Canad. Math. Bull. Vol. **45** (2), 2002 pp. 161–167

Sur les singularités de la fonction croissance d'une variété non simplement connexe

Lucia Ardizzone, Renata Grimaldi et Pierre Pansu

Résumé. Si M est une variété de dimension n, compacte non simplement connexe, on caractérise les métriques riemanniennes sur M dont la fonction croissance a exactement deux singularités.

1 Introduction

Soient (M, g) une variété riemannienne C^∞, complète, de dimension n, et $B(x, r)$ la boule géodésique fermée de centre $x \in M$ et de rayon $r > 0$; on appelle *fonction croissance* de M au point x la fonction réelle

$$v(r) = \begin{cases} 0 & \text{si } r \leq 0 \\ \operatorname{vol}_g B(x, r) & \text{si } r > 0. \end{cases}$$

Dans les articles [3], [4] et [5] les auteurs ont montré que si M est non simplement connexe, alors la fonction v ne peut pas être plus que $C^{\frac{n+1}{2}}$ en $\lambda/2$ où λ est la plus petite longueur d'un lacet en x non homotope à zéro. En outre elle ne peut pas être C^n en 0.

Après, dans [6], les auteurs ont étudié le nombre minimum de singularités de la fonction croissance de (M, g) en dimension deux.

Dans cette note on va caractériser, pour les variétés compactes non simplement connexes, les métriques riemanniennes C^∞ dont la fonction croissance a exactement deux singularités (voir Théorème 1) et les fonctions réelles C^∞ sauf en deux points qui peuvent être fonction croissance d'une métrique riemannienne C^∞ sur une variété compacte non simplement connexe (voir Théorème 2).

2 Les résultats

Théorème 1 *Soit D le disque de rayon λ dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\tilde{g} = dr^2 + g_r$ une métrique riemannienne lisse sur D, où g_r est une métrique lisse sur S^{n-1} qui dépend de r (la distance à l'origine dans D). On suppose qu'il existe un difféomorphisme ϕ de la sphère S^{n-1}, sans points fixes, tel que $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ et, $\forall r \in (0, \lambda)$, $\phi^*(g_r) = g_{\lambda - r}$. Alors*

Reçu par la rédaction le 10 novembre, 2000.
Travail réalisé dans le groupe GNSAGA de l'INDAM et avec le concours du MURST d'Italie.
Classification (AMS) par sujet: 53B20.
Mots clés: fonction croissance, singularités, fonction de Morse, Cutlocus.

i) *$\tilde{g}$ se prolonge en une métrique lisse $\bar{g}$ sur une variété Y homéomorphe à la sphère S^n;*
ii) *l'application $\psi\colon (0,\lambda)\times S^{n-1} \to (0,\lambda)\times S^{n-1}$ définie par $\psi(r,\theta) = \big(\lambda - r, \phi(\theta)\big)$ se prolonge en une involution sans points fixes (notée Φ) de Y qui preserve $\bar{g}$;*
iii) *$\bar{g}$ passe au quotient. La métrique quotient g sur Y/Φ a la propriété suivante: la fonction croissance $v(r) = \mathrm{vol}_g B(x,r)$, où x correspond à l'origine du disque D, est lisse sauf en 0 et en $\lambda/2$ (sa derivée $v'(r)$ est discontinue en $\lambda/2$ et $v^{(n)}(r)$ est discontinue en 0).*

Réciproquement, soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n, compacte non simplement connexe et $x \in M$ tel que la fonction croissance en x soit lisse sauf en deux points, 0 et $\lambda/2$. Alors g est obtenue par la construction précédente.

Remarque Lorsque $n \le 4$, le difféomorphisme ϕ est nécessairement différentiablement conjugué à l'antipodie, voir [9], et la variété Y/Φ est difféomorphe à l'espace projectif. Ce n'est plus vrai en dimension plus grande, voir [1] pour la dimension 5, [7] pour les dimensions 6 et 7, [11] en dimension 8, et [8, p. 127], [10] pour davantage de résultats.

Théorème 2 *Soit $v(r)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, C^∞ sauf en deux points, 0 et $\lambda/2$. Alors $v(r)$ est la fonction croissance d'une métrique lisse sur (M,g), variété riemannienne de dimension n, compacte non simplement connexe, si et seulement si il existe une fonction $w(r)$ lisse sur $\mathbb{R}$ telle que:*

i) *$v'(r) = w(r)$ sur $(0,\lambda/2)$ et $v'(r) = 0$ ailleurs;*
ii) *$w(0) = 0$, $w(r) > 0$ sur $(0,\lambda/2)$ et $\lim_{r\to 0} \frac{w(r)}{r^{n-1}} = c = \mathrm{vol}(S^{n-1}, \mathrm{can})$;*
iii) *$w(-r) = (-1)^{n-1} w(r)$, $w(\lambda - r) = w(r)$.*

3 Preuves

Preuve du théorème 1 Soit $\phi \in \mathrm{Diff}(S^{n-1})$ sans points fixes et tel que $\phi\circ\phi = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ et $\phi^*(g_r) = g_{\lambda-r}$, $\forall r \in (0,\lambda)$, où g_r est une métrique lisse sur S^{n-1} qui dépend de r.

Grâce aux coordonnées polaires de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ on voit $\tilde{g} = dr^2 + g_r$ comme une métrique lisse sur le disque ouvert D^* de rayon λ privé de l'origine.

On suppose que $\tilde{g}$ se prolonge en une métrique lisse sur le disque $D = D^* \cup \{0\}$; alors $\tilde{g}$ définit une métrique lisse $\bar{g}$ sur une variété Y homéomorphe à la sphère S^{n-1}. En effet, considérons le difféomorphisme $\psi\colon D^* \to D^* \psi(r,\theta) = \big(\lambda - r, \phi(\theta)\big)$. Soit X la réunion de deux copies disjointes D_1 et D_2 de D et soit Y l'espace quotient de X par la relation d'équivalence suivante:

$$p \sim q = \begin{cases} \text{si } p = q \\ \text{ou } p \in D_1^*, \quad q \in D_2^* \text{ et } q = \psi(p), \\ \text{ou } q \in D_1^*, \quad p \in D_2^* \text{ et } q = \psi^{-1}(p). \end{cases}$$

Alors Y est une variété de classe C^∞ homéomorphe à la sphère S^n. En effet, la fonction réelle $f\colon Y \to \mathbb{R}$, définie par $f(r,\theta) = \cos(\pi\frac{r}{\lambda})$, est une fonction de Morse avec deux points critiques ($r = 0$, $r = \lambda$) et donc $Y \cong S^n$. On a $\psi^*\tilde{g} = \tilde{g}$: en fait $\psi^*\tilde{g}$ en un point $(r,\theta) \in D^*$ est égal à $\tilde{g}$ au point $\big(\lambda - r, \phi(\theta)\big)$, mais $\phi^*(g_r) = g_{\lambda-r}$ et $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ et alors $g_{\lambda-r}$ au point $\phi(\theta)$ est égal à g_r au point θ, *i.e.*, $\psi^*\tilde{g}$ au point (r,θ) est égal à $\tilde{g}$ au même point (r,θ).

Alors la métrique $\tilde{g}$ sur X est compatible avec la relation d'équivalence et donne une métrique $\bar{g}$ lisse sur Y. L'application $X \to X$ qui échange D_1 et D_2 est compatible avec la relation d'équivalence, donc induit un difféomorphisme noté Φ de Y. C'est clairement une isométrie et une involution sans points fixes.

Dans le quotient $(Z,g) \cong (Y,\bar{g})/\Phi$, la fonction croissance au point x (qui correspond à l'origine de D_1 ou de D_2) est lisse sauf en 0 et en $\lambda/2$ (qui est le rayon d'injectivité de g (voir [2])): $v'(r)$ est discontinue en $\lambda/2$ parce que, pour $r \geq \lambda/2$, $v(r) = \text{constante} = v(\lambda/2)$ et, pour $0 < r < \lambda/2$, $v'(r) \neq 0$; en outre $v^{(n)}(r)$ est discontinue en 0.

Inversement, en utilisant la démonstration du lemme 1 de [6] et la preuve du théorème 2 de [5], on a:

Lemme 1 *Soit (M,g) une variété riemannienne de dimension n compacte non simplement connexe et $x \in M$ tels que $\lambda/2 = L$, où λ est la longueur du plus petit lacet en x non homotope à 0 et*

$$L = \sup_{y \in M} d(x,y).$$

Alors toutes les géodésiques issues de x reviennent en x au bout du temps λ et forment un lacet non homotope à 0. Tous ces lacets sont deux à deux homotopes et ils représentent le seul élément non trivial du groupe fondamental de M.

Preuve du lemme 1 En effet, sous l'hypothèse $\lambda/2 = L$, on montre de la même façon que dans [6] que l'ensemble $W = \{\theta \in S^{n-1} /$ la géodésique issue de x dans la direction θ revient en x au bout du temps λ et forme un lacet non homotope à $0\}$ est ouvert et fermé dans S^{n-1}, puis on conclut que $W = S^{n-1}$.

Notons γ_θ le lacet géodésique d'origine x, de direction θ, de longueur γ. Notons $\phi(\theta) = -\gamma_\theta'(\lambda)$ l'opposé du vecteur vitesse de γ_θ à son arrivée en x. Alors $\lambda_{\phi(\theta)}$ est le lacet γ_θ parcouru en sens inverse, donc $\phi \circ \phi(\theta) = \theta$. Par conséquent, ϕ est un difféomorphisme de classe C^∞ de S^{n-1}. Comme γ_θ dépend continûment de θ, sa classe d'homotopie c est indépendante de θ. Or $c = [\gamma_\phi(\theta)] = [\gamma_\theta]^{-1} = c^{-1}$ donc $c^2 = 1$ dans $\pi_1(M,x)$. Toute classe d'homotopie est représentée par un lacet géodésique d'origine x. Un tel lacet est un produit de lacets de la forme γ_θ. On conclut que $\pi_1(M,x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est engendré par c. ■

Fin de la preuve du théorème 1 On garde les hypothèses du lemme 1. Notons $\pi \colon \widetilde{M} \to (M,g)$ le revêtement universel avec métrique $\tilde{g} = \pi^*g$. Soient $\widetilde{x_1}$ et $\widetilde{x_2}$ les images réciproques de x dans $\widetilde{M}$. Le seul point conjugué à $\widetilde{x_1}$ est $\widetilde{x_2}$ (cela resulte du fait que toutes les géodésiques de $\widetilde{x_1}$ à $\widetilde{x_2}$ sont minimisantes et qu'il n'y a pas de points conjugués le long de géodésiques minimisantes). Donc $\mathrm{Cutlocus}(\widetilde{x_1}) = \{\widetilde{x_2}\}$. En coordonnées polaires d'origine (par exemple) $\widetilde{x_1}$, la métrique $\tilde{g}$ s'écrit $\tilde{g} = dr^2 + g_r$, où g_r est une métrique lisse sur S^{n-1}, qui dépend de r (r est la distance à l'origine $\widetilde{x_1}$ dans

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-019-2 Published online by Cambridge University Press

$\widetilde{M}$). On va montrer que $\widetilde{M}$ est homéomorphe à la sphère S^n. En fait, la fonction réelle $f\colon \widetilde{M} \to \mathbb{R}$, définie par $f(r,\theta) = \cos(\pi r/\lambda)$, est une fonction de Morse avec deux points critiques ($r = 0$, $r = \lambda$) et donc $\widetilde{M} \cong S^n$. La transformation de revêtement ψ est un difféomorphisme de $\widetilde{M}$ qui est une isométrie de $\tilde{g}$: $\psi^*\tilde{g} = \tilde{g}$. Par conséquent, elle transforme la distance à $\widetilde{x_1}$ en la distance à $\widetilde{x_2}$, *i.e.*, r en $\lambda - r$, elle envoie chaque géodésique $r \mapsto (r,\theta)$ sur une autre géodésique $r \mapsto \big(\lambda - r, \phi(\theta)\big)$ où $\phi \in \mathrm{Diff}(S^{n-1})$: donc elle s'écrit $\psi\colon (r,\theta) \to \big(\lambda - r, \phi(\theta)\big)$. Comme ψ n'a pas de points fixes, ϕ n'a pas de points fixes non plus; en outre $\psi \circ \psi = \mathrm{id}_{S^n}$ alors $\phi \circ \phi = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ et puisque ψ est une isométrie, *i.e.*, $\psi^*\tilde{g} = \tilde{g}$, on a $\phi^*(g_r) = g_{\lambda - r}$, $0 < r < \lambda$. ■

Preuve du théorème 2 Soit g une métrique sur M, variété riemannienne de dimension n, compacte non simplement connexe, de croissance $\nu(r)$ en $x \in M$, lisse au dehors de 0 et de $\lambda/2$. Soit $\pi\colon (\widetilde{M}, \tilde{g}) \to (M, g)$ le revêtement universel riemannien, $\tilde{x}$ un point de $\pi^{-1}(x)$. D'après le théorème 1, g est le quotient de la métrique $\tilde{g} = dr^2 + g_r$ où g_r est une métrique lisse sur S^{n-1} qui dépend de r et $\phi^*(g_r) = g_{\lambda - r}$, où $\phi \in \mathrm{Diff}(S^{n-1})$ (le rayon d'injectivité de $\tilde{g}$ est égal à λ).

Notons, pour $0 < r < \lambda$,

$$w(r) = \text{volume}_{\tilde{g}} \text{ de la sphère géodésique } S(\tilde{x}, r) \text{ de rayon } r \text{ et de centre } \tilde{x}.$$

Cette fonction est lisse sur $(0,\lambda)$ et, comme la transformation de revêtement ψ est une isométrie, $\psi\big(S(\tilde{x}, r)\big) = S\big(\psi(\tilde{x}), r\big) = S(\tilde{x}, \lambda - r)$ et donc $w(\lambda - r) = w(r)$. Lorsque r tend vers 0, $r^{-2} g_r$ tend vers la métrique canonique, donc

$$\lim_{r \to 0} \frac{w(r)}{r^{n-1}} = \mathrm{vol}(S^{n-1}, \mathrm{can}).$$

Il reste à montrer que $w(r)$ se prolonge en une fonction lisse au voisinage de 0 et telle que $w(-r) = (-1)^{n-1} w(r)$.

Lemme 2 *Soit (M, g) une variété riemannienne lisse de dimension n et $x \in M$. Pour $r > 0$ on pose*

$$w(r) = \textit{volume } (n-1)\textit{-dimensionnel de la sphère de centre } x \textit{ et de rayon } r.$$

Alors $w(r)$ se prolonge en une fonction lisse sur $(-\varepsilon, \varepsilon)$, pour $\varepsilon = \mathrm{inj}(x)$, et telle que $w(-r) = (-1)^{n-1} w(r)$.

Preuve du lemme 2 Pour $z \in \mathbb{R}^n$ vu comme espace tangent à l'origine, soit $\exp_x(z)$ son image par l'exponentielle associée à g; soit $J(z)$ le jacobien $\frac{\exp_z^* \mathrm{vol}\, g}{\mathrm{vol}\, g_1}$ (g_1 est la métrique canonique de $\mathbb{R}^n$). C'est une fonction C^∞ au voisinage de 0.

Soit $S^{n-1} = \{z \in \mathbb{R}^n / \|z\| = 1\}$. On pose, pour r voisin de 0, $z \in S^{n-1}$, $\Theta(r,z) = r^{n-1} J(rz)$ (pour $0 < r < \mathrm{inj}(x) = \varepsilon$, $\Theta(r,z)$ est la densité en coordonnées polaires). Alors Θ est de classe C^∞ et

$$\Theta(-r,z) = (-r)^{n-1} J\big((-r)z\big) = (-1)^{n-1} r^{n-1} J\big(r(-z)\big) = (-1)^{n-1}\Theta(r,-z).$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-019-2 Published online by Cambridge University Press

Posons

$$\bar{w}(r) = \int_{S^{n-1}} \Theta(r,\theta)\, d\theta;$$

c'est une fonction lisse au voisinage de 0 (sur $(-\varepsilon,\varepsilon)$) qui satisfait

$$\begin{aligned}\bar{w}(-r) &= \int_{S^{n-1}} \Theta(-r,\theta)\, d\theta = \int_{S^{n-1}} (-1)^{n-1}\Theta(r,-\theta)\, d\theta \\ &= (-1)^{n-1}\int_{S^{n-1}} \Theta(r,\theta)\, d\theta = (-1)^{n-1}\bar{w}(r)\end{aligned}$$

(on a utilisé la formule de changement de variable pour l'application antipodale).

Enfin, pour $r > 0$ assez petit, $\bar{w}(r) = w(r)$. ■

Inversement, soit $v(r)$ une fonction sur $\mathbb{R}$ qui satisfait aux hypothèses du théorème 2. Sur S^{n-1} on considère la métrique $g_r = (\frac{w(r)}{c})^{\frac{2}{n-1}} g_0$ où $r \in (0,\lambda)$, g_0 est la métrique canonique de S^{n-1} et $c = \operatorname{vol}(S^{n-1}, g_0)$.

Soit $\phi\colon S^{n-1} \to S^{n-1}$ telle que $\phi(\theta) = -\theta$ pour $\theta \in S^{n-1}$. Alors $\phi \in \operatorname{Diff}(S^{n-1})$ et ϕ satisfait $\phi^*(g_r) = g_{\lambda-r}$.

Verifions que ce couple (g_r,ϕ) satisfait aux hypothèses du théorème 1:

$$g_{\lambda-r} = \left(\frac{w(\lambda-r)}{c}\right)^{\frac{2}{n-1}}, \quad g_0 = \left(\frac{w(r)}{c}\right)^{\frac{2}{n-1}} g, \quad g_0 = \phi^*(g_r).$$

Il suffit alors de montrer que $\tilde{g} = dr^2 + g_r = dr^2 + (\frac{w(r)}{c})^{\frac{2}{n-1}} g_0$ est de classe C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des coordonnées cartesiennes sur $\mathbb{R}^n$; on peut écrire

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= dr^2 + \left(\frac{w(r)}{c}\right)^{\frac{2}{n-1}} g_0 = dr^2 + \left[\left(\frac{w(r)}{c}\right)^{\frac{2}{n-1}} - r^2 + r^2\right] g_0 \\ &= dr^2 + r^2 g_0 + \left[\left(\frac{w(r)}{c}\right)^{\frac{2}{n-1}} - r^2\right] g_0 = \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 + \left[\left(\frac{w(r)}{c}\right)^{\frac{2}{n-1}} - r^2\right] g_0;\end{aligned}$$

où $g_0 = \left[\sum_{i=1}^n (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + \hat{x}_i^2 + \cdots + x_n^2) dx_i^2 - 2\sum_{i,j=1, i<j}^n x_i x_j dx_i dx_j\right]/r^4$.

Montrons que $(\frac{w(r)}{c})^{\frac{2}{n-1}}$ se prolonge en une fonction C^∞ au voisinage de 0.

Lemme 3 *Soit w une fonction C^∞ au voisinage de 0 telle que:*

i) $\lim_{r\to 0} \frac{w(r)}{r^{n-1}} = c > 0$;
ii) $w(-r) = (-1)^{n-1} w(r)$.

Alors il existe une fonction h de classe C^∞ au voisinage de 0 telle que $(\frac{w(r)}{c})^{\frac{2}{n-1}} = r^2 + r^4 h(r^2)$ pour $r > 0$.

https://doi.org/10.4153/CMB-2002-019-2 Published online by Cambridge University Press

Preuve du lemme 3 Avec i), la formule de Taylor permet d'écrire $w(r) = cr^{n-1}k(r)$ où k est lisse et $k(0) = 1$.

La fonction $k^{\frac{2}{n-1}}$ est aussi lisse au voisinage de 0. D'après ii), elle est paire, donc il existe une fonction l lisse au voisinage de 0 telle que

$$k(r)^{\frac{2}{n-1}} = l(r^2).$$

Comme $l(0) = 1$, on peut ècrire $l(u) = 1 + uh(u)$ où h est lisse. Par conséquent, pour $r > 0$,

$$\left(\frac{w(r)}{c}\right)^{\frac{2}{n-1}} = r^2 k(r)^{\frac{2}{n-1}} = r^2 + r^4 h(r^2). \qquad \blacksquare$$

Fin de la preuve du théorème 2 Par le lemme 3 on a

$$\begin{aligned}\tilde{g} &= \sum_{i=1}^{n} dx_i^2 \\ &\quad + h(x_1^2 + \cdots + x_n^2)\Big[\sum_{i=1}^{n}(x_1^2 + \cdots + \hat{x}_i^2 + \cdots + x_n^2)dx_i^2 - 2\sum_{i,j=1,i<j}^{n} x_i x_j dx_i dx_j\Big] \\ &= \sum_{i=1}^{n}[1 + h(x_1^2 + \cdots + x_n^2)(x_1 + \cdots + \hat{x}_i^2 + \cdots + x_n^2)]dx_i^2 \\ &\quad - 2\sum_{i,j=1,i<j}^{n} h(x_1^2 + \cdots + x_n^2)x_i x_j dx_i dx_j\end{aligned}$$

est C^∞ au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

D'après le théorème 1, $\tilde{g}$ induit une métrique lisse sur $S^n/\Psi = \mathbb{R}P^n$ (car l'involution ϕ est l'antipodie) dont la croissance en x est $v(r)$.

Références

[1] S. Akbulut et R. Kirby, *An exotic involution of S^4*. Topology **18**(1979), 75–82.
[2] S. Gallot, D. Hulin et J. Lafontaine, *Riemannian Geometry.* Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
[3] R. Grimaldi et P. Pansu, *Sur la croissance du volume dans une classe conforme.* J. Math. Pures Appl. **71**(1992), 1–19.
[4] ———, *Sur la régularité de la fonction croissance d'une variété riemannienne.* Geom. Dedicata (3) **50**(1994), 301–307.
[5] ———, *Sur le degré de différentiabilité de la fonction croissance en dimension deux.* Boll. Un. Mat. Ital. B (7) suppl. (2) **11**(1997), 25–38.
[6] ———, *Nombre de singularités de la fonction croissance en dimension 2.* Bull. Soc. Math. Belg. **8**(2001), 1–10.
[7] M. W. Hirsch et J. Milnor, *Some curious involutions of spheres.* Bull. Amer. Math. Soc. **70**(1964), 603–611.
[8] F. Hirzebruch et K. H. Mayer, *$O(n)$-Mannigfaltigkeiten, exotische Sphären und Singularitäten.* Lecture Notes in Math. **57**, Springer-Verlag, Berlin, 1968.
[9] G. R. Livesay, *Fixed point free involutions on the 3-sphere.* Ann. of Math. **72**(1960), 603–611.

[10] S. Lopez de Medrano, *Involutions on manifolds.* Ergebnisse der Math. **59**, Springer-Verlag, Berlin, 1971.
[11] K. H. Mayer, *Fixpunktfreie Involutionen von 7-Sphären.* Math. Ann. **185**(1970), 250–258.

Dipartimento di Matematica ed Appl.
Fac. di Ingegneria
Viale delle Scienze
90128 Palermo
Italie
courriel: ardizz@unipa.it
grimaldi@dipmat.math.unipa.it

Université Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay Cedex
France
courriel: Pierre.Pansu@math.u-psud.fr