BULLETIN 13 (1), 1970

DEMONSTRATION DE LA FORMULE KÜNNETH PAR LA THEORIE HARMONIQUE

PAR
NGÔ VAN QUÊ

Etant données deux variétés différentiables compactes M et N, nous avons la formule de Künneth

$$H^r(M\times N, R) = \bigoplus_{p+q=r} [H^p(M, R) \otimes H^q(M, R)]$$

qui établit la relation entre la cohomologie réelle de la variété produit avec celle des facteurs. Cette formule est bien connue en topologie algébrique, et elle est valable dans le contexte plus général de la catégorie des espaces topologiques. Nous voulons donner ici une démonstration de cette formule par la théorie harmonique de Hodge-Kodaira [1]. Une telle démonstration n'est pas explicite, autant que je sache, dans la littérature; elle est désirable, par exemple, dans un cours de géométrie différentielle sur les formes harmoniques.

1. Désignons respectivement par p_1 et p_2 les projections de la variété produit $M\times N$ sur les facteurs M et N. Nous avons pour le fibré cotangent T^* de $M\times N$ le produit de Whitney sur $M\times N$

$$T^* = T_1^* \times T_2^*$$

où T_1^* et T_2^* sont respectivement les fibrés induits $p_1^*T^*(M)$ et $p_2^*T^*(N)$ sur $M\times N$ par p_1 et p_2 des fibrés cotangents de M et N.

D'où, pour le produit extérieur

$$\Lambda^r T^* = \bigoplus_{p+q=r} (\Lambda^p T_1^* \otimes \Lambda^q T_2^*)$$

Alors A^r étant l'espace des r-formes extérieures de $M\times N$, i.e., l'espace des sections de $\Lambda^r T^*$, nous avons

$$A^r = \bigoplus_{p+q=r} A^{p,q}$$

$A^{p,q}$ étant l'espace des sections de $\Lambda^p T_1^* \otimes \Lambda^q T_2^*$. La différentiation extérieure $d\colon A^r \to A^{r+1}$ est évidemment telle que $d\colon A^{p,q} \to A^{p+1,q} \oplus A^{p,q+1}$.

Ainsi nous avons la décomposition canonique de d en deux composantes

$$d = d_1 + d_2 \tag{1}$$

avec

$$d_1\colon A^{p,q} \to A^{p+1,q}$$

et

$$d_2\colon A^{p,q} \to A^{p,q+1}$$

Version revisée reçue le 17 décembre 1969.

https://doi.org/10.4153/CMB-1970-018-6 Published online by Cambridge University Press

Les opérateurs d_1 et d_2 sont des opérateurs respectivement induits sur les formes extérieures de $M\times N$ par la différentiation extérieure sur M et N; précisément, α et β étant des formes extérieures sur M et N, on a

$$\begin{aligned} dp_1^*\alpha &= d_1p_1^*\alpha = p_1^*d\alpha \\ dp_2^*\beta &= d_2p_2^*\beta = p_2^*d\beta \end{aligned} \tag{2}$$

2. Nous allons supposer donner sur M et N des structures Riemaniennes. Sur $M\times N$, il y a la structure Riemanienne produit. Par la théorie de Hodge–Kodaira, l'espace A des formes extérieures sur $M\times N$ est un espace préhilbertien, dont nous avons évidemment cette décomposition orthogonale

$$A = \bigoplus_{p,q} A^{p,q}$$

Nous noterons par δ l'opérateur adjoint de la différentiation extérieure de A

$$\langle d\omega,\ \omega'\rangle = \langle \omega, \delta\omega'\rangle$$

L'opérateur $\delta\colon A^r\to A^{r-1}$ est aussi tel que

$$\delta\colon A^{p,q}\to A^{p-1,q}\oplus A^{p,q-1}$$

D'où encore la décomposition de δ en deux composantes

$$\delta = \delta_1+\delta_2 \tag{1'}$$

avec

$$\delta_1\colon A^{p,q}\to A^{p-1,q}$$
$$\delta_2\colon A^{p,q}\to A^{p,q-1}$$

qui sont respectivement des opérateurs adjoints de d_1 et d_2. De même, δ_1 et δ_2 sont des opérateurs induits sur $M\times N$ respectivement par l'opérateur adjoint δ de M et N; précisément, α et β étant respectivement des formes extérieures de M et N, on a

$$\begin{aligned} \delta p_1^*\alpha &= \delta_1p_1^*\alpha = p_1^*\delta\alpha \\ \delta p_2^*\beta &= \delta_2p_2^*\beta = p_2^*\delta\beta \end{aligned} \tag{2'}$$

3. Dénotons par H^r les r-formes harmoniques de $M\times N$, i..e, l'ensemble des r-formes ω de A^r telles que $d\omega=0$ et $\delta\omega=0$. Si h_1 et h_2 sont respectivement des p-formes, q-formes harmoniques de M et N, on a

$$(p_1^*h_1)\otimes(p_2^*h_2)\in H^r \quad \text{où} \quad p+q = r$$

En effet, d'après (2)

$$\begin{aligned} d(p_1^*h_1\otimes p_2^*h_2) &= (d_1p_1^*h_1)\otimes p_2^*h_2+p_1^*h_1\otimes(d_2^*p_2h_2) \\ &= (p_1^*dh_1)\otimes p_2^*h_2+(p_1^*h_1)\otimes(p_2^*dh_2) \\ &= 0 \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1970-018-6 Published online by Cambridge University Press

et d'après (2′)

$$\begin{aligned}\delta(p_1^*h_1 \otimes p_2^*h_2) &= (\delta_1 p_1^*h_1) \otimes (p_2^*h_2) + p_1^*h_1 \otimes (\delta_2 p_2^*h_2)\\ &= (p_1^*\delta h_1) \otimes p_2^*h_2 + p_1^*h_1 \otimes (p_2^*\delta h_2)\\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi donc $p_1^* \otimes p_2^*$ définit une application évidemment injective

(3) $$p_1^* \otimes p_2^*\colon \bigoplus_{p+q=r} H^p(M) \otimes H^q(N) \to H^r$$

où $H^p(M)$ et $H^q(N)$ sont respectivement l'espace des formes harmoniques de M et N.

4. D'après le théorème fondamental de Hodge-de Rham qui donne l'isomorphisme entre la cohomologie réelle et l'espace des formes harmoniques d'une variété compacte Riemanienne, la formule de Künneth est équivalente à dire que l'application $p_1^* \otimes p_2^*$ de (3) est surjective. Ou ce qui revient au même de dire que si ω est une r-forme fermée de $M \times N$, ω est cohomologue à une forme qui est dans l'image de $\otimes_{p+q=r} H^p(M) \otimes H^q(N)$ par l'application $p_1^* \otimes p_2^*$.

Rappelons que nous avons

$$A^r = \bigoplus_{p+q=r} A^{p,q}$$

Ainsi dans cette décomposition $\omega = \omega^{r,0} + \omega^{r-1,1} + \cdots + \omega^{0,r}$

(a) Si $\omega = \omega^{0,r}$, la relation $d\omega = d_1\omega^{0,r} + d_2\omega^{0,r} = 0$ nous donne ces deux égalités $d_1\omega^{0,r} = 0$ et $d_2\omega^{0,r} = 0$.

Il est immédiat de voir que la première des dernières égalités implique

$$\omega^{0,r} = p_2^*\beta$$

où β est une r-forme de N. Et d'après (2)

$$0 = d_2\omega^{0,r} = d_2p_2^*\beta = p_2^*d\beta;$$

comme p_2^* est injectif, β est fermé. Or sur N, la r-forme fermée β est cohomologue à une r-forme harmonique h_2 de N.

$$\beta = h_2 + d\sigma$$

D'où

$$\omega = \omega^{0,r} = p_2^*\beta = p_2^*h_2 + dp_2^*\sigma$$

C'est ce que nous voulons montrer pour ω.

(b) Dans le cas général, nous allons réduire successivement le problème à ce cas particulier. Supposons donc que

$$\omega = \omega^{p,r-p} + \omega^{p-1,r-p+1} + \cdots + \omega^{0,r}$$

avec $p > 0$.

Les opérateurs d_1 et δ_1 étant adjoints l'un de l'autre, d'après Hodge–Kodaira, nous avons pour tout couple (p, q) dans l'espace préhilbertien $A^{p,q}$ cette décomposition orthogonale

$$A^{p,q} = H_1^{p,q} + d_1 A^{p-1,q} + \delta_1 A^{p+1,q} \tag{4}$$

où $H_1^{p,q}$ est l'ensemble des formes $\omega^{p,q}$ de $A^{p,q}$ telles que

$$d_1 \omega^{p,q} = 0 \quad \text{et} \quad \delta_1 \omega^{p,q} = 0$$

L'espace $H_1^{p,q} + d_1 A^{p-1,q}$ est l'ensemble des formes $\omega^{p,q}$ qui sont d_1-fermées, i.e., $d_1 \omega^{p,q} = 0$. La remarque suivante est essentielle, quoique nous laissions au lecteur de faire la vérification immédiate.

$$H_1^{p,q} = p_1^* H^p(M) \otimes p_2^* A^q(N) \tag{5}$$

Ceci dit, la forme ω étant fermée

$$d\omega = d_1 \omega + d_2 \omega = 0$$

Ce qui entraine que dans la décomposition $\omega = \omega^{p,r-p} + \cdots + \omega^{0,r}$, nous avons

$$d_1 \omega^{p,r-p} = 0 \text{ et } d_2 \omega^{p,r-p} + d_1 \omega^{p-1,r-p+1} = 0$$

D'où d'après (4) et (5), $\omega^{p,r-p}$ étant d_1-fermé,

$$\omega^{p,r-p} = \sum_i p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* \beta_i + d_1 \sigma^{p-1,r-p}$$

où $[h_{1,i}]$ est un ensemble fini de p-formes harmoniques *linéairement indépendantes* de M; β_i, des $(r-p)$-formes de N et $\sigma^{p-1,r-p}$ une forme de $A^{p-1,r-p}$. Ainsi nous avons

$$0 = d_2 \omega^{p,r-p} + d_1 \omega^{p-1,r-p+1} = \sum_i p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* d\beta_i + d_1 d_2 \sigma^{p-1,r-p} + d_1 \omega^{p-1,r-p+1}$$

Donc encore d'après la décomposition (4), nous avons $\sum_i p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* d\beta_i = 0$. Comme les $h_{1,i}$ sont linéairement indépendantes, $p_2^* d\beta_i = 0$ ou encore $d\beta_i = 0$. Ainsi donc β_i sont des $(r-p)$-formes fermées de N,

$$\beta_i = h_{2,i} + d\gamma_i$$

i.e. β_i est cohomologue à une $(r-p)$-forme harmonique $h_{2,i}$ de N. D'où

$$\begin{aligned} \omega^{p,r-p} &= \sum_i p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* h_{2,i} + \sum_i p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* d\gamma_i + d_1 \sigma^{p-1,r-p} \\ &= \sum p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* h_{2,i} + d\left(\sum p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* \gamma_i\right) + d\sigma^{p-1,r-p} - d_2 \sigma^{p-1,r-p} \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$\omega - \sum_i p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* h_{2,i} = (\omega^{p-1,r-p+1} - d_2 \sigma^{p-1,r-p}) + \omega^{p-2,r-p+2} + \cdots + \omega^{0,r} + d\left(\sum_i p_1^* h_{1,i} \otimes p_2^* \gamma_i + \sigma^{p-1,r-p}\right)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1970-018-6 Published online by Cambridge University Press

le second membre étant cohomologue à une forme fermée ω' de A^r telle que

$$\omega' = \omega'^{p-1,r-p+1} + \omega'^{p-2,r-p+2} + \cdots + \omega'^{0,r}$$

C.Q.F.D.

Reference

1. Georges de Rham, *Variétés différentiables*, Hermann, Paris.

Université de Montréal,
Montréal, Quebec