Compositio Mathematica **111:** 359–368, 1998.

Sur la hauteur de Faltings des variétés abéliennes à multiplication complexe

PIERRE COLMEZ
Département de mathématiques et informatique, École Normale supérieure, U.R.A. 1327 du C.N.R.S., 45 rue d'ULM, 75005 Paris, France; e-mail: colmez@dmi.ens.fr
Équipe d'arithmétique, Institut de mathématiques, U.M.R. 9994 du C.N.R.S., Tour 46-56 -5ème étage- Boite 247, 4 place Jussieu, 75252 Paris CEDEX 05, France

Received 12 September 1996; accepted in final form 24 February 1997

Abstract. Motivated by a result of Bost, we use the relationship between Faltings' heights of abelian varieties with complex multiplication and logarithmic derivatives of Artin L-functions at $s = 0$ to investigate these heights. In particular, we prove that the height of an elliptic curve with complex multiplication by $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ is bounded from below by an effective affine function of $\log d$.

Mathematics Subject Classification (1991): 14K

Key words: complex multiplication, Faltings' height, Siegel's zeroes, Artin L-functions.

Introduction

Si X est une variété abélienne semi-stable définie sur un corps de nombres K et possédant une différentielle de Néron $\omega \in H^0(X, \Omega_X^{\dim X})$, la hauteur de Faltings $h_{\mathrm{Fal}}(X)$ est définie par la formule

$$h_{\mathrm{Fal}}(X) = -\frac{1}{2[K:\mathbf{Q}]} \sum_{\sigma \in \mathrm{Hom}(K,\mathbf{C})} \log \left| \int_{A^\sigma(\mathbf{C})} \omega \wedge \overline{\omega} \right|.$$

La formule précédente ne dépend ni du choix de K ni de celui de ω. Comme toute variété abélienne définie sur un corps de nombres devient semi-stable et admet une différentielle de Néron sur une extension finie de ce corps de nombres, cela permet de définir la hauteur de Faltings de n'importe quelle variété abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$.

THÉORÈME 0 (Bost [B1]). *Il existe une constante absolue C_0 telle que si X est une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$, alors $h_{\mathrm{Fal}}(X) \geq C_0 \dim X$.*

Bost montre [B1] que l'on peut prendre $C_0 = -\log 2\pi$ (attention au fait que notre convention pour la hauteur de Faltings diffère de celle de Bost de $-(\dim X/2) \log 2\pi$). La plus petite valeur de $(\dim X)^{-1} h_{\mathrm{Fal}}(X)$ connue est obtenue pour la courbe elliptique d'invariant $j = 0$. On peut trouver dans [C] une conjecture exprimant la hauteur de Faltings d'une variété abélienne à multiplication complexe en termes de dérivées logarithmiques en $s=0$ de fonctions L d'Artin. Comme me l'a signalé Fouvry, on peut utiliser des techniques classiques de théorie analytique des nombres pour évaluer ces dérivées logarithmiques. Ceci fournit (modulo certaines conjectures comme la conjecture d'Artin) une démonstration du résultat de Bost pour les variétés abéliennes à multiplication complexe par la théorie analytique des nombres. La motivation initiale de ce travail était de voir si on pouvait utiliser les variétés abéliennes à multiplication complexe par un corps cyclotomique (pour lesquelles les conjectures utilisées dans la démonstration précédente sont en fait des théorèmes) pour améliorer le résultat de la courbe elliptique d'invariant $j=0$ et essayer de déterminer la constante optimale. Le (i) du Théorème 6 ci-dessous ruine ces espoirs; la raison en est que les corps cyclotomiques ont un discriminant beaucoup trop gros. Un des corollaires de ce théorème est que la hauteur des courbes elliptiques à multiplication complexe tend vers l'infini (suivant le filtre des complémentaires des parties finies); ce qui n'est pas évident a priori car elles sont définies sur des extensions de degré tendant aussi vers l'infini. Plus précisément, on montre le résultat suivant:

THÉORÈME 1. *Il existe des constantes $a \in \mathbf{R}$ et $b>0$ effectivement calculables telles que si d est un entier sans facteur carré et E_d est la courbe elliptique à multiplication complexe par l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, alors $h_{\mathrm{Fal}}(E_d) \geq a + b\log d$.*

1. Les résultats de ce paragraphe sont une reformulation pour le groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}$ de résultats bien connus sur l'algèbre hilbertienne d'un groupe compact (cf. [Di]). Soit $\overline{\mathbf{Q}}$ la fermeture algébrique de $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{C}$. Si $E \subset \overline{\mathbf{Q}}$ est un corps de nombres, notons $\mathcal{G}_E$ le groupe de Galois de $\overline{\mathbf{Q}}$ sur E. Soit $\mathcal{C}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$ [resp. $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$] le $\mathbf{C}$-espace vectoriel des fonctions [resp. fonctions centrales] localement constantes de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$. On munit $\mathcal{C}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$ d'un produit scalaire hermitien $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et d'un produit de convolution $*$ de la manière suivante. Si A_1 et A_2 sont deux éléments de $\mathcal{C}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$, on peut trouver un sous-groupe ouvert distingué de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ tel que A_1 et A_2 sont constants modulo H. On pose alors

$$\langle A_1, A_2\rangle = |\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H|^{-1} \sum_{g\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H} A_1(g)\overline{A_2(g)},$$

$$A_1 * A_2(g) = |\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H|^{-1} \sum_{h\in\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H} A_1(h)A_2(h^{-1}g)$$

et on vérifie que ces définitions ne dépendent pas du choix de H. Les caractères des représentations continues de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ dans des $\mathbf{C}$-espaces vectoriels de dimension finie [caractères d'Artin] forment une base orthonormée de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$. Si $A \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$

et H est un sous-groupe ouvert distingué de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ modulo lequel A est constante, on note A^0 l'élément de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$ défini par la formule

$$A^0(g) = |\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H|^{-1} \sum_{h \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H} A(hgh^{-1}).$$

On vérifie facilement que l'application linéaire ainsi définie est la projection orthogonale de $\mathcal{C}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$ sur $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$ et en particulier que l'on a $A^0 = \sum_\chi \langle A, \chi\rangle \chi$, la somme étant prise sur les caractères d'Artin, puisque ceux-ci forment une base orthonormée de $\mathcal{C}^0(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$.

LEMME 2. *Si pour $A \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$, on définit $A^\vee \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$ par $A^\vee(g) = \overline{A(g^{-1})}$, alors $\langle A * A^\vee, \chi\rangle$ est un nombre réel positif ou nul pour tout caractère d'Artin χ.*

Démonstration. $\overline{\chi}$ est le caractère d'une représentation ρ de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$, que l'on peut supposer unitaire, auquel cas, $\rho(g^{-1})$ est l'adjoint $\rho(g)^*$ de $\rho(g)$. Si H est un sous-groupe ouvert distingué de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ modulo lequel A et χ sont constants, on a

$$\begin{aligned}\langle A * A^\vee, \chi\rangle &= |\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H|^{-2} \sum_{g,h \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H} A(h)\overline{A(g^{-1}h)}\overline{\chi(g)} \\ &= |\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H|^{-2} \sum_{g,h \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H} A(h)\overline{A(g)\chi(hg^{-1})} = \mathrm{Tr}(uu^*),\end{aligned}$$

où l'on a posé

$$u = |\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H|^{-1} \sum_{g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/H} A(g)\rho(g),$$

et comme $\mathrm{Tr}(uu^*) \geq 0$, cela permet de conclure.

2. Soit $c \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ la conjugaison complexe. On appellera type CM toute fonction localement constante Φ de $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ dans $\{0, 1\}$ telle que l'on ait $\Phi(g) + \Phi(hch^{-1}g) = 1$ quels que soient g et h appartenant à $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$. Si $E \subset \overline{\mathbf{Q}}$ est un corps CM (i.e. une extension quadratique totalement imaginaire d'une extension finie totalement réelle de $\mathbf{Q}$) tel que l'on ait $\Phi(gh) = \Phi(g)$ quel que soit $h \in \mathcal{G}_E$, l'ensemble Φ_E des $\tau \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}}/\mathcal{G}_E = \mathrm{Hom}(E, \overline{\mathbf{Q}})$ tel que $\Phi(\tau) = 1$ est un type CM de E au sens classique et la fonction $A_{E,\Phi_E} \in \mathcal{C}(\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}, \mathbf{C})$ introduite dans [C] et donnée par la formule $A_{E,\Phi_E}(g) = |\Phi_E \cap g\Phi_E|$ est aussi égale à $[E : \mathbf{Q}]A_\Phi$, où l'on a posé $A_\Phi = \Phi * \Phi^\vee$. Une conséquence du Théorème 0.3 de [C] est que, si X_{E,Φ_E} est une variété abélienne définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ à multiplication complexe par l'anneau des entiers de E et dont le type CM est Φ_E, la quantité $(\dim X_{E,\Phi_E})^{-1} h_{\mathrm{Fal}}(X_{E,\Phi_E})$ ne dépend ni du choix de E ni du choix de X_{E,Φ_E}; nous la noterons $h_{\mathrm{Fal}}(\Phi)$. Posons

$$Z(A^0_\Phi, 0) = \sum_\chi \langle A_\Phi, \chi\rangle \frac{L'(\chi, 0)}{L(\chi, 0)} \quad \text{et} \quad \mu_{\mathrm{Art}}(A^0_\Phi) = \sum_\chi \langle A_\Phi, \chi\rangle \log f_\chi,$$

https://doi.org/10.1023/A:1000390105495 Published online by Cambridge University Press

où f_χ désigne le conducteur de χ. La conjecture suivante est une réécriture du (ii) de la Conjecture II.2.11 de [C] (voir aussi la Conjecture 0.4 et le Théorème 0.3 de [C]) car $(\dim X_{E,\Phi_E})^{-1} A^0_{E,\Phi_E} = 2A^0_\Phi$.

CONJECTURE 3. $h_{\mathrm{Fal}}(\Phi) = -2Z(A^0_\Phi, 0) - \mu_{\mathrm{Art}}(A^0_\Phi)$.

Soit $\mathcal{CM}$ l'ensemble des types CM (dans [C], $\mathcal{CM}$ désigne le sous-**Q**-espace vectoriel des fonctions localement constantes sur $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$ engendré par les types CM). Soit $\mathcal{CM}_1$ l'ensemble des $\Phi \in \mathcal{CM}$ vérifiant la Conjecture 3 et $\mathcal{CM}_2$ l'ensemble des $\Phi \in \mathcal{CM}_1$ tels que, si χ est un caractère d'Artin vérifiant $\langle A_\Phi, \chi\rangle \neq 0$, alors χ vérifie la conjecture d'Artin, c'est-à-dire que $L(\chi, s)$ est une fonction holomorphe sur **C**. On a par définition $\mathcal{CM} \supset \mathcal{CM}_1 \supset \mathcal{CM}_2$ et on conjecture que ces inclusions sont des égalités. On sait que $\mathcal{CM}_2$ contient les types CM se factorisant à travers le groupe de Galois d'un corps cyclotomique pas trop ramifié en 2 (de manière précise, contenu dans $\mathbf{Q}(\mu_{8n})$ avec n impair) car la Conjecture 3 est dans ce cas un théorème [C, Th. III.2.9] et les seuls caractères vérifiant $\langle A_\Phi, \chi\rangle \neq 0$ sont des caractères de Dirichlet, caractères pour lesquels la conjecture d'Artin s'établit facilement.

3. Remarquons que en vertu du lemme 2, on a $\langle A_\Phi, \chi\rangle \geq 0$ pour tout caractère χ. D'autre part, si $\chi \neq 1$, la non annulation de $\langle A_\Phi, \chi\rangle$ entraine que χ est un caractère impair (i.e. vérifiant $\chi(hch^{-1}g) = -\chi(g)$ quels que soient h et g appartenant à $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}}$). La fonction L d'un tel caractère vérifie une équation fonctionnelle du type $\Lambda(\chi, s) = w\Lambda(\overline{\chi}, 1-s)$, où w est un nombre complexe de module 1 et où l'on a posé

$$\Lambda(\chi, s) = f_\chi^{\frac{s}{2}} \left(\frac{\Gamma(\frac{s+1}{2})}{\pi^{\frac{s+1}{2}}}\right)^{\chi(1)} L(\chi, s).$$

On peut utiliser la factorisation en produit de Weierstrass de la fonction $\Lambda(\chi, s)$ pour obtenir la formule

$$-\frac{L'(\chi,0)}{L(\chi,0)} - \tfrac{1}{2}\log f_\chi = \frac{\chi(1)}{2}\left(-\log\pi + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right) + \sum_{\Lambda(\chi,\rho)=0} \frac{1}{\rho} - \sum_{\Lambda(\chi,\rho)=\infty} \frac{1}{\rho};$$

la somme sur les zéros et les pôles de $L(\chi, s)$ n'étant pas absolument convergente mais convergeant si on prend la somme sur ceux dont la partie imaginaire est comprise entre $-T$ et T et que l'on fait tendre T vers $+\infty$; d'autre part, si χ vérifie la conjecture d'Artin, la somme sur les pôles de $\Lambda(\chi, s)$ est évidemment vide.

PROPOSITION 4. *Si* $\Phi \in \mathcal{CM}_2$, *alors*

$$h_{\text{Fal}}(\Phi) > \frac{1}{2}\left(-\log 2\pi - \log \pi + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right).$$

Demonstration. Si on utilise le fait que $\langle A_\Phi, \chi\rangle = \langle A_\Phi, \overline{\chi}\rangle$, que si ρ est un zéro de $L(\chi, s)$, alors $\overline{\rho}$ est un zéro de $L(\overline{\chi}, s)$, les formules

$$\frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)} = \log 2\pi$$

$$\langle A_\phi, 1\rangle = \tfrac{1}{4} \tag{1}$$

$$\sum_{\chi \neq 1} \langle A_\Phi, \chi\rangle \chi(1) = A_\Phi(1) - \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4},$$

et la Conjecture 3, on obtient

$$\begin{aligned} h_{\text{Fal}}(\Phi) = \frac{1}{2}&\left(-\log 2\pi - \log \pi + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right) \\ &+2\sum_{\chi \neq 1} \langle A_\Phi, \chi\rangle \left(\sum_{\Lambda(\chi,\rho)=0} \frac{\mathrm{Re}(\rho)}{|\rho|^2}\right). \end{aligned} \tag{2}$$

Le résultat est alors une conséquence du fait que tous les zéros de $\Lambda(\chi, s)$ ont une partie réelle positive et que $\langle A_\Phi, \chi\rangle \geq 0$.

Remarque. La minoration ainsi obtenue est moins bonne que celle obtenue par Bost, mais n'importe quel renseignement supplémentaire sur la distribution des zéros de $\Lambda(\chi, s)$ permet de l'améliorer (cf. Proposition 5 ci-dessous)

PROPOSITION 5. *Il existe des constantes absolues effectivement calculables* C_1, C_2, C_3 *telles que si* χ *est un caractère d'Artin impair vérifiant la conjecture d'Artin, si* $T \geq 2$ *et si* $N(\chi, T)$ *désigne le nombre de zéros de la fonction* $\Lambda(\chi, s)$ *dont la partie imaginaire est comprise entre* $-T$ *et* $+T$, *alors*

$$\begin{aligned} &\left|\tfrac{1}{2}N(\chi, T) - \chi(1)\left(\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi}\right) - \frac{T}{2\pi}\log f_\chi\right| \\ &\quad \leq C_1\chi(1) + C_2 \log f_\chi + C_3\chi(1)\log T. \end{aligned}$$

Avant de démontrer cette proposition, ce qui constitue un exercice standard de théorie analytique des nombres (cf. [Da] ou [E] par exemple), tirons en quelques conséquences.

Soit $\mathcal{CM}_3$ le sous-ensemble des $\Phi \in \mathcal{CM}_2$ tels que si χ est un caractère d'Artin tel que $\langle A_\Phi, \chi \rangle \neq 0$, alors $L(\chi, s)$ ne s'annule pas sur la boule de centre 0 et de rayon $\frac{1}{4}$. L'hypothèse de Riemann généralisée aurait pour conséquence l'égalité $\mathcal{CM}_2 = \mathcal{CM}_3$.

THÉORÈME 6. (i) *Il existe une constante absolue effectivement calculable* $C_4 > 0$ *telle que si* $\Phi \in \mathcal{CM}_2$, *alors*

$$h_{\mathrm{Fal}}(\Phi) \geq \frac{1}{2}\left(-\log 2\pi - \log \pi + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right) + C_4 \mu_{\mathrm{Art}}(A_\Phi^0).$$

(ii) *Il existe des constantes absolues effectivement calculables* C_5, C_6 *telles que, si* $\Phi \in \mathcal{CM}_3$, *alors*

$$h_{\mathrm{Fal}}(\Phi) \leq C_5 + C_6 \mu_{\mathrm{Art}}(A_\Phi^0).$$

Démonstration. Si T_0 vérifie les inégalités $T_0 \geq 2\pi(C_2+1)$ et $\frac{T_0}{2\pi} \log \frac{T_0}{2\pi} - \frac{T_0}{2\pi} \geq C_1 + C_3 \log T_0$, ce qui est le cas si T_0 est assez grand, la proposition précédente implique que $N(\chi, T_0) \geq 2 \log f_\chi$, si $\langle A_\Phi, \chi \rangle \neq 0$. En regroupant la contribution de ρ et $1 - \overline{\rho}$ [si ils sont différents, ce qui ne peut se produire que si l'hypothèse de Riemann généralisée est fausse] dans la somme $\sum_{\Lambda(\chi,\rho)=0} \frac{\mathrm{Re}(\rho)}{|\rho|^2}$, on voit que celle-ci est au moins égale à $\frac{N(\chi,T_0)}{2(1+T_0^2)}$, d'où le (i) avec $C_4 = \frac{2}{(1+T_0^2)}$.

(ii) Si $\Phi \in \mathcal{CM}_3$ et ρ est un zéro d'une des fonctions $\Lambda(\chi, s)$ avec $\langle A_\Phi^0, \chi \rangle \neq 0$, alors $\frac{\mathrm{Re}(\rho)}{|\rho|^2} + \frac{\mathrm{Re}(1-\overline{\rho})}{|1-\rho|^2} \leq \inf((\mathrm{Im}(\rho))^{-2}, 8)$. Une intégration par partie nous donne donc

$$\sum_{\Lambda(\chi,\rho)} \frac{\mathrm{Re}(\rho)}{|\rho|^2} \leq 4N(\chi, 2\sqrt{2}) + \int_{2\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{N(\chi, T) - N(\chi, 2\sqrt{2})}{T^3}\, \mathrm{d}T$$

et le résultat suit facilement des formules (1) et (2) et de la majoration pour $N(\chi, T)$ que l'on déduit de la Proposition 5

Remarque. (i) On pourra rapprocher le (i) des résultats de Masser et Wüstholz majorant le discriminant de l'anneau des endomorphismes d'une variété abélienne ([M-W] et [B2, Th. 3.7]) en fonction de sa hauteur ($\mu_{\mathrm{Art}}(A_\Phi^0)$ est relié de très près au logarithme du discriminant de l'anneau des entiers du corps de multiplication complexe) et du degré de son corps de définition.

(ii) Le (ii) du Théorème 6 est un énoncé du type 'conjecture abc', conjecture qui a donc des conséquences sur l'emplacement des zéros des fonctions-L d'Artin au voisinage de 0 ou, ce qui revient au même, de 1 (zéros de Siegel). D'autre part, j'ignore s'il est possible d'étendre le résultat de Siegel sur les zéros des fonctions-L de Dirichlet proches de 1 aux fonctions-L d'Artin vérifiant la conjecture d'Artin. Si tel était le cas, on en déduirait un énoncé du type (ii) avec des constantes ineffectives (et une puissance de μ_{Art} au lieu d'une fonction affine de μ_{Art}) valable pour tout élément de $\mathcal{CM}_2$.

COROLLAIRE 7. *Soient $d > 0$ tel que $-d$ est le discriminant du corps quadratique imaginaire $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ et E_d une courbe elliptique à multiplication complexe par l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$; alors*

$$h_{\text{Fal}}(E_d) > \frac{1}{2}\left(-\log 2\pi - \log \pi + \frac{\Gamma'(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})}\right) + \frac{C_4}{4}\log d.$$

En particulier cette hauteur tend vers $+\infty$ quand d tend vers $+\infty$.

Démonstration. On a $h_{\text{Fal}}(E_d) = h_{\text{Fal}}(\Phi_d)$, où Φ_d est le type CM donné par $\Phi_d(g) = 1$ si $g \in \mathcal{G}_{\mathbf{Q}(\sqrt{-d})}$ et $\Phi_d(g) = 0$ sinon. Si χ_d est le caractère de Dirichlet correspondant à l'extension $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})/\mathbf{Q}$, alors $A_{\Phi_d} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\chi_d$ et donc $\mu_{\text{Art}}(A_{\Phi_d}) = \frac{1}{4}\log d$, ce qui permet de conclure.

Remarque. (i) Le résultat de Siegel auquel il a été fait allusion plus haut et la Proposition 5 impliquent que, quel que soit $\epsilon > 0$, il existe une constante $C_\epsilon > 0$ (non effective) telle que $h_{\text{Fal}}(E_d) \leq C_\epsilon d^\epsilon$.

(ii) La hauteur de Faltings d'une courbe elliptique dont l'anneau des endomorphismes est un sous-anneau de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$ peut s'exprimer [N-T] en fonction de celle d'une courbe elliptique dont l'anneau des endomorphismes est l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\sqrt{-d})$, ce qui permet d'étendre le Corollaire 7 à cette situation plus générale.

4. Revenons à la démonstration de la Proposition 5. Remarquons que remplacer T par $T - \epsilon$ et $T + \epsilon$ permet de ne considérer que les T tels que ni T ni $-T$ n'est la partie imaginaire d'un zéro de $\Lambda(\chi, s)$. La formule des résidus permet d'écrire $N(\chi, T)$ comme $\frac{1}{2\pi}$ fois la variation de l'argument de $\Lambda(\chi, s)$ quand s parcourt le rectangle X de sommets $2 - iT$, $2 + iT$, $-1 + iT$ et $-1 - iT$. L'équation fonctionnelle de $\Lambda(\chi, s)$ montre que cette variation est le double de celle sur le chemin X' allant de $\frac{1}{2} - iT$ à $2 - iT$ puis de $2 - iT$ à $2 + iT$ puis de $2 + iT$ à $\frac{1}{2} + iT$. Notons $\Delta_{X'}(f(s))$ la variation de l'argument de la fonction f sur le chemin X'

LEMME 8. *Si $T \in \mathbf{R}_+$, alors*

$$\Delta_{X'}\left(f_\chi^{s/2}\right) = T\log f_\chi \quad \text{et} \quad \Delta_{X'}(\pi^{-(s+1/2)}) = -T\log\pi$$

et il existe des constantes a_1, a_2 telles que

$$\left|\Delta_{X'}\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right) - T\log\frac{T}{2} + T\right| \leq a_1$$

$$\left|\Delta_{X'}(L(\chi,s))-\mathrm{Im}\left(\int_{\frac{1}{2}-iT}^{2-iT}\frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)}\,\mathrm{d}s+\int_{2+iT}^{\frac{1}{2}+iT}\frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)}\mathrm{d}s\right)\right|\leq a_2\chi(1).$$

Démonstration. Les deux premières formules sont des évidences, la troisième est une conséquence de la formule de Stirling et la quatrième provient de ce que la différence à majorer est égale à la variation de l'argument de $L(\chi,s)$ sur le segment $[2-iT,2+iT]$ et du lemme suivant qui montre que l'on peut prendre $a_2=2\log\zeta(2)$.

LEMME 9. *Si* $\mathrm{Re}(s)\geq 2$, *alors*

$$\left(\frac{\zeta(2)}{\zeta(4)}\right)^{\chi(1)}\leq|L(\chi,s)|\leq\zeta(2)^{\chi(1)}\quad\text{et}\quad|\log L(\chi,s)|\leq\chi(1)\log\zeta(2).$$

Démonstration. On peut écrire $L(\chi,s)$ sous la forme $\prod_p E_p(s)^{-1}$, où, si p est un nombre premier, $E_p(s)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $\chi(1)$ en p^{-s}, dont toutes les racines sont des racines de l'unité et dont le terme constant est égal à 1. On a donc

$$(1-p^{-2})^{\chi(1)}\leq|E_p(s)|\leq(1+p^2)^{\chi(1)}\quad\text{et}$$

$$|\log E_p(s)|\leq-\chi(1)\log(1-p^{-2}),$$

si $\mathrm{Re}(s)\geq 2$. Le lemme s'en déduit.

LEMME 10. *Il existe des constantes* C_1', C_2', C_3', *telles que si* χ *est un caractère d'Artin impair vérifiant la conjecture d'Artin et si* $T\in\mathbf{R}$ *vérifie* $|T|\geq 2$ *et n'est pas la partie imaginaire d'un zéro de* $L(\chi,s)$, *alors*

$$\left|\frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left(\int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+iT}\frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)}\,\mathrm{d}s\right)\right|\leq C_1'\chi(1)+C_2'\log f_\chi+C_3'\chi(1)\log|T|.$$

La Proposition 5 se déduit immédiatement du lemme précédent et du Lemme 8 avec $C_1=2C_1'+a_2+a_1$, $C_2=2C_2'$ et $C_3=2C_3'$; la suite de cette note va être consacrée à la démonstration du Lemme 10.

LEMME 11. *Il existe une constante* c_0 *telle que si* $\mathrm{Re}(s)=-1$, *alors* $|\Gamma(\frac{2-s}{2})\Gamma(\frac{s+1}{2})^{-1}|\leq c_0(1+|\mathrm{Im}(s)|)^{3/2}$.

Démonstration. C'est une conséquence de la formule de Stirling.

COROLLAIRE 12. *Si* $c_1=c_0\zeta(2)\pi^{-(3/2)}$ *et si* χ *est un caractère d'Artin, alors* $|L(\chi,-1+it)|\leq c_1^{\chi(1)}f_\chi^{3/2}(1+|t|)^{3/2\chi(1)}$.

Démonstration. On utilise le Lemme 9 qui nous donne $|L(\chi,s)|\leq\zeta(2)^{\chi(1)}$ si $\mathrm{Re}(s)\geq 2$, l'équation fonctionnelle de $\Lambda(\chi,s)$ et le lemme précédent.

La fonction $\Lambda(\chi, s)$ est d'ordre 1 si elle est holomorphe car c'est, d'après un théorème de Brauer, un quotient de produits de transformées de Mellin de fonctions Théta qui sont des fonctions d'ordre 1.

LEMME 13. *Soit f une fonction holomorphe sur* $\mathbf{C}$ *d'ordre* 1. *Soient $k > 0$ et $a < b$ des nombres réels. Si la fonction $f(s)\big(\max(1, |\mathrm{Im}(s)|)\big)^{-2k}$ est bornée sur les droites* $\mathrm{Re}(s) = a$ *et* $\mathrm{Re}(s) = b$, *alors elle est bornée sur la bande* $a \leq \mathrm{Re}(s) \leq b$.

Démonstration. La fonction f étant d'ordre 1, quel que soit $\epsilon > 0$, la fonction $f_\epsilon(s) = f(s)\exp(\epsilon^2(s - \frac{a+b}{2})^2)$ tend vers 0 quand s tend vers l'infini dans la bande $a \leq \mathrm{Re}(s) \leq b$. Ceci implique que cette fonction atteint son maximum sur une des deux droites $\mathrm{Re}(s) = a$ ou $\mathrm{Re}(s) = b$. Un petit calcul montre que si l'on a $|f(s)| \leq C\big(\max(1, |\mathrm{Im}(s)|)\big)^{2k}$ sur les droites $\mathrm{Re}(s) = a$ et $\mathrm{Re}(s) = b$ et si $\epsilon \leq 1$, alors le maximum de $|f_\epsilon(s)|$ sur ces droites est inférieur à $C'\epsilon^{-2k}$, avec $C' = C\big(\exp(\frac{b-a}{2})^2\big)k^k\,\mathrm{e}^{-k}$. On tire de cette majoration, en posant $\epsilon = |\mathrm{Im}(s)|^{-1}$, que si $a \leq \mathrm{Re}(s) \leq b$ et $|\mathrm{Im}(s)| \geq 1$, alors $|f(s)| \leq eC'|\mathrm{Im}(s)|^{2k}$, ce qui permet de conclure.

LEMME 14. *Si $c_2 = c_1 \sup_{t\in\mathbf{R}} \frac{(1+|t|)^{3/2}}{1+t^2}$ et si χ est un caractère d'Artin impair vérifiant la conjecture d'Artin, alors $|L(\chi, s)| \leq c_2^{\chi(1)} f_\chi^{3/2}|2 + s|^{2\chi(1)}$ si* $\mathrm{Re}(s) \geq -1$.

Démonstration. Le Corollaire 12 et la majoration $|L(\chi, s)| \geq \zeta(2)^{\chi(1)}$ si $\mathrm{Re}(s) \geq 2$ plus le fait que $L(\chi, s)$ est d'ordre 1, entrainent d'après le Lemme 13, que la fonction $L(\chi, s)(1 + |\mathrm{Im}(s)|)^{-(3/2)\chi(1)}$ est bornée sur la bande $-1 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 2$ puis que la fonction $(s+2)^{-2\chi(1)}L(\chi, s)$ tend vers 0 quand s tend vers l'infini dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s) \geq -1$. Ceci implique que cette fonction atteint son maximum sur ce demi-plan en un point de la droite $\mathrm{Re}(s) = -1$, ce qui, utilisant la majoration de $L(\chi, s)$ sur cette droite donnée au Corollaire 12, permet de terminer la démonstration.

COROLLAIRE 15. *Soit*

$$c_3 = c_2 \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)} \sup_{x^2+y^2\leq 3, |T|\geq 2} \left| \frac{(4 + a) + i(b + T)}{T} \right|.$$

Si χ est un caractère d'Artin impair vérifiant la conjecture d'Artin, T un nombre réel vérifiant $|T| \geq 2$ et $s \in$ $\mathbf{C}$ *vérifiant $|s - (2 + iT)| \leq 3$, alors*

$$\left| \frac{L(\chi, s)}{L(\chi, 2 + iT)} \right| \leq c_3^{\chi(1)} f_\chi^{3/2}|T|^{2\chi(1)}.$$

Démonstration. Il suffit d'utiliser le lemme précédent et la majoration $|L(\chi, 2 + iT)| \geq \left(\frac{\zeta(4)}{\zeta(2)}\right)^{\chi(1)}$ du Lemme 9.

LEMME 16. *Soient* $R > 0$, $q > 1$, $U > 0$ *et* $Q = \max(2, (q^2 \log q)^{-1})$. *Soient* $s \in \mathbf{C}$ *et* f *une fonction holomorphe sur le disque* $|s - s_0| \leq qR$ *ne s'annulant pas en* s_0 *et telle que* $|f(s)| \leq e^U |f(s_0)|$ *si* $|s - s_0| \leq qR$. *Si* Y *désigne l'ensemble des zéros de* f *sur le disque* $|s - s_0| \leq R$, *alors*

(i) $|Y| \leq \frac{qU}{q-1}$,
(ii) *quels que soient* $r < R$ *et* s *appartenant au disque de centre* s_0 *et de rayon* r,

$$\left| \frac{f'(s)}{f(s)} - \sum_{\rho \in Y} \frac{1}{s - \rho} \right| \leq \frac{QRU}{(R - r)^2}.$$

Démonstration. Voir [E, p. 121–123]

COROLLAIRE 17. *Si* Y_T *désigne l'ensemble des zéros de* $L(\chi, s)$ *sur le disque de centre* $2 + iT$ *et de rayon* 2, *alors*

(i) $|Y_T| \leq 3(\chi(1) \log c_3 + \frac{3}{2} \log f_\chi + 2\chi(1) \log |T|)$,
(ii) $\left| \frac{L'(\chi,s)}{L(\chi,s)} - \sum_{\rho \in Y_T} \frac{1}{s-\rho} \right| \leq 16(\chi(1) \log c_3 + \frac{3}{2} \log f_\chi + 2\chi(1) \log |T|)$ *pour tout* s *appartenant au segment* $[\frac{1}{2} + iT, 2 + iT]$.

Démonstration. On applique le Lemme 16 avec $f(s) = L(\chi, s)$, $s_0 = 2 + iT$, $R = 2$, $q = \frac{3}{2}$ et $r = \frac{3}{2}$.

On peut alors terminer la démonstration du Lemme 10 [et donc de la Proposition 5]. En effet, la partie imaginaire de $\int_{\frac{1}{2}+iT}^{2+iT} \frac{\mathrm{d}s}{s-\rho}$ est inférieure en valeur absolue à π. Le lemme précédent montre donc que l'on peut prendre $C'_1 = (\frac{3}{2} + \frac{12}{\pi}) \log c_3$, $C'_2 = \frac{9}{4} + \frac{18}{\pi}$ et $C'_3 = \frac{3}{2} + \frac{24}{\pi}$. On peut d'autre part améliorer C'_2 [et donc C_2] en choisissant pour X' un demi-rectangle passant plus près de la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$.

Références

[B1] Bost, J.-B.: Arakelov geometry of abelian varieties, dans '*Conference on Arithmetical Geometry*', Berlin, March 21–26, 1996, Max-Planck Institut für Mathematik Bonn, preprint 96–51.

[B2] Bost, J.-B.: Périodes et isogénies des variétés abéliennes sur les corps de nombres (d'après D. Masser et G. Wüstholz), exposé Bourbaki 795, *Astérisque* 237 (1996) 115–161.

[C] Colmez, P.: Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe, *Ann. of Math*. 138 (1993) 625–683.

[Da] Davenport, H.: *Multiplicative Number Theory*, Markham, Chicago, 1967.

[Di] Dixmier, J.: Les C*-*Algèbres et Leurs Représentations*, Gauthiers-Villars, Paris, 1964.

[E] Ellison, J., Mendès, France M.: *Les Nombres Premiers*, Publications de l'université de Nancago IX, Hermann, Paris, 1975.

[M-W] Masser, D., Wüstholz, G.: Endomorphism estimates for abelian varieties, *Math. Zeit*. 215 (1994) 641–653.

[N-T] Nakkajima, Y., Taguchi, Y.: A generalization of the Chowla-Selberg formula, *J. reine angew. Math.* 419 (1991) 119–124.