DEUX CENTS ANS DE MÉCANIQUE CÉLESTE SOUS LES AUSPICES DU BUREAU DES LONGITUDES

BRUNO MORANDO
Bureau des longitudes
Paris, France

Abstract. Two hundred years of Celestial Mechanics under the auspices of Bureau des Longitudes. Lagrange and Laplace were two of the first members of Bureau des longitudes which, among other tasks, were responsible for the improvement of astronomical tables and the progress of celestial mechanics. Between 1795 and 1850, many improved tables were published under the auspices of Bureau des longitudes: tables of the Sun by Delambre (1806), of the Moon by Burg (1806), Burckhardt (1812) and Damoiseau (1828), of Jupiter, Saturn and Uranus by Bouvard (1808, 1821), of Mercury by Le Verrier (1844), of the satellites of Jupiter by Delambre (1817) and Damoiseau (1836). In his tables, Bouvard showed there was a problem for Uranus. This led to the calculations of the elements of an unknown planet by Le Verrier and Adams and the discovery of Neptune in 1846. Le Verrier's calculations were published in *Connaissance des Temps* for 1849. In the second half of the XIXth century, two prominent members of Bureau des longitudes, Le Verrier and Delaunay, made major contributions to celestial mechanics by building elaborate theories for the motions of the Sun, the planets and the Moon. Other theories, which improved the above, appeared elsewhere at the end of the century, especially those of Newcomb, Hill and Brown. During the first half of the XXth century, there was a decline of the studies in celestial mechanics which seemed to have reached its limits owing to the difficulties of the computations involved. Yet Sampson's theory of the motion of the satellites of Jupiter and Chazy's first attempts to introduce general relativity into classical celestial mechanics should be quoted. In 1961, thanks to A. Danjon, Bureau des longitudes was reorganized so that its computation service became a research laboratory where, since then, important work in the theories of the planets, the Moon and the satellites has been made.

S. Ferraz-Mello et al. (eds.), Dynamics, Ephemerides and Astrometry of the Solar System, 3–16.

Après la mort de Newton, rien de concret n'a été fait pendant assez longtemps dans le domaine de la mécanique céleste. Les savants de l'époque dominaient encore trop mal le calcul intégral, mais un développement rapide se fera à partir de 1740. C'est un suisse, Euler, et deux français, Clairaut et d'Alembert, qui, les premiers, réussissent à mettre en équation le problème du mouvement d'un corps perturbé par un autre et à en trouver des solutions à l'aide des séries trigonométriques que les travaux d'Euler avaient rendues utilisables. Citons les travaux de Clairaut sur la figure de la Terre et le mouvement de la Lune (1752) ainsi que ses calculs de prédictions du retour de la comète de Halley pour 1759. En 1754, D'Alembert publie sa propre théorie de la Lune. Un autre groupe de savants français, Lagrange et Laplace vont, vingt ans plus tard, faire faire des progrès décisifs à la mécanique céleste. Ces deux astronomes furent tous deux membres fondateurs du Bureau des longitudes et commencent donc la période qui nous occupe.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) est né à Turin d'une famille d'origine française. Il fonde en 1759 l'Académie de Turin. Il invente le calcul des variations et Euler le fait rentrer à l'Académie de Berlin où il est invité par Frédéric II en 1766. Après la mort du roi de Prusse en 1786, Lagrange est invité à Paris où il restera jusqu'à sa mort. Les travaux de Lagrange en mécanique céleste portent principalement sur son étude de certaines solutions du problème des 3 corps (découverte des *"points de Lagrange"*, sommets de triangles équilatéraux occupés par les 3 corps) et sur la méthode de la variation des constantes qui consiste à faire varier les paramètres caractérisant une orbite elliptique sous l'effet des perturbations extérieures. Il introduisit ainsi les célèbres équations de Lagrange et la notion de fonction perturbatrice. Ces travaux sont rassemblés dans la *"Mécanique analytique"* parue en 1788.

Pierre-Simon Laplace (1749-1827), né en Normandie, vint à Paris à l'âge de 18 ans où il fit une carrière glorieuse à l'École Normale et au Comité des Poids et Mesures. Il fut ministre de l'intérieur pendant quelques jours sous le consulat, puis sénateur, comte, marquis sous Louis XVIII. Ses deux grands ouvrages sont *" l'exposition du système du monde"*, où il expose sa théorie de la formation du système solaire à partir d'une nébuleuse primitive et sa *" Mécanique céleste"* en cinq volumes publiés entre 1799 et 1825. L'œuvre de Laplace est considérable tant en physique qu'en mathématiques (calcul des probabilités). C'est surtout ses travaux de mécanique céleste qu'il faut rappeler ici: étude de l'accélération séculaire de la Lune, découverte de la grande inégalité de Jupiter et Saturne, développement de la fonction perturbatrice des planètes, stabilité du système solaire, théorie des satellites de Jupiter, etc.

Au début du XIXe siècle, la mécanique céleste est tournée presque exclusivement vers la résolution du problème des mouvements dans le système solaire, cas particulier du problème des n corps que la nature a mis sous les yeux des astronomes. Font exception les travaux d'Édouard Roche (1820-1883) sur la structure interne des corps célestes sous l'effet de l'attraction mutuelle des particules qui les composent et qui le conduiront à introduire la notion de *limite de Roche (Mémoires de l'Académie des Sciences de Montpellier*, tome 1, 1849) et ceux de Laplace et Poincaré sur les marées.

1. Développement de la fonction perturbatrice

On exprimera le hamiltonien du mouvement en fonction des variables si l'on a exprimé en fonction de ces variables une fonction des coordonnées des corps en présence appelée *fonction perturbatrice.* Ceci n'est plus possible qu'en représentant la fonction perturbatrice par une somme d'un plus ou moins grand nombre de termes où certaines des variables figurent sous des signes cosinus, les variables qui leur sont conjuguées figurant dans les coefficients de ces cosinus. Les contributeurs à ce problème du développement de la fonction perturbatrice ont été nombreux au XIXe siècle. Laplace avait introduit les fonctions dites *coefficients de Laplace* pour développer l'inverse de la distance de deux planètes. F. Bessel (1784-1846) fit usage pour la première fois de ses *fonctions de Bessel* dans un traité sur le développement de la fonction perturbatrice paru à Berlin en 1824. En 1831, Peter A. Hansen introduisit dans son " *Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns*" des fonctions, dites *coefficients de Hansen*, qui permettent les développements des rayons vecteurs des planètes, ou des puissances quelconques de ceux-ci, en séries trigonométriques des anomalies moyennes, les coefficients étant des séries entières de l'excentricité. Notons le rôle important joué dans toutes ces questions par les *polynômes de Legendre* introduits par ce mathématicien en 1782 dans son traité sur la *Figure des planètes.*

Le premier développement de la fonction perturbatrice des planètes jusqu'au troisième ordre des excentricités et des inclinaisons avait été donné par Laplace. Philippe de Pontécoulant (1795-1874), dans son *Système du Monde*, l'étendit au sixième ordre. En 1849, Peirce publia également un développement au sixième ordre dans l'*Astronomical Journal*, vol. 1. Le Verrier poussa le développement au septième ordre dans le premier volume des *Annales de l'Observatoire de Paris.*

2. Résolution des équations du mouvement

Les équations canoniques étant formées et la fonction perturbatrice étant développée jusqu'à un certain ordre de précision, comment en obtenir une solution approchée ? S'il s'agit d'une théorie de planète on cherchera un développement en puissances des masses des planètes perturbatrices, petites devant celle du Soleil; s'il s'agit de la Lune, le petit paramètre utilisé est le rapport de la distance Terre-Lune à la distance Terre-Soleil, ou une quantité qui lui est liée (rapport des moyens mouvements). Les coefficients de ces puissances des petits paramètres sont des sommes d'un grand nombre de termes périodiques qu'il n'est pas facile d'obtenir.

L'une des méthodes auxquelles on peut songer consiste à effectuer un changement de variables sur le système canonique de manière à le rendre plus simple. Ainsi, Delaunay, pour sa théorie de la Lune, réduit le hamiltonien à un terme périodique isolé. L'argument de ce terme est une combinaison linéaire des trois variables angulaires et du temps. Elle est prise comme unique variable angulaire d'un nouveau système canonique qui est alors intégrable. Cette opération est répétée en prenant successivement les différents termes périodiques du hamiltonien. Cette méthode fut fort admirée par Hill qui l'étudia et la compléta en 1907 dans son mémoire *" On the extension of Delaunay's method in the lunar theory to the general problem of planetary motions"* figurant dans les *Collected Mathematical Works*, vol. 4, memoir 66. Une importante modification de la méthode de Delaunay fut faite par von Zeipel dans son article en français *" Recherches sur le mouvement des petites planètes"* paru en 1916 dans une revue suédoise, *Arkiv Mat., Astron., Fysik* vol.11, 12, 13. La modification consiste à introduire une fonction génératrice pour effectuer une opération de Delaunay et à éliminer simultanément plusieurs termes périodiques, même si leurs arguments ne sont pas multiples d'un même argument.

3. La découverte de Neptune

La planète Uranus avait été découverte par William Herschel en 1781, mais on s'aperçut ensuite que des observations avaient été faites antérieurement par des astronomes qui l'avaient prise pour une étoile fixe, si bien que l'on disposait, en 1820, de quarante ans d'observations méridiennes et de dix-neuf observations faites entre 1690 et 1771 par Flamsteed, Bradley, Mayer et Lemonnier. Alexis Bouvard (1767-1843) était un ancien assistant de Laplace pour lequel il avait effectué les calculs détaillés figurant dans sa célèbre *Mécanique Céleste*. Il publia des tables de Jupiter et de Saturne dès 1808 et assura, pendant longtemps, le calcul des éphémérides de l'*Annuaire du Bureau des longitudes*. En 1821, il entreprit de recalculer des tables pour le mouvement de Jupiter et de Saturne et d'y ajouter des tables du mouvement d'Uranus, en suivant les méthodes développée par Laplace dans sa *Mécanique Céleste* pour tenir compte des perturbations. Il lui fut impossible de représenter convenablement les observations: l'écart atteignait $1'5$ pour certaines d'entre elles.

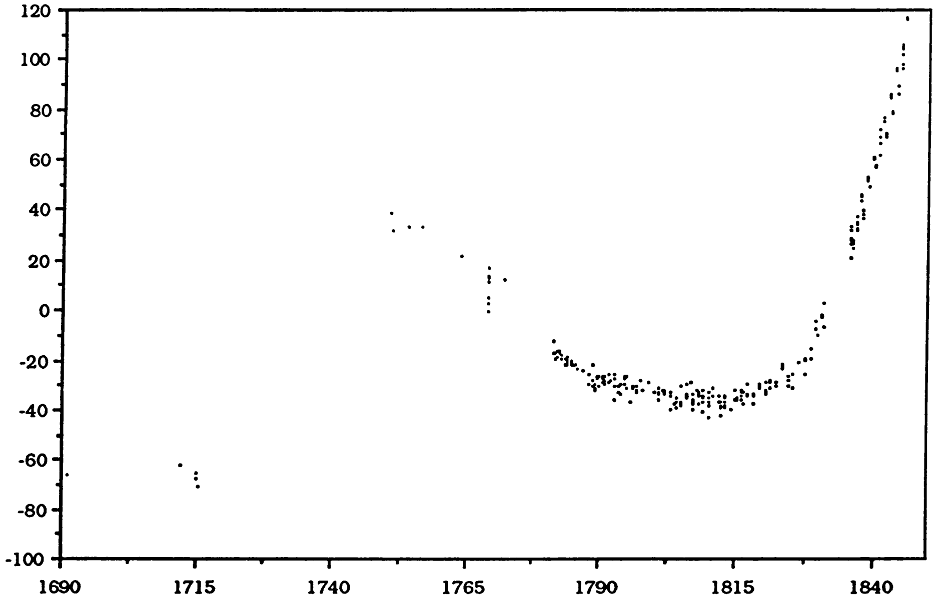

Figure 1. **Écarts entre longitude observée et longitude calculée de la planète Uranus ayant mené Le Verrier à la découverte de Neptune (de 1690 à 1840) en secondes de degrés**

Il attribua ceci à la mauvaise qualité des observations anciennes et ne conserva que celles qui avaient été faites après 1781 mais, même alors, des écarts de près de 30″ subsistaient. Bouvard écrivait :

"(...) je laisse au temps le soin de faire connaître si la difficulté (...) tient réellement à l'inexactitude des observations anciennes, ou si elle dépend de quelque action étrangère et inaperçue, qui aurait agi sur la planète".

Cependant, les écarts continuaient à croître et atteignaient près de 2′ en 1845 (fig. 1) malgré la précaution que Bouvard avait jugé utile de prendre en écartant les observations anciennes. Dès 1835, Airy, puis Eugène Bouvard, neveu d'Alexis, Arago, Bessel, Sir John Herschell s'entretiennent de ce sujet et proposent de chercher une hypothétique planète perturbatrice.

En 1843 Adams n'avait que 24 ans, il était fellow à Saint John's College, Cambridge, et se fixa pour but de trouver une éventuelle planète troublante. Au moyen d'approximations successives et en faisant varier les paramètres du problème, Adams arriva à un ensemble d'éléments de l'orbite de la planète inconnue qui permettait de ramener à des valeurs raisonnables les résidus des observations. Il prédit la position de la planète sur le ciel et, en septembre 1845, envoya son travail à James Challis, astronome à Greenwich puis, après avoir par deux fois tenté en vain de le voir personnellement, transmit une note à Sir George Airy, Astronome Royal, directeur de l'observatoire de Greenwich. Airy écrivit brièvement à Adams et lui demanda une précision que “la jugeant futile” celui-ci ne donnera pas. L’affaire en reste là.

Pendant ce temps, Le Verrier travaillait assidûment. Durant l’été de 1845, Arago l’avait persuadé de l’importance qu’il y aurait à résoudre le problème et l’avait convaincu d’abandonner momentanément les recherches sur les comètes qu’il avait entreprises. Contrairement à Adams, il publie, et ce au fur et à mesure de l’avancement de ses travaux: le 10 novembre 1845 présentation à l’Académie des Sciences d’un *premier Mémoire sur la Théorie d’Uranus* suivi, le 1er juin 1846, d’un mémoire intitulé *Recherches sur les mouvements d’Uranus* et, le 31 août, d’un troisième mémoire *Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d’Uranus, détermination de sa masse, de son orbite et de sa position actuelle.* Après la découverte il lira à l’Académie des Sciences, le 5 octobre 1846, un dernier mémoire intitulé *Sur la planète qui produit les anomalies observées dans le mouvement d’Uranus, cinquième et dernière partie, relative à la détermination de la position du plan de l’orbite.* Il regroupera tout ceci dans un mémoire unique, publié ensuite dans la *Connaissance des Temps* pour 1849, sous le titre: *Recherches sur les mouvements de la planète Herschel* (dite Uranus).

Finalement il présenta à l’Académie des Sciences le 31 août 1846 les résultats suivants: masse, 1/9322 fois la masse du Soleil; demi-grand axe, 36.1539 unités astronomiques; excentricité, 0.10761; longitude du périhélie au 1er janvier 1847, 284°45′8″; longitude héliocentrique de la planète à la même date, 326°32′. Restait à trouver la planète. Ce ne fut pas si simple. Il semble que la plupart des observateurs, en particulier en France, se soient montrés sceptiques et réticents. On lit souvent que Le Verrier s’est finalement adressé à Galle parce qu’il savait que l’observatoire de Berlin disposait des bonnes cartes du ciel de Bremiker mais rien ne le prouve, Le Verrier n’en fait pas mention dans la lettre qu’il adresse à Galle et il semble même, comme nous le verrons, que Galle lui-même n’a pensé à cette carte qu’au dernier moment. Quoi qu’il en soit, le 18 septembre, Le Verrier écrit à Johan Gottfried Galle (1812-1910), astronome à l’observatoire de Berlin, dont le célèbre Encke était alors directeur. Galle était connu de Le Verrier auquel il avait envoyé peu de temps auparavant sa thèse de doctorat. Il reçoit la lettre le 23 septembre et, le soir même, aidé du jeune astronome Henri d’Arrest, il pointe l’excellente lunette de 9 pouces d’ouverture (23 cm) de Fraunhofer vers la région indiquée et ne trouve pas le disque de 3″ de diamètre que, selon Le Verrier, la planète devait présenter. Cela n’a rien d’étonnant car le pouvoir de résolution théorique de son instrument était de 0″5 et il aurait fallu un ciel particulièrement pur pour voir un disque de 3″ de diamètre. Grâce aux récentes bonnes cartes de Bremiker on trouve enfin la planète à 52′ de la position prévue le 23 septembre 1846.

4. Les théories du mouvement de la Lune

La lune étant proche de la Terre et ayant un assez faible éclat, son déplacement parmi les étoiles est rapide et facilement observable. Ceci explique que de nombreuses particularités de son mouvement, comme la rotation de la ligne des nœuds, l'équation du centre, l'évection, etc., étaient connues d'Hipparque, de Ptolémée et des astronomes arabes. Tycho Brahé observa de nouvelles inégalités du mouvement mais il fallut évidemment attendre Newton et les mécaniciens célestes du XVIIIe siècle pour que l'on vît apparaître des théories mathématiques du mouvement s'appuyant sur la loi de la gravitation universelle. Où en était-on à la mort de Laplace? Rappelons que Clairaut, en 1752, avait publié une théorie dont la précision sur la position de la Lune était de l'ordre de 1′5. Il faut ensuite citer les théories de D'Alembert, Tobias Mayer et les deux théories d'Euler avant d'arriver à celle de Laplace publiée en 1802, qui a une précision de 0′5 et qui a le mérite d'essayer d'expliquer l'accélération séculaire à laquelle nous consacrerons plus loin un paragraphe. Des tables publiées par Bury en 1806 et par Burckardt en 1812 exploitent directement la théorie de Laplace.

Dans la *Connaissance des Temps* pour 1824, puis pour 1827, fut publiée la théorie de la Lune de Damoiseau (1768-1846), analogue à celle de Laplace. Le franco-italien G. Plana publia en 1832 une théorie de la Lune entièrement littérale.

La théorie que Poisson a publiée en 1833, n'est pas une théorie complète du mouvement de la Lune car il n'a pas pu pousser assez loin les calculs auxquels elle le conduisait. Il suppose, en première approximation que le demi-grand axe, l'excentricité et l'inclinaison de l'orbite sont constants et que la longitude moyenne de la Lune, celle du périgée et celle du nœud sont des fonctions linéaires du temps. Ces quantités sont substituées dans les seconds membres des équations qui, développés, sont intégrés terme à terme. On obtient une meilleure approximation pour le demi-grand axe, l'excentricité, etc. que l'on substitue dans les seconds membres et l'on réitère ensuite le processus. Évidemment, les calculs, surtout avec les moyens de l'époque, deviennent vite inabordables, mais la méthode sera utilisée avec profit plus tard dans certains problèmes de mécanique céleste quand les ordinateurs auront apparu.

Philippe, comte de Pontécoulant (1795-1874), savant de grand mérite et dont on reparlera à propos de Jupiter et de Saturne, a commencé à publier ses travaux sur la Lune en 1837. Sa théorie date de 1846; elle donna lieu plus tard à des publications en 1860 dans les *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, puis en 1862 dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences de Paris.* Les variables qu'utilise Pontécoulant sont la longitude, la latitude et le rayon vecteur de la Lune et il introduit dès l'orbite approximative de départ le mouvement du nœud et celui du périgée. La théorie est entièrement littérale c'est-à-dire qu'on ne suppose connues a priori les valeurs numériques d'aucune des variables du problème.

Charles Delaunay (1816-1872) construisit la plus précise et la plus complète de toutes les théories littérales du mouvement de la Lune, travail fabuleux qui lui prit vingt ans et qui fut publié sous forme de deux gros volumes des *Mémoires de l'Académie des Sciences*, vol. 28 en 1860 et vol. 29 en 1867. La méthode qu'il a suivie figure sous les titres *" Mémoire sur une nouvelle méthode pour la détermination du mouvement de la Lune"* dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* vol. 22 (1846) et *" Sur une méthode d'intégration applicable au calcul des perturbations des planètes et de leurs satellites"* dans ces mêmes *Comptes-Rendus* vol. 40 (1855).

Après sa mort, Airy, puis Andoyer, apportèrent certaines corrections à la théorie de Delaunay qui fut mise en tables par Radau. Le recueil d'éphémérides françaises, la *Connaissance des Temps*, l'utilisa entre 1915 et 1925, année où elle fut supplantée par la théorie de Hill-Brown. Si l'on en croit les comparaisons faites par Tisserand et Newcomb, on peut juger rapidement du point de vue de la précision les théories de la Lune vues jusqu'ici en disant que les théories de Damoiseau et de Pontécoulant avaient des erreurs de l'ordre de 4″, celles de Hansen et de Delaunay des erreurs de l'ordre de 1″.

5. Satellites des planètes

"La détermination des mouvements des satellites galiléens de Jupiter constitue l'un des plus beaux problèmes de la mécanique céleste". C'est ce qu'écrivait Tisserand en 1896. Effectivement, ces quatre corps tournent autour de Jupiter en s'attirant les uns les autres comme le font les planètes en tournant autour du Soleil. Ceci oblige à combiner un problème de type planétaire, avec toutes les difficultés qui lui sont inhérentes, avec un problème de type lunaire qui a, lui aussi, ses difficultés propres. Ensuite, il faut tenir compte des perturbations dues à l'aplatissement de Jupiter et, surtout, résoudre les problèmes que posent des quasi commensurabilités entre les périodes de certains satellites. En effet, si l'on désigne respectivement par n, n', n'' les moyens mouvements des trois premiers satellites galiléens Io, Europe et Ganymède, on a presque exactement: $n - 3n' + 2n'' = 0$. Laplace avait montré que cette relation est toujours vraie. Elle entraîne la présence de petits diviseurs, sources de grandes difficultés dans la théorie. La première véritable théorie du mouvement des satellites galiléens est celle que Laplace construisit en 1788. Entre les deux théories, celle de Laplace et celle de Sampson, il n'y a pas grand chose à signaler, tout au moins pas grand chose qui ait mené à un progrès sensible sur la précision des éphémérides. En 1817 Delambre puis, en 1836, Damoiseau publient des tables construites à partir de la théorie de Laplace, mais qui ne sont guère supérieures aux tables que l'on construisait auparavant empiriquement à partir d'analyses de longues séries d'observations. En 1880, Souillart puis, en 1896, Tisserand apportent d'importants compléments à la théorie de Laplace dont, en particulier, ils modifient la valeur des principaux termes de résonance.

Après les travaux de Laplace sur les perturbations du plan de l'orbite du satellite Japet il faut signaler les résultats publiés par Tisserand sur ce même Japet et sur les anneaux de Saturne dans le tome 1 des *Annales de l'observatoire de Toulouse* (1880).

6. Les théories planétaires

En 1773 Laplace puis, d'une façon plus complète, Lagrange en 1776 avaient montré que le demi-grand axe de l'orbite d'une planète perturbée par d'autres n'avait que des variations périodiques et non pas des variations séculaires (c'est-à-dire proportionnelles au temps ou à des puissances du temps) qui auraient eu pour effet à long terme de disperser le système solaire. Ce résultat, cependant, n'était démontré qu'en se bornant au premier ordre des masses des planètes. En 1809 Poisson avait étendu ce théorème au second ordre des masses et Lagrange avait essayé d'en donner une démonstration plus simple, mais il s'était trompé dans les calculs. Tisserand donnera une démonstration correcte du théorème de Poisson, d'abord dans les *Mémoires de l'Académie de Toulouse*, 7e série, tome 7, dans les *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences*, tome 80 et enfin dans le premier tome de sa *Mécanique Céleste* (1888).

7. Les théories planétaires de Le Verrier

Le Verrier a consacré presque exclusivement son œuvre scientifique à l'édification de théories des mouvements des planètes extrêmement précises qui ont d'ailleurs servi à l'établissement des éphémérides de ces corps dans la *Connaissance des Temps* jusqu'en 1984. Dès 1839 Le Verrier présentait un mémoire à l'Académie des Sciences *"Sur les variations séculaires des orbites des planètes"*. En 1843 paraissait un second mémoire intitulé *"Détermination nouvelle de l'orbite de Mercure et de ses perturbations"*. De 1844 à 1847 parurent divers mémoires sur les comètes périodiques, en particulier sur la comète Lexell et la comète Faye, travaux qu'il interrompit pour résoudre le problème des perturbations d'Uranus. On a déjà cité les mémoires qu'il a publié à ce sujet.

Décidé à s'occuper des mouvements planétaires, il établit le plan de ses recherches en juillet 1849 et publie la même année ses travaux sur la fonction

https://doi.org/10.1017/S0074180900127068 Published online by Cambridge University Press

perturbatrice dans le tome 1 des *Annales de l'observatoire de Paris.* Cette publication fut d'ailleurs fondée à l'initiative de Le Verrier qui y fit figurer par la suite tous les résultats de ses travaux sur les planètes. Un peu plus tard les *Astronomical Papers of the American Ephemeris* joueront le même rôle auprès de Newcomb.

La construction de théories planétaires passe par différentes étapes:

• Obtenir une solution des équations du mouvement qu'il faut mettre en table faute, à l'époque de Le Verrier, de pouvoir dans la pratique calculer directement les positions.

• Calculer les positions de la planète considérée pour toutes les dates des observations disponibles et modifier les éléments de l'orbite de façon à réduire l'écart entre ces positions et celles que les observations ont fournies.

• Enfin, s'il s'avère que c'est impossible par cette méthode, modifier les valeurs de certaines des constantes qui interviennent dans le problème, en particulier les masses des planètes.

• Il se peut que même ce dernier recours ne soit pas satisfaisant et il faut alors faire des hypothèses nouvelles sur les causes de tels phénomènes. Si l'on se représente les moyens de calcul de l'époque on s'imagine l'ampleur de la tâche.

Dans le tome 2 des *Annales de l'observatoire de Paris*, Le Verrier fit paraître en 1852 les résultats de la réduction des 9000 observations méridiennes des planètes faites par Bradley entre 1750 et 1762. La théorie du mouvement du Soleil figure dans le tome 4. Le Verrier y introduit des perturbations du 2e ordre par rapport aux masses perturbatrices qui modifient de $5''$ la longitude moyenne du Soleil pour 1850. Cette théorie l'a conduit à diminuer la masse adoptée alors pour Mars de 10% et à augmenter celle de la Terre de 10%. On sait maintenant, à la lumière des théories modernes basées sur des intégrations numériques, que les erreurs de la théorie de Le Verrier peuvent atteindre $1'',5$. La théorie du mouvement de Mercure fait l'objet du tome 5 (1859) des *Annales.* Le Verrier y rencontra l'avance inexpliquée du périhélie qui fera l'objet d'un paragraphe spécial un peu plus loin. Dans le tome 6 paraît en 1861 la théorie du mouvement de Vénus. On y voit une inégalité nouvelle découverte par Airy et une inégalité du 2e ordre due à la Terre et à Mars. La théorie du mouvement de Vénus amène Le Verrier à diminuer la masse alors adoptée pour Mercure et à augmenter celle de la Terre. Il a utilisé pour déterminer les constantes d'intégration, outre des observations méridiennes faites de 1751 à 1857, deux passages de Vénus sur le disque du Soleil observés en 1761 et 1769. On sait maintenant que les erreurs sur la position de Vénus calculée par la théorie de Le Verrier peuvent atteindre $19''$.

Dans ce même tome 6 figure la théorie du mouvement de Mars qui s'appuie sur des observations méridiennes faites entre 1751 et 1858 et sur une conjonction de la planète avec les étoiles ψ_1, ψ_2, ψ_3 du Verseau observée en 1672, en France par Picard et à Cayenne par Richer, dans le but de calculer la parallaxe du Soleil et donc sa distance à la Terre. Le Verrier est amené à introduire dans la longitude de Mars un terme d'amplitude $1'',5$ et de période 40 ans inconnu jusque là ainsi que deux inégalités du deuxième ordre, l'une due à la Terre et à Vénus et l'autre à la Terre et à Jupiter. Les travaux de Le Verrier sur le Soleil, Mercure, Vénus et Mars lui valurent en 1868 la médaille d'or de la Royal Astronomical Society.

Le problème des mouvements de Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune est un problème beaucoup plus difficile, que Le Verrier n'aura pas le temps de mener à terme avant sa mort. En novembre 1872 paraît un premier mémoire sur les théories des quatre planètes supérieures qui traite des termes séculaires de ces planètes. En mars 1873 paraît la théorie du mouvement de Jupiter, en juillet 1873 celle de Saturne, en novembre 1874 celle d'Uranus et en décembre celle de Neptune.

Mais à l'époque les moyens de calcul dont on dispose font qu'il n'est pas question d'établir des éphémérides en sommant des séries trigonométriques, comme on peut le faire de nos jours avec des ordinateurs. Il faut dresser des tables, en général à double entrée, qu'on interpole pour calculer les diverses inégalités à un instant donné. Les tables de Jupiter paraissent en juin 1874, celles de Saturne en août 1875, les tables d'Uranus en novembre 1876. Les tables de Neptunes achevées par Gaillot sont présentées par celui-ci en octobre 1877, un mois après la mort de Le Verrier. Tous ces travaux sur les grosses planètes figurent dans les tomes 10, 11, 12,13 et 14 des *Annales de l'observatoire de Paris.*

Les théories des mouvements de Jupiter et de Saturne sont difficiles d'une part à cause de l'importance des forces perturbatrices, ces deux planètes étant massives et loin du Soleil, et d'autre part parce que le rapport du moyen mouvement de Jupiter à celui de Saturne est presque exactement égal à $5/2$ ce qui entraîne la *grande inégalité* des longitudes des deux planètes dont la période est proche de 850 ans et l'amplitude environ $20'$ pour Jupiter et 1° pour Saturne. Jacobi avait trouvé une méthode pour isoler dans la fonction perturbatrice les termes de résonance correspondants et publié ce résultat dans son mémoire intitulé *"Versuch einer Berechnung der grossen Ungleichheit des Saturns nach einer strengen Entwickelung"* (*Astronomische Nachrichten*, tome 28, 653-654). La théorie de Le Verrier permet de représenter les observations de Jupiter faites entre 1750 et 1869 avec une erreur en longitude inférieure à $1''$ et, après que des corrections furent apportées par Gaillot, les observations de Saturne faites de 1750 à 1890, avec une erreur en longitude inférieure à $3''$ en valeur absolue. Les théories modernes montrent que la situation n'a pas empiré par la suite et que ces erreurs étaient toujours à peu près les mêmes vers les années 1970.

8. Autres travaux - Comètes

La découverte de Cérès, le 1er janvier 1801, fut suivie de nombreuses autres découvertes de petites planètes; mais les moyens mouvements de Jupiter et de certaines petites planètes sont souvent presque commensurables, ce qui introduit des résonances, phénomène dont nous avons déjà eu l'occasion de parler. Aussi les méthodes classiques, même si elles ont pu être utilisées avec succès par Perrotin pour Vesta (*Annales de l'observatoire de Toulouse, tome 1, 1880*) ou essayées par Damoiseau pour Cérès et Junon (*Addition à la Connaissance des Temps* pour 1846), sont peu efficaces.

Le Verrier avait trouvé qu'un terme de résonance de période 800 ans dans le mouvement de Pallas avait une amplitude de 895″. A. Cauchy (1789-1857), bien que mathématicien et non astronome, fut chargé par l'Académie des Sciences de vérifier ce résultat et inventa en six semaines une méthode ingénieuse qu'il publia dans les *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* (tome 20, 1845). V. Puiseux a exposé la méthode dans les *Annales de l'Observatoire de Paris* (tome 7, 1863) ainsi que Tisserand dans le tome 4 de son *Traité de Mécanique Céleste*.

En juin 1770, Messier avait découvert une comète dont A. Lexell (1740-1784), membre de l'Académie des Sciences de Saint-Petersbourg, étudia l'orbite et à laquelle il donna son nom. Il trouva que c'était une orbite elliptique dont le demi-grand axe était égal à 3 unités astronomiques, ce qui donnait à la comète une période de 5 ans et 7 mois. Une période aussi courte aurait dû permettre la découverte de la comète bien longtemps auparavant; par ailleurs, la comète avait disparu quelques années après sa découverte. On montra alors, en particulier Burckardt à l'instigation de Laplace, que des passages de la comète très près de Jupiter avaient profondément modifié l'orbite à deux reprises. Ceci posait un problème particulier que les techniques de calcul numérique de l'époque ne permettaient pas de résoudre d'une façon satisfaisante. Laplace, suivant en cela une idée de D'Alembert, avait alors introduit la notion de sphère d'activité: sur une certaine partie de la trajectoire d'une comète perturbée par Jupiter on a intérêt à considérer le mouvement héliocentrique et à déterminer les perturbations par Jupiter. Près de Jupiter au contraire, à l'intérieur de sa *sphère d'activité*, il est plus avantageux de considérer le mouvement jovicentrique de la comète et de calculer les perturbations par le Soleil. Le Verrier en 1857 reprendra cette méthode et l'appliquera à la comète de Lexell dans son mémoire *"Sur la théorie de la comète périodique de 1770"* (*Annales de l'observatoire de Paris*, tome 3). Un problème intéressant a été posé et résolu par Tisserand dans le *Bulletin Astronomique ("Sur la théorie de la capture des orbites périodiques"*, vol. 6, 1889) et reproduit dans le tome 4 de son *Traité de Mécanique Céleste* (1896). Il a donné lieu à la règle connue sous le nom de *critère de Tisserand.* Le problème est de savoir si deux comètes périodiques apparues à deux époques différentes sont ou non le même objet dont les éléments de l'orbite ont été modifiés par un passage proche de Jupiter. Utilisant une intégrale première du problème restreint des trois corps trouvée par Jacobi, Tisserand montre qu'il s'agit bien du même objet si l'on a:

$$\frac{1}{2a} + \sqrt{\frac{a(1-e^2)}{a'^3}} \cos i = cte$$

où a est le demi-grand axe de l'orbite de la comète, a' celui de l'orbite de Jupiter, e l'excentricité de l'orbite de la comète et i l'inclinaison du plan de l'orbite de la comète sur le plan de l'orbite de Jupiter. L'excentricité de l'orbite de Jupiter est négligée mais Callandreau dans son mémoire *"Étude sur la théorie des comètes périodiques"* (*Annales de l'observatoire de Paris*, tome 20, 1892) a montré comment tenir compte de la première puissance de cette excentricité.

Il faut bien sûr rappeler que la période qui nous occupe a vu deux passages de la célèbre comète de Halley, en 1835 et en 1910. Pour les calculs de prédiction du passage de 1835 nous retrouvons les deux compétiteurs au concours sur le mouvement de la Lune: Damoiseau et Pontécoulant. Damoiseau en 1820 prédit le retour de la comète pour le 17 novembre 1835 (*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de Turin*, 24,1). Il avait tenu compte des perturbations par Jupiter, Saturne et Uranus (planète inconnue au passage précédent) pendant la période s'étendant de 1682 à 1835. Il ajouta ensuite les perturbations par la Terre dans un second mémoire paru en 1829 (publié comme *supplément à la Connaissance des Temps* pour 1832), ce qui ramena la date du passage au soir du 4 novembre. Pontécoulant, avec les mêmes hypothèses que Damoiseau, publia trois mémoires en 1830, 1834 et 1835 (respectivement *suppléments à la Connaissance des Temps* pour 1833 et 1837 et *Mémoires présentés à divers savants de l'Académie des Sciences*, publié en 1835). Sa prédiction finale pour le passage est le 12 novembre à 22h. Le passage au périhélie eut lieu le 16 novembre à 10h. Pontécoulant entreprit aussi la prédiction du passage de 1910 dès 1864.

9. Deux "petites difficultés"

C'est ainsi que Tisserand appelle le problème de l'avance du périhélie de Mercure et l'accélération séculaire de la Lune qui semblaient mettre en défaut la loi de la gravitation universelle. La première fut découverte par Le Verrier qui trouva une avance inexpliquée de 38″ par siècle. La seconde fut étudiée par Laplace qui pensa expliquer l'accélération de la Lune de 20″/siècle/siècle par les perturbations planétaires de l'excentricité de l'orbite terrestre. En fait, la première difficulté fut résolue grâce à la Relativité Générale, la seconde par le ralentissement de la rotation de la Terre due aux marées.

Le début du siècle est marqué par l'œuvre majeure d'Henri Poincaré (1854-1912). Indépendamment de ses travaux mathématiques et philosophiques, il est connu pour sa théorie des orbites périodiques et asymptotiques, ses travaux sur la convergence des séries du problème des n corps, sur les intégrales premières, les exposants caractéristiques, les invariants intégraux, les marées. Son ouvrage le plus célèbre est *"Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste"* paru entre 1892 et 1899.

La mort de Poincaré marque la fin d'une époque triomphale de l'astronomie classique désormais débordée par l'astrophysique.

La mécanique céleste semblait bloquée par l'ampleur des calculs qu'il aurait fallu pouvoir faire, calculs qui paraissaient d'ailleurs inutiles compte-tenu de la précision des observations. Il faudra attendre 1960, les ordinateurs, les premiers satellites artificiels pour voir un renouveau de la mécanique céleste en France, et en particulier au Bureau des longitudes.