COMPOSITIO MATHEMATICA

Applications du théorème d'Ax–Lindemann hyperbolique

Emmanuel Ullmo

Compositio Math. **150** (2014), 175–190.

doi:10.1112/S0010437X13007446

FOUNDATION COMPOSITIO MATHEMATICA

LONDON MATHEMATICAL SOCIETY

Compositio Math. 150 (2014) 175–190
doi:10.1112/S0010437X13007446

Applications du théorème d'Ax–Lindemann hyperbolique

Emmanuel Ullmo

Abstract

We explain how the André–Oort conjecture for a general Shimura variety can be deduced from the hyperbolic Ax–Lindemann conjecture, a good lower bound for Galois orbits of special points and the definability, in the o-minimal structure $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$, of the restriction to a fundamental set of the uniformizing map of a Shimura variety. These ingredients are known in some important cases. As a consequence a proof of the André–Oort conjecture for projective special subvarieties of $\mathcal{A}_6^N$ for an arbitrary integer N is given.

1. Introduction

Soit (G, X) une donnée de Shimura, X^+ une composante connexe de X. Soit $G(\mathbb{Q})_+$ le stabilisateur de X^+ dans $G(\mathbb{Q})$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma = G(\mathbb{Q})_+ \cap K$. Alors $S = \Gamma\backslash X^+$ est une composante connexe de la variété de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) := G(\mathbb{Q})_+\backslash X^+ \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

On définit dans cette situation les notions de points spéciaux, de sous-variétés spéciales et de sous-variétés faiblement spéciales de S. Ces notions classiques sont explicitées dans la section 3. La conjecture d'André–Oort est alors l'énoncé suivant analogue de la conjecture de Manin–Mumford concernant les variétés abéliennes.

Conjecture 1.1. Une composante de l'adhérence de Zariski d'un ensemble de points spéciaux de S est une sous-variété spéciale. Une forme équivalente s'énonce de la manière suivante. Pour toute sous-variété V de S, l'ensemble des sous-variétés spéciales de S qui sont contenues dans V et maximales parmi les sous-variétés spéciales contenues dans V est de cardinal fini.

Cette conjecture a été démontrée récemment sous l'hypothèse de Riemann généralisée (voir [KY06, UY06]).

La conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique est un énoncé de transcendance fonctionnelle concernant l'application d'uniformisation d'une variété de Shimura. Son rôle pour une possible preuve inconditionnelle de conjecture d'André–Oort a été dégagé par Pila [Pil11] à la suite de son travail avec Zannier [PZ08] qui utilise un énoncé de type Ax–Lindemann pour une nouvelle preuve de la conjecture de Manin–Mumford.

Rappelons tout d'abord l'énoncé de cette conjecture. Soit $X^+ \subset \mathbb{C}^N$ la réalisation d'Harish-Chandra de l'espace symétrique hermitien X^+. Soit $\pi : X^+ \to S$ l'application d'uniformisation. On définit les ensembles algébriques irréductibles de X^+ comme les composantes irréductibles (en tant qu'ensemble analytique complexe) d'intersections de X^+ avec des sous-variétés algébriques

Received 28 August 2012, accepted in final form 12 June 2013, published online 19 November 2013.
2010 Mathematics Subject Classification 03C64, 11G18, 14G35 (primary).
Keywords: arithmetic geometry, Shimura varieties, o-minimality.

de $\mathbb{C}^N$. Un ensemble algébrique de X est alors une union finie d'ensembles algébriques irréductibles. Soit V une sous-variété de S et soit $\tilde{V}$ une composante irréductible de $\pi^{-1}(V)$. La conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique pour V est alors l'énoncé suivant.

Conjecture 1.2. Soit Y une sous-variété algébrique irréductible de $\tilde{V}$ maximale parmi les sous-variétés algébriques irréductibles de $\tilde{V}$. Alors $\pi(Y)$ est une sous-variété faiblement spéciale de V.

Cette conjecture est connu quand S est un produit de courbes modulaires [Pil11], quand S est le module des surfaces abéliennes principalement polarisées [PT11, Theorem 1.2] et quand S est une variété projective (autrement dit quand S est défini à l'aide d'une donnée de Shimura (G, X) avec G anisotrope sur $\mathbb{Q}$). C'est le résultat principal de [UY12].

Les principales étapes de la stratégie de Pila pour la conjecture d'André–Oort peuvent être décrites informellement de la manière suivante. On fixe un domaine fondamental $\mathcal{F}$ pour l'action de Γ sur X^+. On fixe une sous-variétés V de S et on cherche à montrer la conjecture d'André–Oort pour V. On fait deux hypothèses sur $V \neq S$ qui sont suffisantes pour les applications. On suppose que V est Hodge générique dans S. Cela signifie que V n'est pas contenu dans une sous-variété spéciale S' de S avec $S' \neq S$. Dans le cas contraire on remplace S par S'. Si $S = S_1 \times S_2$ est un produit de variétés de Shimura, on suppose que V n'est pas de la forme $V = S_1 \times V'$ pour une sous-variété V' de S_2. Dans le cas contraire on remplace V par V' et S par S_2. Il y a alors les étapes suivantes :

(i) Montrer que pour un choix convenable de $\mathcal{F}$, l'application $\pi : \mathcal{F} \longrightarrow S$ est définissable dans la structure o-minimale $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$. Quand ce résultat est connu, on dira que la condition (i) est vérifiée.

(ii) Minoration de la taille des orbites sous Galois des points spéciaux de S.

(iii) Estimation de la hauteur $H(x)$ des points $x \in \mathcal{F}$ tels que $\pi(x)$ est spécial dans S.

(iv) La conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique pour V.

Quand des versions précises (que nous discutons dans la section 2) de ces quatre étapes sont connues, une utilisation du théorème de Pila–Wilkie [PW06] assure qu'il n'y a qu'un nombre fini de sous-variétés spéciales maximales de V qui sont de dimension 0. Autrement dit les points spéciaux de V sauf un nombre fini d'entre eux sont contenus dans des sous-variétés spéciales de V de dimension positive.

Le but de ce texte est de montrer que les étapes précédentes suffisent en fait pour une preuve de la conjecture d'André–Oort. Le résultat principal est le théorème suivant (cf. Théorème 4.1).

Théorème 1.3. *Soit V une sous-variété Hodge générique stricte de S. Si $S = S_1 \times S_2$ est un produit de variétés de Shimura, on suppose que V n'est pas de la forme $V = S_1 \times V'$ pour une sous-variété V' de S_2. On suppose que la conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique pour V est vérifiée ainsi que la condition (i) alors l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales de dimension positive contenues dans V n'est pas Zariski dense dans V.*

Comme la conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique est connue pour les sous-variétés des variétés de Shimura projectives et que dans ce cas la condition (i) est aussi vérifiée d'après les résultats de [UY12] on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 1.4. *Soit S une variété de Shimura projective. Soit V une sous-variété Hodge générique de S avec $V \neq S$. Si $S = S_1 \times S_2$ est un produit de variétés de Shimura, on suppose que V n'est pas de la forme $V = S_1 \times V'$ pour une sous-variété V' de S_2. Alors l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales de dimension positive contenues dans V n'est pas Zariski dense dans V.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

Notons que dans la preuve de André–Oort sous l'hypothèse de Riemann généralisée [KY06, UY06] pour montrer la finitude des sous-variétés spéciales maximales de V de dimension positive un travail considérable est nécéssaire combinant entre autre, une minoration du degré des orbites sous Galois des sous-variétés spéciales de dimension positive, des théorèmes d'équidistribution de sous-variétés spéciales, des propriétés des opérateurs de Hecke et des techniques mélangeant de la théorie de Galois et de la géométrie arithmétique. La conjecture d'Ax–Lindemann permet donc quand elle est démontrée une simplification conceptuelle considérable.

Dans les années précédentes de nombreux progrès ont été obtenus sur les différentes étapes de la stratégie de Pila et Zannier pour la conjecture d'André–Oort.

Soit g un entier et $\mathcal{A}_g$ l'espace des modules des variétés abéliennes principalement polarisées. Le point (i) est obtenu par Peterzil et Starchenko [PS11] pour $\mathcal{A}_g$ et est très simple pour les variétés de Shimura projectives [UY06]. La minoration de la taille des orbites sous Galois des points CM est obtenu simultanément par Yafaev et l'auteur du texte dans [UY11b] pour $g \leqslant 3$ et par Tsimerman [Tsi11] pour $g \leqslant 6$. Enfin le point (iii) est connu pour $\mathcal{A}_g$ pour tout g d'après les résultats de Pila et Tsimerman [PT11, Theorem 3.1].

En combinant le résultat principal de ce texte, la conjecture d'Ax Lindemann hyperbolique pour les sous-variétés des variétés de Shimura projectives [UY12, Theorem 1.2] et les progès récents dans la méthode de Pila Zannier précédemment décrits, on obtient le théorème suivant.

Théorème 1.5. *Soit S une variété de Shimura projective telle que S est une sous-variété de Shimura de $\mathcal{A}_6^r$ pour un entier arbitraire r. La conjecture d'André–Oort vaut pour S.*

Voici un résumé rapide du contenu de ce texte.

La section 2 explicite la stratégie de Pila Zannier pour la conjecture d'André–Oort. Elle ne contient aucun résultat vraiment significatif nouveau mais on y précise les étapes (i) à (iv) en partie conjecturales pour une variété de Shimura arbitraire et on y présente les résultats nécessaires à la preuve du théorème 1.5 qui est donnée dans la dernière section.

Dans la section 3 on présente les définitions et certaines propriétés des sous-variétés faiblement spéciales des variétés de Shimura.

Le résultat principal du texte est obtenu dans la section 4 où le théorème 4.1 est obtenu.

Remarque 1.6. Jonathan Pila m'a informé qu'il a obtenu en collaboration avec Jacob Tsimermann une preuve de la conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique pour $\mathcal{A}_g$ avec g arbitraire. En utilisant le théorème principal du texte, on peut en déduire la conjecture d'André–Oort pour $\mathcal{A}_6^r$ ou donner une nouvelle preuve du fait que la conjecture de Riemann généralisée entraine André–Oort pour $\mathcal{A}_g$. Des résultats analogues sont aussi annoncés par Pila et Tsimermann par des méthodes probablement assez proches [PT12].

2. La stratégie de Pila–Zannier pour la conjecture d'André–Oort

Le but de cette section préliminaire est de préciser les étapes de la stratégie de Pila–Zannier pour la conjecture d'André–Oort pour une variété de Shimura arbitraire.

2.1 Réalisations des espaces symétriques hermitiens

Soit $G_{\mathbb{R}}$ un groupe réductif sur $\mathbb{R}$ de centre $Z_{\mathbb{R}}$ et soit K_∞ un sous-groupe compact maximal $G(\mathbb{R})$. On suppose que l'espace symétrique

$$X = X_G = G(\mathbb{R})/Z(\mathbb{R})K_\infty$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

est hermitien. On dispose de plusieurs réalisations de X et on souhaite vérifier que les énoncés que l'on a en vue sont indépendants de ces réalisations.

On considère trois types de réalisations. La réalisation d'Harish-Chandra comme un domaine hermitien bornée $\mathcal{D} = \mathcal{D}_G$ dans l'espace tangent holomorphe $\mathfrak{p}^+$ de X en un point base x_0. Via le plongement de Borel on dispose aussi d'une réalisation $X_{B,G}$ comme sous-variété analytique complexe du dual compact $X^\vee$ de X.

Quand $G = \mathrm{GSp}_{g,\mathbb{R}}$ la réalisation d'Harish-Chandra de l'espace symétrique $X_{\mathrm{GSp}_g} = G(\mathbb{R})/\mathbb{R}^* K_\infty$ de G est

$$\mathcal{D}_g = \{z \in M_n(\mathbb{C}) |^t z = z,^t \overline{z} z - I_n < 0\}$$

et on dispose aussi de la réalisation de Siegel de X_{GSp_g} donnée par

$$\mathbb{H}_g := \{z \in M_n(\mathbb{C}),^t Z = Z, \mathrm{Im}(Z) > 0\}.$$

Plus généralement une réalisation $\mathcal{X} = \mathcal{X}_G$ de X est un sous-ensemble analytique $\mathcal{X}$ d'une variété algébrique complexe $\tilde{\mathcal{X}}$ telle que $\mathcal{X}$ est muni d'une action transitive de $G(\mathbb{R})^+$ telle que pour tout $x_0 \in \mathcal{X}$ l'application

$$\begin{aligned} \psi_{x_0} : G(\mathbb{R}) &\to \mathcal{X} \\ g &\mapsto g.x_0 \end{aligned}$$

est semi-algébrique et qui fait de $\mathcal{X}$ un espace symétrique hermitien associé à $G(\mathbb{R})$. Soient $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ deux réalisations de X_G un isomorphisme de réalisations est la donnée d'un biholomorphisme $\psi : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ qui est $G(\mathbb{R})^+$-équivariant.

Lemme 2.1. *Soit $\mathcal{X}$ une réalisation de X_G. Alors $\mathcal{X}$ est semi-algébrique.*

Soit $\psi : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ un isomorphisme de réalisations de X_G. Alors ψ est une application semi-algébrique.

Démonstration. Notons qu'une preuve de la première partie du lemme est montré dans [UY12] pour les réalisations d'Harish-Chandra de X_G et que les définitions de $\mathcal{D}_g$ et $\mathbb{H}_g$ montrent aussi qu'ils sont semi-algébriques.

Plus généralement, soit x_0 un point de $\mathcal{X}$. Alors $\mathcal{X}$ est défini par la formule

$$\mathcal{X} := \{g.x_0, g \in G(\mathbb{R})^+\}.$$

avec une action semi-algébrique donc est semi-algébrique.

Par ailleurs si $\psi : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{X}_2$ est $G(\mathbb{R})$-équivariant, le graphe $\mathrm{Gr}(\psi)$ de ψ est

$$\mathrm{Gr}(\psi) = \{(g.x_0, g\psi(x_0) \in \mathcal{X}_1 \times \mathcal{X}_2 | g \in G(\mathbb{R})\}$$

qui est semi-algébrique puisque les actions de $G(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{X}_1$ et $\mathcal{X}_2$ sont semi-algébriques. Donc ψ est semi-algébrique. □

On suppose de plus que $G_\mathbb{R}$ est l'extension à $\mathbb{R}$ d'un $\mathbb{Q}$-groupe réductif $G_\mathbb{Q}$ et que $(G_\mathbb{Q}, X)$ est une donnée de Shimura. On fixe une composante X^+ de X. Alors X^+ est un espace symétrique hermitien. Soit $G(\mathbb{Q})_+$ le fixateur de X^+ dans $G(\mathbb{Q})$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma = K \cap G(\mathbb{Q})_+$. Soit S la variété de Shimura $S = \Gamma \backslash X^+$.

Soit $\mathcal{X}$ une réalisation de X^+. Par définition $\mathcal{X}$ est une sous-variété analytique d'une variété algébrique complexe $\tilde{\mathcal{X}}$. Soit $\tilde{Y}$ une sous-variété algébrique complexe de $\tilde{\mathcal{X}}$. Alors $Y := \mathcal{X} \cap \tilde{Y}$ est un ensemble analytique complexe qui est semi-algébrique réel d'après le lemme 2.1. D'après [FL81, § 2], les composantes irréductibles de Y en tant qu'ensemble analytique complexe sont en nombres finis et sont semi-algébriques. On dit qu'un sous-ensemble de $\mathcal{X}$ est algébrique

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

irréductible si il est une composante irréductible d'une intersection $Y = \mathcal{X} \cap \tilde{Y}$ avec $\tilde{Y}$ sous-variété algébrique de $\tilde{Y}$.

Soit $\mathcal{Z}$ une sous-variété analytique complexe de $\mathcal{X}$. On définit le lieu algébrique $\mathcal{Z}^a$ de $\mathcal{Z}$ comme la réunion des composantes d'intersection de sous-variétés algébriques de $\tilde{\mathcal{X}}$ avec $\mathcal{X}$ qui sont contenus dans $\mathcal{Z}$.

On définit le lieu semi-algébrique $\mathcal{Z}^{\mathrm{sa}}$ de $\mathcal{Z}$ par

$$\mathcal{Z}^{\mathrm{sa}} = \bigcap_{\gamma:(-1,1)\to\mathcal{Z}} \gamma(-1,1)$$

la réunion portant sur les γ non constants analytiques réels et semi-algébriques.

Une sous-variété algébrique irréductible Y de $\mathcal{Z}$ est dite maximale si elle l'est parmi les sous-variétés algébriques irréductibles de $\mathcal{Z}$.

La conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique s'énonce de la manière suivante.

Conjecture 2.2. Soit $\mathcal{X}$ une réalisation de X^+ qui est isomorphe à la réalisation d'Harish-Chandra. Soit $\pi : \mathcal{X} \to S$ l'application d'uniformisation. Soit Z une sous-variété algébrique de S et $\mathcal{Z}$ une composante analytique de $\pi^{-1}(Z)$. Alors

$$\mathcal{Z}^a = \mathcal{Z}^{\mathrm{sa}}.$$

Soit Y une sous-variété algébrique maximale de $\mathcal{Z}$. Alors Y est une sous-variété semi-algébrique maximale de $\mathcal{Z}$ et $\pi(Y)$ est faiblement spéciale dans S.

Par le lemme 2.1, on a l'inclusion $\mathcal{Z}^a \subset \mathcal{Z}^{\mathrm{sa}}$. L'inclusion $\mathcal{Z}^{\mathrm{sa}} \subset \mathcal{Z}^a$ est connue. Elle résulte par exemple de [PT11, lemme 4.1]. En utilisant le lemme 2.1 on voit alors que la conjecture est indépendante de la réalisation de $\mathcal{X}^+$.

2.2 Définabilité de l'application d'uniformisation d'une variété de Shimura

On garde les notations de la section précédentes. Soit $\mathcal{X}$ une réalisation de X^+. On rappelle qu'un sous-ensemble Ω de $\mathcal{X}$ est dit fondamental pour l'action de Γ si :

(i) $\Gamma\Omega = \mathcal{X}$;

(ii) pour tout $\alpha \in G(\mathbb{Q})$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma, \gamma\Omega \cap \alpha\Omega \neq \emptyset\}$ est de cardinal fini.

Un sous-ensemble $\tilde{\Omega}$ de $G(\mathbb{R})$ est dit fondamental pour l'action de Γ sur $G(\mathbb{R})$ si :

(i) $\Gamma\tilde{\Omega} = G(\mathbb{R})$;

(ii) pour tout $\alpha \in G(\mathbb{Q})$, l'ensemble $\{\gamma \in \Gamma, \gamma\tilde{\Omega} \cap \alpha\tilde{\Omega} \neq \emptyset\}$ est de cardinal fini ;

(iii) il existe un compact maximal K_∞ de $G(\mathbb{R})$ tel que $\tilde{\Omega}K_\infty = \tilde{\Omega}$.

Soit $x \in X$. Soit K_x le fixateur de x et $\tilde{\Omega}_x$ un ensemble fondamental de $G(\mathbb{R})$ invariant par K_x. Alors $\Omega := \tilde{\Omega}_x.x$ est un ensemble fondamental de X pour l'action de Γ. Autrement dit soit $\theta_x : G(\mathbb{R}) \to X$ la projection $g \mapsto g.x$ associée à x alors $\theta_x(\tilde{\Omega}_x) = \Omega$ est un ensemble fondamental de X pour l'action de Γ.

Une généralisation naturelle des résultats de Peterzil et Starchenko [PS11] est la conjecture suivante.

Conjecture 2.3. Soit $\mathcal{X}$ une réalisation de X^+ isomorphe à la réalisation d'Harish-Chandra. Soit $\pi : \mathcal{X} \longrightarrow S$ l'application d'uniformisation. Il existe un sous-ensemble fondamental semi-algébrique Ω de $\mathcal{X}$ pour l'action de Γ tel que la restriction de π à Ω soit définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

Au vu du lemme 2.1, la conjecture est indépendante de la réalisation $\mathcal{X}$ de X. Elle est aussi indépendante du sous-groupe compact ouvert K de $G(\mathbb{A}_f)$. En effet, soit Ω_K un sous-ensemble fondamental semi-algébrique pour l'action de $\Gamma = K \cap G(\mathbb{Q})_+$. Soit K' un sous-groupe compact ouvert d'indice fini dans K. Soit $\Gamma' = K' \cap G(\mathbb{Q})_+$ et $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ un système de représentants de $\Gamma' \backslash \Gamma$. Alors

$$\Omega_{K'} := \bigcup_{i=1}^{r} \gamma_i \Omega_K$$

est un sous-ensemble fondamental semi algébrique pour l'action de Γ'.

Cette conjecture est vérifiée dans le cas où Γ est cocompact [UY12].

Soit $(V_{\mathbb{Q}}, \psi)$ un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension $2g$ muni d'une forme symplectique. Soit $\mathrm{GSp}(V_{\mathbb{Q}}, \psi) \simeq \mathrm{GSp}_{2g}$ le groupe symplectique associé. Alors $(\mathrm{GSp}(V_{\mathbb{Q}}, \psi), \mathbb{H}_g^{\pm})$ est une donnée de Shimura. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma = \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})_+ \cap K$. Le résultat principal de [PS11] est une réponse positive à la conjecture 2.3 pour l'action de $\Gamma = \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})_+ \cap K$ sur $\mathbb{H}_g$.

Le but de cette partie est d'étendre ce résultat à une sous-variété S de type Hodge de $\Gamma \backslash \mathbb{H}_g$. Par définition il existe une sous-donnée de Shimura (G, X) de $(\mathrm{GSp}(V_{\mathbb{Q}}, \psi), \mathbb{H}_g^{\pm})$ et une composante connexe X^+ de X contenue dans $\mathbb{H}_g$ telles que $S = \Gamma_G \backslash X^+$ avec $\Gamma_G = G(\mathbb{Q})_+ \cap \Gamma$. Dans cette dernière égalité $G(\mathbb{Q})_+$ est le fixateur de X^+ dans $G(\mathbb{Q})$.

Pour simplifier les notations on notera dans la suite $\mathbb{H}_g^+ = \mathbb{H}_g$ et $X^+ = X$. On remarque que X est une réalisation (de Siegel) de l'espace symétrique de G. En particulier X est semi-algébrique d'après le lemme 2.1.

On montre en fait la proposition suivante :

Proposition 2.4. *Soit S une sous-variété de type Hodge de $\Gamma \backslash \mathbb{H}_g$. Soit $\pi : \mathbb{H}_g \to \Gamma \backslash \mathbb{H}_g$ l'application d'uniformisation. On note π_S la restriction de π à X de sorte que π_S est l'application d'uniformisation de S. Il existe alors un ensemble semi-algébrique fondamental Ω pour l'action de Γ sur $\mathbb{H}_g$ tel que $\pi_{|\Omega}$ soit définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ et tel que $\Omega_X := \Omega \cap X$ soit semi-algébrique et fondamental pour l'action de Γ sur X.*

Admettons provisoirement cette proposition qui repose sur le théorème de Peterzil–Starchenko [PS11]. Comme $\Omega \cap X$ est semi-algébrique il est définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$. Comme la restriction d'une application définissable à un sous-ensemble définissable est définissable on en déduit la conjecture 2.3 pour S que l'on résume dans la proposition suivante.

Proposition 2.5. *Soit $S = \Gamma_G \backslash X$ une sous-variété de type Hodge de $\Gamma \backslash \mathbb{H}_g$. Soit $\pi_S : X \to S$ l'application d'uniformisation. Il existe un ensemble fondamental semi-algébrique Ω_X de X pour l'action de Γ_G tel que la restriction de π_S à Ω_X soit définisable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$.*

La preuve de la proposition 2.4 se déduit d'un résultat classique de Borel sur la théorie de la réduction. Soit $\mathbf{A}$ le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ à entrées positives. Soit $\mathbf{K}_\infty = O(n)$ le groupe orthogonal et $\mathbf{N}$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures unipotentes. On rappelle que l'application

$$(n, a, k) \mapsto nak$$

est un homéomorphisme de $\mathbf{N} \times \mathbf{A} \times \mathbf{K}_\infty$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Soient t et u des réels positifs. On note

$$\mathbf{A}_t := \{a \in \mathbf{A} \mid a_{i,i} \leqslant t a_{i+1,i+1}, \text{pour } i \text{ dans } \{1, \ldots, n-1\}\},$$
$$\mathbf{N}_u := \{n \in \mathbf{N}, |n| \leqslant u\}$$

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

et l'ensemble de Siegel

$$\mathbf{\Sigma}_{t,u} = \mathbf{N}_u \mathbf{A}_t \mathbf{K}_\infty.$$

La théorie classique de la réduction assure que si $t \geqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$ et $u \geqslant \frac{1}{2}$ alors l'ensemble de Siegel $\mathbf{\Sigma}_{t,u}$ est un ensemble fondamental pour l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Cela signifie qu'il vérifie les conditions (i) et (ii) précédentes et qu'il est invariant à droite par $\mathbf{K}_\infty$. On fixe un ensemble fondamental de Siegel $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}_{t,u}$ de cette forme pour un couple (t, u) vérifiant les conditions précédentes. La définition de $\mathbf{\Sigma}$ montre que c'est un ensemble semi-algébrique.

On dispose alors du théorème suivant de Borel [Bor69, théorème 9.8, p. 63] :

Théorème 2.6 (Borel [Bor69]). *Soit $H_{\mathbb{Q}}$ un $\mathbb{Q}$-sous-groupe réductif de $\mathrm{GL}_{n,\mathbb{R}}$. Soit $u \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ tel que $H(\mathbb{R}) \cap u^{-1}\mathbf{K}_\infty u$ soit un compact maximal de $H(\mathbb{R})$. Il existe un ensemble fini B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ tel que*

$$\tilde{\Omega} := \left(\bigcup_{b \in B} b \mathbf{\Sigma} u \right) \cap H(\mathbb{R})$$

soit un ensemble fondamental pour l'action de $\Gamma_H = \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \cap H(\mathbb{Q})$ sur $H(\mathbb{R})$ invariant par le compact maximal $H(\mathbb{R}) \cap u^{-1}\mathbf{K}_\infty u$ de $H(\mathbb{R})$.

Soit $(V_{\mathbb{Q}}, \psi)$ un espace symplectique de dimension $2g$. On applique d'abord ce résultat au groupe symplectique $\mathrm{GSp}(V_{\mathbb{Q}}, \psi) \simeq \mathrm{GSp}_{2g,\mathbb{Q}}$ plongé canoniquement dans $\mathrm{GL}(V_{\mathbb{Q}}) \simeq \mathrm{GL}_{2g,\mathbb{Q}}$. Comme

$$K_{\infty,2g} := \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R}) \cap O(2g)$$

est un compact maximal de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ on peut trouver un ensemble fondamental de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ de la forme

$$\tilde{\Omega}_B = \left(\bigcup_{b \in B} b \mathbf{\Sigma} \right) \cap \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$$

pour un sous-ensemble fin B convenable de $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$. On remarque que pour tout ensemble fini B' de $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$ contenant B,

$$\tilde{\Omega}_{B'} := \left(\bigcup_{b \in B} b \mathbf{\Sigma} \right) \cap \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$$

est fondamental pour l'action de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$. Pour tout sous-groupe Γ d'indice fini de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ il existe un sous-ensemble fini B_Γ de $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$ contenant B tel que $\tilde{\Omega}_{B_\Gamma}$ soit fondamental dans $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ pour l'action de Γ.

Soit $z_0 = \sqrt{-1}\mathbf{1_g} \in \mathbb{H}_{\mathbf{g}}$ alors pour toute partie finie B' de $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$ contenant B, l'ensemble $\tilde{\Omega}_{B'}$ est invariant par le fixateur de z_0 dans $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ et $\Omega_{B',g} := \tilde{\Omega}_{B'}.z_0$ est un sous-ensemble fondamental de $\mathbb{H}_g$ pour l'action de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$. De même pour tout sous-groupe Γ de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})$ commensurable à $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$, l'ensemble $\Omega_{B_\Gamma,g} = \tilde{\Omega}_{B_\Gamma}.z_0$ est fondamental dans $\mathbb{H}_g$ pour l'action de Γ.

Au vu de sa définition $\Omega_{B',g}$ est semi-algébrique pour tout B'.

Soit K un sous-groupe compact ouvert de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{A}_f)$ et $\Gamma := K \cap \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Q})$. Soit $\pi_\Gamma : \mathbb{H}_g \to \Gamma\backslash\mathbb{H}_g$.

La théorie classique montre que $\Omega_{B_\Gamma,g}$ est contenu dans une union finie de translatés par des éléments de $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{Z})$ du domaine de Siegel $\mathcal{F}_g$ considéré dans [PS11]. Comme $\Omega_{B_\Gamma,g}$ est semi-algébrique il est définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$. Comme la restriction d'une application définissable à un ensemble définissable est définissable le résultat principal de [PS11] assure que la restricition de π_Γ à $\Omega_{B_\Gamma,g}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$.

Soit alors (G,X) une sous-donnée de Shimura de $(\mathrm{GSp}(V_{\mathbb{Q}},\psi),\mathbb{H}_g^{\pm})$. Il existe alors $u\in \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ tel que $X=G(\mathbb{R})u^{-1}.z_0$. Dans cette situation

$$u^{-1}K_{\infty,2g}u\cap G(\mathbb{R})=u^{-1}O(2g)u\cap G(\mathbb{R})$$

est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$. Une nouvelle application du résultat de Borel (Théorème 2.6) assure que qu'il existe un sous-ensemble fini B_G de $\mathrm{GL}_{2g}(\mathbb{Z})$ tel que

$$\tilde{\Omega}_{B_G,u}:=\left(\bigcup_{b\in B_G} b\boldsymbol{\Sigma}u\right)\cap G(\mathbb{R})$$

soit un ensemble fondamental pour l'action de $\Gamma_G=\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\cap G(\mathbb{Q})$ sur $G(\mathbb{R})$ invariant par le compact maximal $G(\mathbb{R})\cap u^{-1}K_{\infty,2g}u$ de $G(\mathbb{R})$. En agrandissant éventuellement B_G, on peut supposer que B_G contient B_Γ et est fondamental pour l'action de $\Gamma\cap G(\mathbb{Q})$ sur $G(\mathbb{R})$.

Dans cette situation $\tilde{\Omega}_{B_G,\mathrm{GSp}_{2g}}:=(\bigcup_{b\in B_G} b\boldsymbol{\Sigma})\cap \mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$ est fondamental pour l'action de Γ sur $\mathrm{GSp}_{2g}(\mathbb{R})$. Soit $z_1=u^{-1}\cdot z_0$ et $\theta_1:\mathrm{GSp}_{2g(\mathbb{R})}\to\mathbb{H}_g$ la projection $g\mapsto g.z_1$. Alors

$$\theta_1(\tilde{\Omega}_{B_G,u})=\tilde{\Omega}_{B_G,\mathrm{GSp}_{2g}}.z_0\cap X.$$

D'après la discussion précédente, $\Omega:=\tilde{\Omega}_{B_G,\mathrm{GSp}_{2g}}.z_0$ est fondamental pour l'action de Γ dans $\mathbb{H}_g$, $\Omega\cap X$ est semi-algébrique et fondamental pour l'action de Γ_G sur X.

Ceci termine la preuve de la proposition 2.4 et donc celle de la proposition 2.5.

2.3 Minoration d'orbites sous Galois de points spéciaux

Dans cette partie on rappelle brièvement ce qui est attendu et connu concernant les minorations d'orbites sous Galois de points spéciaux des variétés de Shimura. On conserve les notations des parties précédentes concernant la variété de Shimura S.

On suppose de plus que $K=\prod K_p$ pour des sous-groupes compacts ouverts K_p de $G(\mathbb{Q}_p)$. Soit $E=E(G,X)$ le corps reflex de (G,X). Alors $\mathrm{Sh}_K(G,X)$ admet un modèle canonique sur E.

Soit x un point CM de S. Il existe $s\in X^+$ tel que $x=\pi(s)$ et tel que le groupe de Mumford–Tate de s est un tore T. On note pour tout p premier $K_{T,p}=K_p\cap T(\mathbb{Q}_p)$ et $K_T=T(\mathbb{A}_f)\cap K$. Alors K_T est un sous-groupe compact ouvert de $T(\mathbb{A}_f)$ et $K_T=\prod K_{T,p}^m$. Soit K_T^m le sous-groupe compact ouvert maximal de $T(\mathbb{A}_f)$ et $K_T^m=\prod_p K_{T,p}^m$. Soit L le corps de décomposition de T et D_L la valeur absolue du discriminant de L.

Dans cette situation la minoration attendue de la taille de l'orbite sous Galois est donnée par la conjecture suivante.

Conjecture 2.7. Il existe des constantes positives B, C et δ ne dépendant que de S telles que, avec les notations précédentes, pour tout point spécial x de S,

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/E).x|\geqslant CB^{i(T)}|K_T^m/K_T|d_L^\delta$$

où $i(T)$ désigne le cardinal de l'ensemble des nombres premiers p tels que $K_{T,p}^m\neq K_{T,p}$.

Si S est une sous-variété spéciale de $\mathcal{A}_g$. Il existe des constantes positives C_1 et $\delta(g)$ ne dépendant que de g telles que si A_x désigne la variété abélienne CM paramétrisée par x et R_x est le centre des endomorphismes de A_x, alors

$$|\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}).x|\geqslant C_1|\mathrm{disc}(R_x)|^{\delta(g)}.$$

Pour des sous-variétés de $\mathcal{A}_g$ la deuxième forme de la conjecture est une conséquence de la première d'après un résultat de Tsimerman [Tsi11, Theorem 7.1]. Ces conjectures sont connues

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

pour des points CM 'Galois génériques' dans $\mathcal{A}_g$ dans une terminologie introduite dans [CU06] ou des points de 'Weyl' dans une terminologie plus astucieuse due à Chai et Oort [CO] ([UY11b, corollaire 5.6] pour un énoncé un peu plus général et [Tsi11, Lemma 7.8]). La conjecture est enfin vérifiée sous l'hypothèse de Riemann Généralisée pour une variété de Shimura arbitraire [Tsi11, UY11b] et pour $\mathcal{A}_g$ pour $g \leqslant 6$ par le résultat principal de Tsimerman [Tsi11] (pour $g \leqslant 3$ par une méthode similaire dans [UY11b]).

3. Sous-variétés faiblement spéciales

Soit (G, X) une donnée de Shimura. Soit X^+ une composante connexe de X et $G(\mathbb{Q})_+$ le stabilisateur de X^+ dans $G(\mathbb{Q})$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. Soit $\Gamma := G(\mathbb{Q})_+ \cap K$ et $S := \Gamma\backslash X^+$. Alors S est une composante de la variété de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) := G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

Soit $\pi : X^+ \longrightarrow S$ l'application d'uniformisation et $\mathcal{F}$ un ensemble fondamental semi-algébrique pour l'action de Γ sur X^+.

Les sous-variétés faiblement spéciales de S sont les sous-variétés algébriques irréductibles de S qui sont totalement géodésiques dans S. Les sous-variétés spéciales de S sont les sous-variétés faiblement spéciales qui contiennent un point spécial.

D'après les travaux de Moonen [Moo98], si Z est une sous-variété faiblement spéciale de S on peut décrire Z à l'aide de sous-données de Shimura de la manière suivante.

Il existe une sous-donnée de Shimura (H, X_H) de (G, X) et une composante X_H^+ de X_H ayant les propriétés suivantes. Soit $Z = \pi(X_H^+)$ et Z est spéciale, soit X_H^+ se décompose sous la forme d'un produit $X_H^+ = X_1 \times X_2$ de deux espaces symétriques hermitiens X_1 et X_2. Il existe $x_2 \in X_2$ tel que $Z = \pi(X_1 \times \{x_2\})$. De plus Z est spéciale si et seulement si x_2 est un point spécial de X_2.

Soit x_1 un point de X_1 et

$$x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2 = X_H^+ \subset X^+.$$

On a une décomposition presque directe de $H_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}} = H_{1,\mathbb{Q}} \times H_{2,\mathbb{Q}}$ pour des $\mathbb{Q}$-sous-groupes semi-simples $H_{i,\mathbb{Q}}$ de $H_{\mathbb{Q}}$ tels que

$$X_1 \times X_2 = H^{\mathrm{der}}(\mathbb{R})^+.x = H_1(\mathbb{R})^+.x_1 \times H_2(\mathbb{R})^+.x_2$$

et

$$X_1 \times \{x_2\} = H_1(\mathbb{R})^+.x = H_1(\mathbb{R})^+.x_1 \times \{x_2\}.$$

La sous-variété spéciale Z ne détermine pas la sous-donnée de Shimura (H, X_H) de (G, X). Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on note $H_\gamma = \gamma H \gamma^{-1}$. Soit $X_{H_\gamma} = H_\gamma(\mathbb{R}).\gamma.x$. Alors (H_γ, X_{H_γ}) est une sous-donnée de Shimura de (G, X). Si on note de même, pour $i = 1$ ou $i = 2$, $H_{i,\gamma} = \gamma H_i \gamma^{-1}$, alors $Z = \pi(H_{1,\gamma}(\mathbb{R})^+.\gamma x)$. En choisissant γ convenablement, on peut supposer que $\gamma x \in \mathcal{F}$.

La proposition suivante résume une partie des propriétés des sous-variétés faiblement spéciales dont nous aurons besoin dans la suite.

Proposition 3.1. *Soit Z une sous-variété faiblement spéciale de S. Il existe alors un $\mathbb{Q}$-sous-groupe semi-simple $F_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ et $z \in \mathcal{F}$ tel que*

$$Z = \pi(F(\mathbb{R})^+.z).$$

Une telle description de Z sera dite normalisée dans la suite.

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

Réciproquement, soit $F_{\mathbb{R}}$ un sous-groupe semi-simple de $G_{\mathbb{R}}$ et soit $z \in \mathcal{F}$. On suppose que $Z := \pi(F(\mathbb{R})^+.z)$ est une sous-variété faiblement spéciale de S.

Soit K_z le stabilisateur de z dans $G(\mathbb{R})$, alors $K_z(\mathbb{R}) \cap F(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe compact maximal de $F(\mathbb{R})^+$ et l'espace symétrique

$$F(\mathbb{R})^+/K_z(\mathbb{R}) \cap F(\mathbb{R})^+$$

est hermitien.

Soit $F_{\mathbb{R}}^{\mathrm{nc}}$ le produit presque directe des facteurs simples non compacts de $F_{\mathbb{R}}$. Soit $F'_{\mathbb{Q}} = MT(F^{\mathrm{nc}})$ le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupe de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $F'_{\mathbb{R}}$ contienne F^{nc}. Alors $F'_{\mathbb{Q}}$ est semi-simple, $(F'_{\mathbb{R}})^{\mathrm{nc}} = F_{\mathbb{R}}^{\mathrm{nc}}$ et

$$Z = \pi(F'(\mathbb{R})^+.z).$$

Démonstration. La première partie du lemme résulte de la discussion précédente.

Pour la deuxième partie on remarque que si Z est faiblement spéciale alors

$$X_F = F(\mathbb{R})^+.z = F(\mathbb{R})^+/K_z(\mathbb{R}) \cap F(\mathbb{R})^+$$

est hermitien symétrique. En particulier $K_z(\mathbb{R}) \cap F(\mathbb{R})^+$ est un sous-groupe compact maximal de $F(\mathbb{R})^+$ et $X_F = F^{\mathrm{nc}}(\mathbb{R})^+.z$.

D'après la définition des sous-variétés faiblement spéciales il existe un $\mathbb{Q}$-sous-groupe réductif connexe $H_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $X_F = H^{\mathrm{der}}(\mathbb{R})^+.z$. En particulier $(H_{\mathbb{R}}^{\mathrm{der}})^{\mathrm{nc}} = F_{\mathbb{R}}^{\mathrm{nc}}$. On en déduit que $F'_{\mathbb{Q}} = MT(F_{\mathbb{R}}^{\mathrm{nc}}) \subset H_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}}$.

Si on écrit la décomposition

$$H_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}} = \prod_{\alpha} H_{\alpha,\mathbb{Q}}$$

en produit presque direct de facteurs presque $\mathbb{Q}$-simples alors $H_\alpha(\mathbb{R})$ n'est pas compact et il existe un facteur $\mathbb{R}$-simple de $H_{\alpha,\mathbb{R}}$ qui est un facteur $\mathbb{R}$-simple de $F_{\mathbb{R}}^{\mathrm{nc}}$.

Par ailleurs d'après le lemme 2.4 de [Ull06] si L est un facteur $\mathbb{R}$-simple de $H_{\alpha,\mathbb{R}}$ alors $H_{\alpha,\mathbb{Q}} = MT(L)$ est le plus petit $\mathbb{Q}$-sous-groupes de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $MT(L)_{\mathbb{R}}$ contienne L. On en déduit que $F'_{\mathbb{Q}} = MT(F^{\mathrm{nc}})$ contient tous les facteurs $\mathbb{Q}$-simples de $H_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}}$. Finalement $H_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}} = F'_{\mathbb{Q}}$. □

Remarque 3.2. On remarque que dans la situation précédente,

$$\Gamma_{F'} = \Gamma \cap F'_{\mathbb{Q}}$$

est un réseau arithmétique de $F'_{\mathbb{Q}}$ et que l'on a un morphisme surjectif à noyau compact

$$\pi : F'_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}^{\mathrm{nc}}.$$

Dans cette situation $\Gamma_F := \pi(\Gamma_{F'})$ est un réseau arithmétique de $F_{\mathbb{R}}^{\mathrm{nc}}$ au sens de Margulis (IX-1.5 p. 293 de [Mar89]). La sous-variété spéciale Z s'écrit alors

$$Z = \Gamma_F \backslash F^{\mathrm{nc}}(\mathbb{R})^+.z = \Gamma_{F'} \backslash F'(\mathbb{R})^+.z.$$

On fixe dans la suite un groupe semi-simple $F_{\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ tel qu'il existe un $z_0 \in \mathcal{F}$ tel que $\pi(F(\mathbb{R})^+.z_0)$ soit une variété faiblement spéciale. On note alors $\mathcal{E}(F_{\mathbb{Q}})$ l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales de S qui ont une description normalisée de la forme $\pi(F(\mathbb{R})^+.z)$ pour un $z \in \mathcal{F}$. On cherche dans la suite de cette section à décrire $\mathcal{E}(F_{\mathbb{Q}})$.

Lemme 3.3. *Soit $\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}} = F_{\mathbb{Q}} Z_G(F_{\mathbb{Q}})^0$. Alors $\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}$ est un sous- groupe réductif de $G_{\mathbb{Q}}$.*

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

Démonstration. D'après la discussion précédente, il existe une sous-donnée de Shimura (H, X_H) de (G, X) telle que $F_{\mathbb{Q}}$ soit un $\mathbb{Q}$-sous-groupe semi-simple normal de $H_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}}$. De plus dans le langage de Deligne le point z s'interprète comme un morphisme du tore de Deligne $\mathbb{S} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ vers $H_{\mathbb{R}}$ et X_H comme la $H(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de z. On note alors X_H^+ la $H(\mathbb{R})^+$–classe de conjugaison de z.

Alors $\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-groupe de $G_{\mathbb{Q}}$ contenant $H_{\mathbb{Q}}$. Soit $Z_{G_{\mathbb{Q}}}$ le centre connexe de $G_{\mathbb{Q}}$. Alors $Z_G(H)(\mathbb{R})/Z_G(\mathbb{R})$ est compact car $Z_G(H)$ fixe un point arbitraire x_H de $X_H \subset X$. Ceci implique que $Z_G(H)_{\mathbb{Q}}/Z_{G_{\mathbb{Q}}}$ est $\mathbb{Q}$-anisotrope. Le lemme 5.1 de [EMS97] implique alors que tout sous-groupe de G contenant H est réductif. □

Le groupe $\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}$ se décompose sous la forme d'un produit presque direct

$$\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}} = T_{\mathbb{Q}}\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{nc}}\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}^{c}$$

où $T_{\mathbb{Q}}$ est le centre connexe de $\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}$, $\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{nc}}$ (respectivement $\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}^{c}$) est le produit presque direct des facteurs $\mathbb{Q}$-simples de $\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}$ dont l'extension à $\mathbb{R}$ est non compacts (respectivement compacts). Soit $\Theta_{\mathbb{Q}}$ le produit presque direct $\Theta_{\mathbb{Q}} = T_{\mathbb{Q}}\widehat{\Theta}_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{nc}}$. La projection de H sur $\widehat{\Theta}^c$ est triviale car par la définition des données de Shimura l'extension à $\mathbb{R}$ d'un $\mathbb{Q}$-facteur simple de $H_{\mathbb{Q}}$ n'est jamais compact. On en déduit que $H_{\mathbb{Q}}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-groupe de $\Theta_{\mathbb{Q}}$.

Proposition 3.4. *Soit $F_{\mathbb{Q}}$ un sous-groupe semi-simple de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $\mathcal{E}(F_{\mathbb{Q}})$ soit non vide. Soit $z \in \mathcal{F}$ tel que $Z := \pi(F(\mathbb{R})^+.z)$ soit une sous-variété faiblement spéciale. Alors $z : \mathbb{S} \to G_{\mathbb{R}}$ se factorise via $\Theta_{\mathbb{R}}$.*

Soit X_Θ la $\Theta(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de

$$z : \mathbb{S} \to \Theta_{\mathbb{R}}.$$

(i) *Le couple (Θ, X_Θ) est une sous-donnée de Shimura de (G, X). Soit X_Θ^+ la $\Theta(\mathbb{R})^+$-classe de conjugaison de z. Alors*

$$Z \subset \pi(X_\Theta^+).$$

(ii) *Quand z varie parmi les $z \in \mathcal{F}$ tel que $\pi(F(\mathbb{R})^+.z) \in \mathcal{E}(F_{\mathbb{Q}})$, la $\Theta(\mathbb{R})$-classe de conjugaison de z ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

En utilisant les notations de la preuve du lemme 3.3, on voit que z se factorise par le sous-groupe $H_{\mathbb{R}}$ de $\Theta_{\mathbb{R}}$. La partie (i) du lemme est une conséquence du lemme 3.3 de [Ull06].

La partie (ii) est un calcul simple de cohomologie galoisienne que l'on peut trouver dans la preuve du lemme 4.4 de [CU06].

Proposition 3.5. *Soit $F_{\mathbb{Q}}$ un sous-groupe semi-simple de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $\mathcal{E}(F_{\mathbb{Q}})$ soit non vide. On suppose que $F_{\mathbb{Q}} \neq G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}}$.*

(i) *Si $F_{\mathbb{Q}}$ n'est pas un sous-groupe normal de $G_{\mathbb{Q}}$ alors $\mathcal{E}(F_{\mathbb{Q}})$ est contenue dans une union finie de sous-variétés spéciales strictes de S.*

(ii) *Si $F_{\mathbb{Q}}$ est un sous-groupe normal de $G_{\mathbb{Q}}$, alors $\Theta_{\mathbb{Q}} = G_{\mathbb{Q}}$. Tout $z \in X$ se factorise donc par $\Theta_{\mathbb{R}}$ et si X_Θ désigne la $\Theta(\mathbb{R})$-classe de conjugaison d'un s arbitraire de X alors $(\Theta, X_\Theta) = (G, X)$. Il existe une décomposition de S sous la forme $S = S_1 \times S_2$ en un produit de deux variétés de Shimura telle que $\mathcal{E}(F_{\mathbb{Q}})$ est l'ensemble des*

$$S_1 \times \{x_2\}$$

avec $x_2 \in S_2$.

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

Démonstration. Si $F_{\mathbb{Q}}$ n'est pas un sous-groupe normal de $G_{\mathbb{Q}}$ le groupe $\Theta_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}}$ est un $\mathbb{Q}$-sous-groupe strict de $G_{\mathbb{Q}}^{\mathrm{der}}$. D'après le lemme précédent Il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour X_Θ pour que (Θ, X_Θ) soit une sous-donnée de Shimura de (G, X). Pour chacun de ces choix $\pi(X_\Theta^+)$ est une sous-variété faiblement spéciale stricte de S. Cela montre la première partie de la proposition car tout $Z \in \mathcal{E}(F_{\mathbb{Q}})$ est contenu dans $\pi(X_\Theta^+)$ pour un tel choix de X_Θ.

La deuxième partie du lemme résulte de la description des sous-variétés faiblement spéciales de S. $\square$

4. Conséquences de la conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique

Soit (G, X) une donnée de Shimura. Soit X^+ une composante connexe de X et $G(\mathbb{Q})_+$ le stabilisateur de X^+ dans $G(\mathbb{Q})$. Soit K un sous-groupe compact ouvert de $G(\mathbb{A}_f)$. Soit $\Gamma := G(\mathbb{Q})_+ \cap K$ et $S := \Gamma\backslash X^+$. Alors S est une composante de la variété de Shimura

$$\mathrm{Sh}_K(G, X) := G(\mathbb{Q})\backslash X \times G(\mathbb{A}_f)/K.$$

Soit $\pi : X^+ \longrightarrow S$ l'application d'uniformisation et $\mathcal{F}$ un ensemble fondamental semi-algébrique pour l'action de Γ sur X^+.

On fixe une réalisation de X^+ dans un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension $\dim_{\mathbb{C}}(X)$ qui est biholomorphe à la réalisation d'Harish-Chandra de X^+ comme domaine symétrique hermitien borné.

Le but de cette partie est de montrer le résultat suivant.

Théorème 4.1. *Soit V une sous-variété Hodge générique stricte de S. On suppose que :*

(i) *la conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique est vérifiée pour V ;*

(ii) *la restriction de π à $\mathcal{F}$ est définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$;*

(iii) *si $S = S_1 \times S_2$ est un produit de variétés de Shimura, alors V n'est pas de la forme $V = S_1 \times V'$ pour une sous-variété V' de S_2.*

Alors si $V \neq S$, l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales de dimension positive contenues dans V n'est pas Zariski dense dans V. En particulier si $V \neq S$, l'ensemble des sous-variétés spéciales de dimension positive contenues dans V n'est pas Zariski dense dans V.

Démonstration. Soit $H_{\mathbb{R}}$ un sous-groupe semi-simple de $G_{\mathbb{R}}$ Soit

$$B_H := \{(t, z) \in G(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}, \pi(tH(\mathbb{R})^+t^{-1}.z) \subset V\}.$$

Par analyticité on voit que

$$B_H := \{(t, z) \in G(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}, \pi_{|\mathcal{F}}(tH(\mathbb{R})^+t^{-1}.z) \subset V\}.$$

D'après (ii), B_H est alors définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$.

Soit $\mathcal{E}(V)$ l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales contenues dans V. Soit r un entier, on note $\mathcal{E}_r(V)$ l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales contenues dans V de dimension réelle r. Soit d le maximum des dimensions réelles des sous-variétés faiblement spéciales contenues dans V.

D'après la description des sous-variétés faiblement spéciales rappelée à la proposition 3.1, il existe un sous-groupe semi-simple $F_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{R}}$ et $z_0 \in \mathcal{F}$ tels que $\pi(F(\mathbb{R})^+.z_0)$ soit une sous-variété faiblement spéciale de V de dimension d. On peut imposer de plus que $F_{\mathbb{R}} = F_{\mathbb{R}}^{\mathrm{nc}}$ n'a pas de facteurs simples compacts car on a vu que $\pi(F(\mathbb{R})^+.z_0) = \pi(F^{\mathrm{nc}}(\mathbb{R})^+.z_0)$.

Lemme 4.2. *Soit $(t, z) \in B_F$, alors $\pi(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z)$ est une sous-variété faiblement spéciale de V.*

Démonstration. Soit $(t, z) \in B_F$. D'après la définition de B_F, le sous-ensemble $tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z$ de X est un ensemble semi-algébrique tel que $\pi(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z) \subset V$. Par ailleurs la dimension de $tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z$ est supérieure à la dimension d de $F(\mathbb{R})^+.z_0$ avec égalité si et seulement si $\mathrm{Stab}(z) \cap tF(\mathbb{R})^+t^{-1}$ est un sous-groupe compact maximal de $tF(\mathbb{R})^+t^{-1}$.

Soit Y un ensemble algébrique maximal contenant $tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z$ tel que $\pi(Y) \subset V$.

D'après (i), V vérifie la conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique donc $\pi(Y)$ est faiblement spéciale. Par la maximalité de $\dim(\pi(F(\mathbb{R}^+.z_0)))$,

$$\dim(\pi(Y)) \leqslant \dim(F(\mathbb{R})^+.z_0) \leqslant \dim(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z) \leqslant \dim(\pi(Y)).$$

On en déduit que $\pi(Y) = \pi(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z)$ donc que $\pi(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z)$ est faiblement spéciale. $\square$

Lemme 4.3. *L'ensemble*

$$C(F, V) := \{tF(\mathbb{R})^+t^{-1}, t \in G(\mathbb{R}), \textit{ tel qu'il existe } z \in \mathcal{F} \textit{ avec } \pi(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z) \subset V\}$$

est de cardinal fini.

Démonstration. Soit

$$\psi : B_F \to G(\mathbb{R})/N_{G(\mathbb{R})}(F(\mathbb{R})^+)$$

l'application

$$(t, z) \mapsto \psi(t, z) = tN_{G(\mathbb{R})}(F(\mathbb{R})^+).$$

Alors $\psi(B_F)$ est en bijection avec $C(F, V)$. Comme B_F est définissable et ψ est algébrique $\psi(B_F)$ est définissable. Par ailleurs d'après le lemme 4.2 si $(t, z) \in B_F$, alors $\pi(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z)$ est faiblement spéciale. D'après la description des sous-variétés faiblement spéciales il existe un $\mathbb{Q}$-sous-groupe $F_{t,\mathbb{Q}}$ de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $tF_{\mathbb{R}}t^{-1} = F^{\mathrm{nc}}_{t,\mathbb{R}}$. Comme l'ensemble des $\mathbb{Q}$-sous-groupes algébriques de $G_{\mathbb{Q}}$ est dénombrable, on en déduit que $C(F, V)$ est dénombrable. Comme un ensemble définissable et dénombrable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$ est fini on en déduit que $C(F, V)$ est fini. $\square$

Lemme 4.4. *Sous les hypothèses du théorème 4.1, l'ensemble $\mathcal{E}_d(V)$ des sous-variétés faiblement spéciales contenues dans V de dimension maximale d n'est pas Zariski dense dans V.*

Démonstration. Il n'existe à conjugaison près dans $G(\mathbb{R})$ qu'un nombre fini de sous-groupes semi-simples $H_{\mathbb{R}}$ de $G_{\mathbb{R}}$. Il n'y a donc à conjugaison près dans $G(\mathbb{R})$ qu'un nombre fini de choix pour un groupe semi-simple $F_{\mathbb{R}}$ tel qu'il existe $z_0 \in \mathcal{F}$ avec $\pi(F(\mathbb{R}^+)) \in \mathcal{E}_d(V)$ et tel que $F_{\mathbb{R}} = F^{\mathrm{nc}}_{\mathbb{R}}$.

Si $F_{\mathbb{R}}$ est fixé, il existe un sous-groupe $F'_{\mathbb{Q}}$ semi-simple de $G_{\mathbb{Q}}$ tel que $(F'_{\mathbb{R}})^{\mathrm{nc}} = F_{\mathbb{R}}$. D'après le lemme 4.3, il n'existe en fait qu'un nombre fini de choix pour $F'_{\mathbb{Q}}$.

Soit $F_{\mathbb{Q}}$ un tel choix. Si $F_{\mathbb{Q}}$ est un facteur de $G_{\mathbb{Q}}$, on a une décomposition de S sous la forme $S = S_1 \times S_2$. Toute sous-variété faiblement spéciale de la forme $\pi(F(\mathbb{R})^+z)$ avec $z \in \mathcal{F}$ est de la forme $S_1 \times \{x_2\}$ pour un $x_2 \in S_2$. Soit V' l'adhérence de Zariski de l'ensemble des x_2 tel que $S_1 \times \{x_2\} \subset V$. Alors l'adhérence de Zariski des sous variétés faiblement spéciales de V de la forme $\pi(F(\mathbb{R})^+.z)$ avec $z \in \mathcal{F}$ est $S_1 \times V'$. Comme V n'est pas de cette forme, cet ensemble n'est pas Zariski dense dans V.

Si $F_{\mathbb{Q}}$ n'est pas un sous-groupe normal de $G_{\mathbb{Q}}$, alors par la proposition 3.5, l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales de la forme $\pi(F(\mathbb{R})^+.z)$ avec $z \in \mathcal{F}$ est contenu dans une union finie $\bigcup_{i=1}^r Z_i$ de de sous-variétés spéciales strictes Z_i de S. Come V est Hodge générique, $V \cap \bigcup_{i=1}^r Z_i$ n'est pas Zariski dense dans V.

Ceci termine la preuve du lemme 4.4. $\square$

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446

On montre le théorème 4.1 en raisonnant sur la dimension des sous-variétés faiblement spéciales qui sont dans V et qui ne sont pas contenues dans la réunion $\mathcal{E}_d(V)$ des sous-variétés faiblement spéciales de dimension maximale. Indiquons brièvement la preuve.

Soit $d_1 < d$ la dimension maximale d'une sous-variété faiblement spéciale de V qui n'est pas contenu dans $\mathcal{E}_d(V)$. Il existe un sous-groupe semi-simple $F_1 = F_1^{\mathrm{nc}}$ de $G_{\mathbb{R}}$ et $z_1 \in \mathcal{F}$ tel que $\pi(F_1(\mathbb{R})^+).z_1 \subset V$ est de dimension d_1 et n'est pas contenu dans $\mathcal{E}_d(V)$. Il n'y a à conjugaison près dans $G(\mathbb{R})$ qu'un nombre fini de possibilités pour F_1. La preuve du lemme 4.2 prouve que si $(t, z) \in B_{F_1}$ et si $\pi(tF_1(\mathbb{R})^+t^{-1}.z)$ n'est pas contenu dans $\mathcal{E}_d(V)$ alors $\pi(tF_1(\mathbb{R})^+t^{-1}.z)$ est faiblement spéciale. La preuve du lemme 4.3 montre que l'ensemble

$$\begin{aligned} C(F_1, V, \mathcal{E}_d(V)) := \{tF(\mathbb{R})^+t^{-1}, t \in G(\mathbb{R}),\ &\text{tel qu'il existe } z \in \mathcal{F} \text{ avec} \\ &\pi(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z) \subset V \text{ et } \pi(tF(\mathbb{R})^+t^{-1}.z) \text{ n'est pas contenu } \mathcal{E}_d(V)\} \end{aligned}$$

est fini. On en déduit alors comme dans la preuve du lemme 4.4 que l'ensemble des sous-variétés faiblement spéciales de V de dimension au moins d_1 n'est pas Zariski dense dans V. Une raisonnement par récurrence permet de conclure la preuve du théorème 4.1. □

5. La conjecture d'André–Oort pour les sous-variétés de Shimura projectives de $\mathcal{A}_6^r$

Le but de cette section est de montrer le résultat suivant.

Théorème 5.1. *Soit r un entier et S une sous-variété de Shimura projective de $\mathcal{A}_6^r$. La conjecture d'André–Oort est vérifiée pour S.*

Démonstration. Soit V une sous-variété irréductible de S. On suppose que V contient un ensemble Zariski dense de points spéciaux. On peut donc supposer que V est défini sur un corps de nombres F.

Soit S' la plus petite sous-variété spéciale de S qui contient V. Alors S' est projective et est contenue dans $\mathcal{A}_g^r$ et V est Hodge générique dans S'. En remplaçant S par S' on voit qu'il suffit de prouver le théorème quand V est Hodge générique dans S.

Si S est un produit $S = S_1 \times S_2$ de sous-variétés de Shimura avec $\dim(S_i) > 0$, on peut supposer que V n'est pas de la forme $V = S_1 \times V'$ pour une sous-variété V' de S_2. En effet soit x un point CM de S_1 la conjecture d'André–Oort pour V est equivalente à la conjecture d'André–Oort pour $\{x\} \times V'$ qui est une sous-variété de la sous-variété de Shimura projective $\{x\} \times S_2$ de $\mathcal{A}_6^r$.

Comme dans les sections précédentes, on suppose que S est la composante $\Gamma\backslash X^+$ d'une variété de Shimura $\mathrm{Sh}_K(G, X)$ avec $\Gamma = G(\mathbb{Q})_+ \cap K$. Comme S est une sous-variété de $\mathcal{A}_6^r$, l'espace symétrique X^+ admet une réalisation naturelle (notée encore X^+) comme sous-variété analytique de $\mathbb{H}_6^r \subset M_6(\mathbb{C})^r$. On note $\pi : \mathbb{H}_6^r \to \mathcal{A}_6^r$ l'application d'uniformisation et π_G sa restriction à X^+.

La conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique est indépendante de la réalisation d'après la discussion de la section 2.1. Comme elle est vérifiée pour la réalisation de d'Harish-Chandra de X^+ comme domaine symétrique borné par le résultat principal de [UY12] elle est vérifiée pour $V \subset S$.

En utilisant la proposition 2.4 de ce texte ou la proposition 4.1 de [UY12], on voit qu'il existe un ensemble fondamental semi-algébrique $\mathcal{F}$ de X^+ tel que la restriction de π à $\mathcal{F}$ soit définissable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$.

D'après le théorème 4.1 l'ensemble des sous-variété spéciales maximales de V qui sont de dimension positive n'est pas Zariski dense dans V. Il faut donc montrer que les points spéciaux de V, sauf un nombre fini d'entre eux, sont dans des sous-variétés spéciales de V de dimension positive. C'est une conséquence des méthodes disponibles actuelles dans la stratégie de Pila–Zannier qui utilise une nouvelle fois la preuve de la conjecture d'Ax–Lindemann hyperbolique dans la situation considéré [UY12, Theorem 1.3] . Indiquons brièvement la preuve.

Soit $(\underline{x}) := (x_1, \ldots, x_r)$ un point spécial de $\mathcal{A}_6^r$. Chaque composante x_i est un point spécial de $\mathcal{A}_6$ et on note R_{x_i} le centre de l'anneau des endomorphismes de la variété abélienne A_{x_i} paramétrisée par x_i.

Soit $O(x_i) = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F).x_i$ l'orbite sous Galois de x_i. Soit $O(\underline{x})$ celle de $\underline{x}$. Alors

$$|O(\underline{x})| \geqslant \max_{i=1}^{r} |O(x_i)|.$$

D'après le résultat de Tsimerman [Tsi11] sur la conjecture 2.7 il existe des réels positifs C_1 et δ tels que

$$|O(\underline{x})| \geqslant C_1 \max_{i=1}^{r} |\mathrm{disc}(R_{x_i})|^{\delta}.$$

Soit $\underline{Z} = (Z_1, \ldots, Z_r) \in \mathbb{H}_6^r \cap M_6(\overline{\mathbb{Q}})^r$, on définit la hauteur $H(\underline{Z})$ de $\underline{Z}$ par

$$H(\underline{Z}) = \max_{i=1}^{r} H(Z_i)$$

où $H(Z_i)$ désigne la hauteur sur $M_6(\overline{\mathbb{Q}}) \simeq \overline{\mathbb{Q}}^{36}$.

Soit $\mathcal{F}_6$ le domaine fondamental de Siegel pour $\mathcal{A}_6$. Notons $\underline{Z}_x$ le représentant de $\pi^{-1}(\underline{x})$ dans $\mathcal{F}_6^r$.

D'après le théorème 3.1 de [PT11] il existe des constantes positives C_2 et β telles que

$$H(\underline{Z}_x) \leqslant C_2 \max_{i=1}^{r} |\mathrm{disc}(R_{x_i})|^{\beta}. \tag{1}$$

On en déduit donc l'existence de constantes positives C_3 et α telles que pour tout point spécial $\underline{x}$ de $\mathcal{A}_6^r$, on ait

$$|O(\underline{x})| \geqslant C_3 H(\underline{Z}_x)^{\alpha}. \tag{2}$$

Soit $\tilde{V} = \pi^{-1}(V)$ et $\tilde{V}_0 = \tilde{V} \cap \mathcal{F}_6^r$. D'après le résultat de Peterzil–Starchenko [PS11], $\tilde{V}_0$ est définisable dans $\mathbb{R}_{\mathrm{an,exp}}$. Il n'y a qu'un nombre fini de points spéciaux $\underline{x}$ de V (ou même de $\mathcal{A}_6^r$) tels que $\max_{i=1}^{r} |\mathrm{disc}(R_{x_i})|$ soit borné.

Soit $\underline{x}$ un point spécial de V alors $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F).\underline{x}$ est contenu dans V. Soit $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$, et soit $\widehat{\sigma(\underline{x})}$ le relevé de $\sigma(\underline{x})$ dans $\mathcal{F}_6^r$. D'après le théorème de Pila–Wilkie et les estimations de l'équation (2), si

$$\max_{i=1}^{r} |\mathrm{disc}(R_{x_i})|$$

est assez grand, il existe $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/F)$ et un sous-ensemble semi-algébrique maximale de dimension positive Y contenant $\widehat{\sigma(\underline{x})}$. D'après le théorème d'Ax–Lindemann hyperbolique pour V, il existe une sous-variété faiblement spéciale $Z = \pi(Y)$ de V, de dimension positive, telle que $\sigma(\underline{x}) \in Z$. Comme la sous-variété Z contient un point spécial elle est en fait spéciale. On en déduit alors que $x \in \sigma^{-1}(Z)$ qui est une sous-variété spéciale de V. Ceci termine la preuve du théorème. □

Remerciements

J'ai eu de nombreuses conversations à propos de ce texte avec Andrei Yafaev que je remercie chaleureusement. Je souhaite remercier aussi Jean-Benoît Bost, Elisabeth Bouscaren et Laurent Clozel pour des discussions utiles et le rapporteur pour des remarques et des questions qui ont permis d'améliorer sensiblement la présentation du texte.

References

Bor69 A. Borel, *Introduction aux groupes arithmétiques* (Hermann, Paris, 1969).

CO C.-L. Chai and F. Oort, *Abelian varieties isogenous to a Jacobian*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), 589–635.

CU06 L. Clozel and E. Ullmo, *Equidistribution adèlique des tores et équidistribution des points CM*, Doc. Math. **Extra Volume**: John H. Coates' Sixtieth Birthday (2006), 233–260 (in French).

EMS97 A. Eskin, S. Mozes and N. Shah, *Non divergence of translates of certain algebraic measures*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 48–80.

FL81 E. Fortuna and S. Lojasiewicz, *Sur l'algébricité des ensembles analytiques complexes*, J. Reine Angew. Math. **329** (1981), 215–220.

KY06 B. Klingler and A. Yafaev, *The André–Oort conjecture*, Preprint (2006).

Mar89 G. A. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups* (Springer, Berlin, 1989).

Moo98 B. Moonen, *Linearity properties of Shimura varieties. I*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), 539–567.

PS11 Y. Peterzil and S. Starchenko, *Definability of restricted theta functions and families of Abelian varieties*, Preprint (2011).

Pil11 J. Pila, *O-minimality and the Andre–Oort conjecture for* $\mathbb{C}^n$, Ann. of Math. (2) **173** (2011), 1779–1840.

PW06 J. Pila and A. Wilkie, *The rational points on a definable set*, Duke Math. J. **133** (2006), 591–616.

PT11 J. Pila and J. Tsimerman, *The André–Oort conjecture for the moduli space of Abelian surfaces*, Preprint (2011), arXiv:1106.4023 [math.NT].

PT12 J. Pila and J. Tsimerman, *Ax-Lindemann for* $\mathcal{A}_g$, Preprint (2012), arXiv:1206.2663 [math.NT].

PZ08 J. Pila and U. Zannier, *Rational points in periodic analytic sets and the Manin–Mumford conjecture*, Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. **19** (2008), 149–162.

Tsi11 J. Tsimerman, *Brauer–Siegel for arithmetic tori and lower bounds for Galois orbits of special points*, Preprint (2011).

Ull06 E. Ullmo, *Equidistribution des sous-variétés spéciales II*, J. Reine Angew. Math. (2006), 1–24.

UY06 E. Ullmo and A. Yafaev, *Galois orbits and equidistribution of special subvarieties: towards the André–Oort conjecture*, Preprint (2006); version 2012 disponible à la page web http ://www.math.u-psud.fr/∼ullmo/.

UY06 E. Ullmo and A. Yafaev, *A characterisation of special subvarieties*, Mathematika **57** (2011), 263–273.

UY11b E. Ullmo and A. Yafaev, *Nombre de classes des tores de multiplication complexe et bornes inférieures pour les orbites Galoisiennes de points spéciaux*, Preprint (2011).

UY12 E. Ullmo and A. Yafaev, *The hyperbolic Ax-Lindemann conjecture in the compact case*, Preprint (2012).

Emmanuel Ullmo Emmanuel.Ullmo@math.u-psud.fr
Départment de Mathématiques, Université Paris-Sud, 91405 Orsay, France

https://doi.org/10.1112/S0010437X13007446