lee, voir [8].

Dans la dernière partie de ce travail nous donnons quelques exemples et conséquences du théorème d'existence principal, notamment pour une équation de Liénard, voir [10], [12]

$$\begin{aligned} &y''(t) = f(t, y(t), y'(t))y'(t) + g(t, y(t)) \text{ dans } [0,T];\\ &y(0) = y(T), \quad y'(0) = y'(T). \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-027-5 Published online by Cambridge University Press

Ainsi que d'autres exemples en mécanique voir [13]. Par exemple le problème périodique:

$$y''(t) = a(t)y3(t) + b(t)y(t) - c(t)y'(t) - |y'(t)|y'(t) + d(t) \text{ dans } [0,T];$$
$$y(0) = y(T), \quad y'(0) = y'(T).$$

Notons qu'on peut remplacer l'intervalle [0,1] par n'importe quel intervalle [a,b] dans les théorèmes 1 et 2.

1. **Notations et démonstration du théorème 1.** Dans la suite, C^k dénotera l'ensemble des fonctions $u: [0,1] \longrightarrow R$ continûment différentiables jusqu'à l'ordre k, muni de la norme $\|u\|_k = \max\{\|u\|_0, \|u'\|_0, \ldots, \|u(k)\|_0\}$, où $\|u\|_0 = \sup\{|u(t)|_t \,|\in [0,1]\}$. L'ensemble des fonctions continues C^0 est noté C; $C^0 = \{u \in C \mid u(0) = 0\}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Soit f une fonction continue qui vérifie (H1), (H2). Pour $\lambda \in [0,1]$, on définit la famille de fonctions continues $f_\lambda(t,y,p)$ par:

$$f_\lambda(t,y,p) = \begin{cases} \lambda f(t,M,p) - M & \text{si } M < y \\ \lambda f(t,y,p) - y & \text{si } -M \leqq y \leqq M \\ \lambda f(t,-M,p) + M & \text{si } y < -M. \end{cases}$$

Considérons la famille des problèmes:

$$(P)_\lambda \qquad \begin{aligned} y''(t) &= \lambda f(t, y(t), y'(t)) \text{ dans } [0,1]; \\ y(0) &= y(1), \quad y'(0) = y'(1), \end{aligned}$$

et la famille des problèmes associés:

$$(P)_{1\lambda} \qquad \begin{aligned} y''(t) - y(t) &= f_\lambda(t, y(t), y'(t)) \text{ dans } [0,1]; \\ y(0) &= y(1), \quad y'(0) = y'(1). \end{aligned}$$

(1.1) LEMME. *(i) Pour tout $\lambda \in [0,1]$ et toute solution y de $(P)_{1\lambda}$, on a la majoration $\|y\|_0 \leqq M$;*

(ii) Toute solution y de $(P)_{1\lambda}$ est une solution y de $(P)_\lambda$. De plus, on a la majoration $\|y'\|_0 \leqq M_1$ pour tout $\lambda \in [0,1]$.

PREUVE DU LEMME. (i) Soit y une solution de $(P)_{1\lambda}$, nous allons montrer que $\|y\|_0 \leqq M$. En effet, soit $b \in [0,1]$, tel que la fonction $t \longrightarrow y(t)$ atteint son maximum positif en b. Supposons que $y(b) > M$ et que $b \in (0,1)$, d'après la définition de f_λ on a $y''(b) - y(b) \geqq -M$. Par conséquent, $0 \geqq y''(b) > 0$ et on obtient une contradiction.

Supposons maintenant que $b = 1$ et que $y(1) > M$, il existe alors $a < 1$ tel que $y(t) > M$ pour tout $t \in [a,1]$. Par suite $y''(t) > 0$ dans $[a,1]$ et $y'(1) - y'(t) = \int_1^t y''(s)ds > 0$ pour tout $t \in [a,1]$; puisque $y'(1) = 0$ on a $y'(t) < 0$ et on obtient $y(1) < y(a)$, ce qui est une contradiction avec le fait que y atteint son maximum en 1. La démonstration est analogue si on suppose que $b = 0$ et $y(0) > M$.

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-027-5 Published online by Cambridge University Press

Dans le cas où la fonction $t \longrightarrow y(t)$ atteint son minimum négatif en b telle que $y(b) < -M$ et $b \in (0,1)$, d'après la définition de f_λ on a: $y''(b) - y(b) \leqq M$. Par conséquent, $0 \leqq y''(b) < 0$ on obtient une contradiction. Les autres cas se traitent d'une façon analogue et on obtient $-M \leqq y(t) \leqq M$ pour tout $t \in [0,1]$.

(ii) Soit y une solution de $(P)_{1\lambda}$, $\lambda \in (0,1]$ d'après la définition de f_λ et (i) on a:

$$y''(t) = \lambda f(t, y(t), y'(t)) \text{ dans } [0,1],$$

et donc y est une solution du problème $(P)_\lambda$. Soit maintenant $b \in [0,1]$, tel que la fonction $t \longrightarrow y'(t)$ atteint son maximum positif en b. Supposons que $y'(b) > M_1$, $b \in (0,1)$, alors $|y(b)| < M$, sinon $y(b)$ atteindra son extrémum en b ce qui implique que $y'(b) = 0$. Si $f(b, y(b), y'(b)) \neq 0$, on obtient la contradiction $0 = y''(b) = \lambda f(b, y(b), y'(b)) \neq 0$; sinon d'après (H2) et la continuité de la fonction $(t, y(t), y'(t))$, il existe un voisinage $(b-d, b+d)$ de b dans $(0,1)$ tel que l'une des alternatives suivantes soit vérifiée:

(a) $y''(t) > 0$ dans $(b, b+d)$ ce qui implique la contradiction $y'(b+d) > y'(b)$;
ou bien

(b) $y''(t) < 0$ dans $(b-d, b)$ ce qui implique la contradiction $y'(b-d) > y'(b)$.

Maintenant, si $b = 0$ alors y' atteint également son maximum en 1, d'après (H2) et la continuité de la fonction $(t, y(t), y'(t))$, il existe deux intervalles $(0,d)$, $(1-d, 1)$ tels que l'une des alternatives suivantes soit vérifiée:

(a) $y''(t) > 0$ dans $(0,d)$ ce qui implique la contradiction $y'(d) > y'(0)$;
ou bien

(b) $y''(t) < 0$ dans $(1-d, 1)$ ce qui implique la contradiction $y'(1-d) > y'(1)$.

Les autres cas se traitent d'une façon similaire. Si $\lambda = 0$ alors les seules solutions sont les fonctions constantes comprises entre $-M$ et M, et la démonstration du lemme est complète.

FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1. Considérons $C_b^1 = \{u \in C_1 | u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)\}$, $C_0 = \{u \in C | u(0) = 0\}$, l'opérateur linéaire bijectif continu L: $C_b^1 \longrightarrow C_0$ et l'opérateur $N_{f\lambda} : C_b^1 \longrightarrow C_0$ définis par:

$$L[u](t) = u'(t) - u'(0) - \int_0^t u(s)ds \text{ et } N_{f\lambda}[u](t) = \int_0^t f_\lambda(s, u(s), u'(s))ds,$$

pour tout $u \in C_b^1$, $t \in [0,1]$ et $\lambda \in [0,1]$. L'opérateur $N_{f\lambda}$ est continu et complètement continu pour tout $\lambda \in [0,1]$. De plus, le problème $(P)_{1\lambda}$ est équivalent au problème de point fixe de l'opérateur complètement continu $L^{-1} \circ N_{f\lambda} : C_b^1 \longrightarrow C_b^1$. Posons alors $r = 1 + \max\{M, M_1\}$ où M et M_1 sont les constantes de (H1) et (H2) respectivement et $K_r = \{u \in C_b^1 \mid \|u\|_1 \leqq r\}$. Par le choix de r et (ii) du lemme (1.1), la famille d'opérateurs $L^{-1} \circ N_{f\lambda}$ est sans point fixe sur la frontière de K_r pour tout $\lambda \in [0,1]$. Par conséquent $L^{-1} \circ N_{f\lambda}$: $[0,1] \times K_r \longrightarrow C_b^1$ est une homotopie compacte sans point fixe sur la frontière de K_r entre $L^{-1} \circ N_{f1}$ et $L^{-1} \circ N_{f0}$. De plus, $tL^{-1} \circ N_{f0} : [0,1] \times K_r \longrightarrow C_b^1$ est une homotopie compacte sans point fixe sur la frontière de K_r entre $L^{-1} \circ N_{f0}$ et la fonction constante nulle qui est dans K_r. Par le théorème de transversalité topologique (voir [2],[3]) $L^{-1} \circ N_{f1}$ a un point fixe qui est solution du problème (P) et la démonstration du théorème est complète.

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-027-5 Published online by Cambridge University Press

2. **Existence de solutions positives.**

THÉORÈME 3. *Soient $\alpha, \beta: [0,1]\times R^{+}\times R \longrightarrow R$ deux fonctions continues qui vérifient les hypothèses :*

(i) Il existe $M > 0$ tel que $\beta(t, M, 0)/M \leqq \alpha(t, M, 0)$;

(ii) $\alpha(t, y, 0) > 0$ et $\beta(t, y, 0) \geqq 0$ pour tout $(t, y) \in (0,1) \times (0, M)$;

(iii) Il existe $M_1 > 0$ tel que l'équation $y\alpha(t, y, p) - \beta(t, y, p) = 0$ n'admet pas de solution dans $[0,1] \times [0, M] \times [-M_1, M_1]^c$;

(iv) $\operatorname{sign}(y\alpha(0, y, p) - \beta(0, y, p)) = \operatorname{sign}(y\alpha(1, y, p) - \beta(1, y, p))$ pour $y \leqq M, |p| > M_1$.

Alors le problème périodique:

$$(P) \qquad \begin{aligned} &y''(t) = y(t)\alpha(t, y(t), y'(t)) - \beta(t, y(t), y'(t)) 0 \leqq t \leqq 1; \\ &y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1) \end{aligned}$$

admet au moins une solution y positive.

DÉMONSTRATION . Définissons $\alpha^*, \beta^*: [0,1] \times R \times R \longrightarrow R$ par:

$$\alpha^*(t, y, p) = \alpha(t, |y|, p) \quad \text{et} \quad \beta^*(t, y, p) = \beta(t, |y|, p)$$

$f(t, y, p) = y\alpha^*(t, y, p) - \beta^*(t, y, p)$ vérifie les hypothèses du théorème 2, par conséquent le problème périodique:

$$(P)' \qquad \begin{aligned} &y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \quad \text{dans } [0,1]; \\ &y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1) \end{aligned}$$

admet une solution y. De plus $y \geqq 0$, en effet , d'après les conditions au bord, y atteint son minimum en $t_0 \in (0,1)$. Par la suite , on a $y''(t_0) = y(t_0)\alpha^*(t_0, y(t_0), 0) - \beta^*(t_0, y(t_0), 0) \geqq 0$. On en déduit que y est une solution positive de (P).

3. **Quelques remarques et conséquences.**

(3.1). *Supposons que f est une fonction continue qui vérifie les hypothèses (H1),*

(i) il existe $M_1 > 0$ et une fonction $q: [M_1, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ continue telle que:

$$|f(t, y, p)| > q(|p|) t \in [0,1], \text{ pour tout } y \in (-M, M) \text{ et } |p| > M_1.$$

Alors le problème périodique:

$$(P) \qquad y''(t) = f(t, y(t), y'(t)) \text{ dans } [0,1], \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1),$$

admet au moins une solution y dans $C^{2,1}$ telle que $-M \leqq y(t) \leqq M$ pour tout $t \in [0,1]$.

C'est une conséquence du théorème (2.1).

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-027-5 Published online by Cambridge University Press

Il est intéressant de remarquer que dans plusieurs travaux précédents (voir par exemple [4], [5], [6], [7]), l'hypothèse (i) est remplacée par une condition de croissance du type: il existe une fonction q: $[0,\infty) \longrightarrow (0,\infty)$ continue telle que:

$$|f(t,y,p)| \leqq q(|p|)t \in [0,1], \text{ pour tout } y \in [-M,M], \text{ et } \int_0^\infty [x/q(x)]\,dx > 2M.$$

(3.2). *Considérons l'équation de Liénard:*

$$y''(t) + f(t,y(t),y'(t))y'(t) - g(t,y(t)) = 0 \textit{ dans } [0,1]$$
$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1)$$

où f, g sont deux fonctions continues. Si g vérifie (H1) et f vérifie l'hypothèse suivante:

(ii) il existe $M_1 > 0$ tel que $\inf\{|f(t,y,p)| \,|\, (t,y) \in [0,1] \times [-M,M]$ et $|p| > M_1\} > 0.$

Alors l'équation de Linéard admet au moins une solution périodique.

(3.3). *Soient $\alpha(t,y,p)$ et $\beta(t,y,p)$ deux fonctions continues qui vérifient les hypothèses:*

(i) Il existe $M > 0$ tel que $(\beta(t,y,0)/y\alpha(t,y,0) \leqq 1$ et $\alpha(t,y,0) > 0)$ si $|y| = M$,

(ii) Il existe $M_1 > 0$ telle que $\alpha(t,y,p) \neq 0$ dans $[0,1], y \in [-M,M]$ et $|p| > M_1$,

(iii) $\beta(t,y,p)/\alpha(t,y,p) \longrightarrow C$ quand $|p| \longrightarrow \infty$ uniformément pour tout t dans $[0,1]$ et pour tout $y \in [-M,M]$.

Si $|C| > M$ alors le problème de type Nirenberg admet une solution périodique:

DÉMONSTRATION. Il est facile de voir que la condition (i) implique l'hypothèse (2). Il suffit maintenant de vérifier (H2). En effet, supposons que $C > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $M < C - \varepsilon$. D'après (iii), il existe M_2 tel que $C - \varepsilon < \beta(t,y,p)/\alpha(t,y,p)$ pour tout $t \in [0,1], y \in (-M,M)$ et $|p| > M_2$. Donc, $y - \beta(t,y,p)/\alpha(t,y,p) < M - (C-\varepsilon) < 0$ pour tout $(t,y) \in [0,1] \times [-M,M]$ et $|p| > M_2$. Si on prend $M_3 = \max(M_1, M_2)$, la fonction $f(t,y,p) = y\alpha(t,y,p) - \beta(t,y,p) > 0$ dans $[0,1], y \in (-M,M)$ et $|p| > M_3$. Si $C < 0$ la démonstration est similaire, et la démonstration est complète.

EXEMPLES. (1) Considérons le problème:

$$y''(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t,y(t),y'(t))y'^i(t) + \sum_{j=0}^{m} b_j(t,y(t),y'(t))y^j(t) \text{ dans } [0,1];$$
$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1).$$

Supposons que les fonctions a_i, b_j sont des fonctions continues pour tout $0 \leqq i \leqq n$ et $0 \leqq j \leqq m$ telles que :

(i) Il existe $M > 0$ tel que $\inf\{b_m(t,y,0) \mid t \in [0,1], |y| > M\} > 0$, $\sup\{|b_j(t,y,0)| \mid |y| > M\} < \infty$, pour tout $0 \leqq j \leqq m$;

(ii) il existe $M_1 > 0$ tel que $\inf\{a_n(t,y,p) \mid t \in [0,1], y \in [-M,M], |p| > M_1\} \neq 0$, $\sup\{|a_i(t,y,p)| \mid y \in [-M,M], |p| > M_1\} < \infty$, pour tout $0 \leqq i < n$.

Alors le problème (1) admet au moins une solution périodique si m est impair.

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-027-5 Published online by Cambridge University Press

Par exemple le problème périodique:

$$y''(t) = a(t)y^3(t) + b(t)y(t) - c(t)y'(t) - |y'(t)|y'(t) + d(t) \text{ dans } [0,1];$$
$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1);$$

admet une solution pour toutes les fonctions continues a, b, c et d si $a(t) > 0$.

(2) Soit $h(t)$ une fonction continue, alors le problème périodique:

$$y''(t) = \cos(t)y'^6(t) + 2e^t y(t)y'(t) + y(t) + h(t) \text{ dans } [0,1];$$
$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1)$$

admet au moins une solution périodique.

(3) Soit $h(t)$ une fonction continue positive, le problème périodique:

$$y''(t) = \sqrt{y(t)}\, y^2(t) - y'^3(t) - h(t) \text{ dans } [0,1];$$
$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1),$$

admet au moins une solution y positive. En effet, si on pose $\alpha(t,y,p) = (1 + \sqrt{y}\,y)$, $\beta(t,y,p) = y + p^3 - h(t)$ alors $y''(t) = y(t)\alpha(t,y(t),y'(t)) - \beta(t,y(t),y'(t))$ dans $[0,1]$, et $\alpha(t,y,p)$, $\beta(t,y,p)$ vérifient les hypothèses du théorème 3.

RÉFÉRENCES

1. S. Bernstein, Sur les équations du calcul des variations, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., **29**(1912), 431–485.

2. J. Dugundji , A. Granas, Fixed point theory, **1** P.W.N. Warszawa 1982.

3. A. Granas, Sur la méthode de continuité de Poincaré, C.R. Acad. Sci. Paris, **282**(1976), 983–985.

4. A. Granas, Z. E. A. Guennoun, Quelques résulats dans la théorie de Bernstein-Carathéodory de l'équation $y'' = f(t,y,y')$, C.R. Acad. Sci. Paris, série I, **306**(1988), 703–706.

5. A. Granas, R. B. Guenther, J. W. Lee, On a theorem of S. Bernstein, Pacific J. of Math., **74**(1978), 67–82.

6. ———, Non linear boundary value problems for some classes of ordinary differential equations, Rocky Mountain J. of Math. , **10**(1980), 35–58.

7. ———, Non linear boundary value problems for ordinary differential equations, Dissertationes Mathematicae, CCXLIV, Warszawa (1985).

8. ———, Topological transversality II: Application to the Neumann problem for $y'' = f(t,y,y')$, Pacific J. Math., **104**(1983), 95–109.

9. Z. E.A. Guennoun, Existence de solutions au sens de Carathéodory pour des problèmes aux limites non linéaires, Thèse de doctorat, Université de Montréal, 1989.

10. J. Mawhin, N. Rouche, Equation différentielle ordinaires, stabilité et solutions périodiques, **2**, Masson et Cie, Paris, (1973) .

11. L. Nirenberg, Functional analysis, New York University Lecture Note Series, 1960.

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-027-5 Published online by Cambridge University Press

12. W. V. Petryshyn, Solvability of various boundary problems for the equation $x'' = f(t, x, x', x'') - y$, Pacific J. Math., , No. 2, **121**(1986), 169–195.

13. F. Stoppelli, Su di una equazione differenziale nonlineare della meccanica dei fili, Rend. Accad. Sci. Fis. Mat. Napoli, (4) **19**(1952), 109–114.

Département de Math.-Phys.-Inf.
Université de Moncton
Moncton, N.- B. E1A 3E9

https://doi.org/10.4153/CMB-1992-027-5 Published online by Cambridge University Press