ÜBER DIE ZWISCHENSYSTEME DER AUSSAGENLOGIK*

TOSHIO UMEZAWA

Die klassische Aussagenlogik ist, bekanntlich, in dem Sinne vollständig, dass die Hinzufügung einer klassisch nicht beweisbaren Formel als Axiom dieses Systems stets einen Widerspruch nach sich zieht. Die Vollständigkeit (in diesem Sinne) kann für intuitionistische Aussagenlogik nicht bestehen, weil noch immer die Formel $A \vee \bar{A}$ (der Satz vom ausgeschlossenen Dritten) hinzugefügt werden kann. Es steht aber die Frage, ob man aus der intuitionistischen Aussagenlogik durch Hinzufügung einer klassisch beweisbaren und intuitionistisch nicht beweisbaren Formel stets die klassischen Aussagenlogik bekommt.

Wir behandeln die logistischen Kalküle, wie sie von G. Gentzen[1)] formalisiert worden sind, wobei wir uns ausschliesslich auf den Bereich der Aussagenlogik beziehen. Wir bezeichnen mit LJ' die logistische intuitionistische Aussagenlogik, welche aus LK durch folgende Einschränkung entsteht, dass bei den Schlussfigurenschemata für FES und NES nicht mehr als eine Sequenzformel vorkommen darf. Es wird leicht bewiesen, dass das System LJ' mit dem Gentzenschen LJ äquivalent ist[2)]. Sind LU und LV die zwei logischen Systeme, so bezeichnen wir mit $LU \geqq LV$ die Tatsache, dass die Klasse der im System LU herleitbaren Sequenzen umfassender als die der im LV herleitbaren Sequenzen ist, und mit $LU \supset LV$, dass es weiter wenigstens eine im LU herleitbare und im LV nicht herleitbare Sequenz gibt.

Wenn für das System LZ $LK \supset LZ \supset LJ'$ gilt, so nennen wir LZ ein *Zwischensystem*. Unsere Frage ist nun gleichwertig mit derjenigen, ob es

---

Received June 24, 1955.

* Für die wertvolle Hilfe bei der Fertigstellung dieser Arbeit bin Ich Prof. K. Ono zu Dank verpflichtet. Auch verdanke Ich Herrn I. Nishimura die aufbauende Kritik des Manuskriptes.

1) Vgl. G. Gentzen, Untersuchungen über das logische Schliessen, Math. Zeits. **39** (1935), S. 176–210 und 405–431.

2) Vgl. S. Maehara, Eine Darstellung der intuitionistischen Logik in der klassischen, Nagoya Math. Jour. **7** (1954), S. 46–64. Auch fand Ich diese Tatsche ohne Kenntnis seiner Arbeit. Im System LJ' gilt nicht der Gentzensche Hauptsatz, also verlieren wir den Erfolg der Anwendung des Hauptsatzes auf das Entscheidungsproblem. Aber ist das uns nicht wesentlich.

wenigstens ein Zwischensystem gibt. In §1 dieser Arbeit zeige Ich einen Satz über Reduzibilität eines Sequenzschemas auf ein kurzeres äquivalente und in §2 sowie in §4 beweise Ich, dass es die linear geordneten wenigstens abzählbaren Zwischensysteme geben. In §3 sind die Äquivalenzen von einiger speziellen Zwischensysteme studiert.

§1. Die Äquivalenz

Eine Sequenz nennen wir *Z-herleitbar*, wenn die Sequenz im System LZ herleitbar ist.

Eine Schlussfigur nennen wir *Z-herleitbar*, wenn es eine Herleitung im LZ gibt, deren Anfangssequenzen die Obersequenzen der Schlussfigur und deren Endsequenz die Untersequenz der Schlussfigur. Anstatt J'-herleitbar sprechen wir meistens als herleitbar an.

Zwei Formeln $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nennen wir *äquivalent*, wenn zwei Sequenzen $\mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B} \rightarrow \mathfrak{A}$ herleitbar sind.

Ein Sequenz- bzw. Schlussfigurschema nennen wir *äquivalent* mit einem anderen Sequenz- bzw. Schlussfigurschema, wenn alle aus dem einen Schema entstandenen Sequenzen bzw. Schlussfiguren im solchen System, welche aus LJ' und das andere Sequenz- bzw. Schlussfigurschema besteht, herleitbar sind.[3]

Zwei logische Systeme nennen wir *äquivalent*, wenn alle im eine System herleitbaren Sequenzen im anderen herleitbar sind.

Es ist ersichtlich, dass zwei Systeme, die jeder aus einem System durch Hinzufügungen der miteinander äquivalenten Grundsequenzen- bzw. Schlussfigurenschemata entstehen, miteinander äquivalent sind.

Im folgenden sollen grosse deutsche Buchstaben als Mitteilungszeichen für Formeln, grosse griechische Buchstaben als Mitteilungszeichen für (evtl. leere) Reihen von Formeln dienen. Wir gebrauchen die logischen Zeichen $\wedge$ für Und-Zeichen, $\vee$ für Oder-Zeichen, $\supset$ für Folgt-Zeichen und $^{-}$ für Nicht-Zeichen.

Nun wollen wir die Begriffe, die *Bedingungsstelle* und die *Schlussstelle* einer Formel bzw. Sequenz, rekursiv erklären.[4] Sei $\mathfrak{E}$ eine für eine beliebige

---

[3] Um missverständis zu vermeiden, gebrauchen wir das Wort „Sequenzschema" für den Ausdruck, woraus die Sequenzen durch Einsetzungen entstehen.

[4] Diese Definition und die folgende Terminologie verdanke Ich Prof. K. Ono. Vgl. K. Ono, Logische Untersuchungen über die Grundlagen der Mathematik, Jour. of the Faculty of Science, Imp. Univ. of Tokyo, section 1, Vol. III, 1938.

Elementarformel stehende Mitteilungszeichen.

1. $\mathfrak{E}$ steht an einer Schlussstelle in der Formel $\mathfrak{E}$.

2. Steht $\mathfrak{E}$ an einer Bedingungs- bzw. Schlussstelle in $\mathfrak{A}$ oder in $\mathfrak{B}$, so steht die genannte $\mathfrak{E}$ an einer Bedingungs- bzw. Schlussstelle in $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$, in $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, und auch in $\mathfrak{C} \supset \mathfrak{A}$.

3. Steht $\mathfrak{E}$ an einer Bedingungs- bzw. Schlussstelle in $\mathfrak{A}$, so steht die genannte $\mathfrak{E}$ an einer Schluss- bzw. Bedingungsstelle in $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$, sowie in $\overline{\mathfrak{A}}$.

4. Steht $\mathfrak{E}$ an einer Bedingungs- bzw. Schlussstelle in $\mathfrak{A}$, so steht die genannte $\mathfrak{E}$ an einer Schluss- bzw. Bedingungsstelle in der Sequenz der Gestalt Γ, $\mathfrak{A}$, $\Delta \rightarrow \Theta$ und an einer Bedingungs- bzw. Schlussstelle in der Sequenz der Gestalt $\Gamma \rightarrow \Theta$, $\mathfrak{A}$, Δ.

Wenn die Elementarformeln der Gestalt $\mathfrak{E}$ überall, wo sie in einer Sequenz vorkommen, entweder zusammen an den Bedingungsstellen oder zusammen an den Schlussstellen stehen, so wollen wir sagen, dass der Sequenz in Bezug auf diese Elementarformel $\mathfrak{E}$ *einseitig* ist.

Nun gilt

SATZ 1. *Wenn ein Sequenzschema in bezug auf eine Elementarformel $\mathfrak{E}$ einseitig ist, so ist dieses Sequenzschema äquivalent mit dem solchen, welches aus dem gegebenen durch das folgende Verfahren entsteht.*

Stehen $\mathfrak{E}$ an den Bedingungs- bzw. Schlussstellen in diesem Sequenzschema, so setzen wir für $\mathfrak{E}$ die richtige Formel α bzw. die falsche ϕ ein, für die $\rightarrow \alpha$ bzw. $\phi \rightarrow$ gilt, und ersetzen die entstandenen Formeln von innen nach der folgenden Regel nacheinander:

$\alpha \wedge \mathfrak{A}$ *durch* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \wedge \alpha$ *durch* $\mathfrak{A}$, $\alpha \vee \mathfrak{A}$ *durch* α, $\mathfrak{A} \vee \alpha$ *durch* α,
$\alpha \supset \mathfrak{A}$ *durch* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \supset \alpha$ *durch* α, $\overline{\alpha}$ *durch* ϕ, $\phi \wedge \mathfrak{A}$ *durch* ϕ,
$\mathfrak{A} \wedge \phi$ *durch* ϕ, $\phi \vee \mathfrak{A}$ *durch* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \vee \phi$ *durch* $\mathfrak{A}$, $\phi \supset \mathfrak{A}$ *durch* α,
$\mathfrak{A} \supset \phi$ *durch* $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\phi}$ *durch* α.

Schliesslich ersetzen wir

$$\Gamma \rightarrow \Delta, \phi, \Phi \textit{ durch } \Gamma \rightarrow \Delta, \Phi \textit{ und } \Theta, \alpha, \Gamma \rightarrow \Delta \textit{ durch } \Theta, \Gamma \rightarrow \Delta.$$[5]

Beweis. Es ist leicht ersichtlich, dass das nach der Regel letzt entstandene Sequenzschema aus dem gegebenen herleitbar ist. Das nach der Regel letzt entstandene Sequenzschema ist äquivalent mit dem nach der Ersetzungen von

[5] Es ist klar, dass es die richtige bzw. falche Formel im System *LJ'* gibt.

Formeln letzt entstandenen. Sei $\mathfrak{A}$ eine soche Formel des gegebenen Sequenzschema, in welcher $\mathfrak{C}$ als Teilformel vorkommt, und $\mathfrak{A}^*$ die aus $\mathfrak{A}$ nach der Ersetzungen letzt entstandene Formel. Man kann beweisen rekursiv, dass wenn $\mathfrak{A}$ im Antezedens steht, $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}^*$ herleitbar ist und wenn $\mathfrak{A}$ im Sukzedens steht, $\mathfrak{A}^* \to \mathfrak{A}$ herleitbar ist. Alsdann gelangt man durch die finiten Anwendungen der Schnitte zum erst gegebenen Sequenzschema.

§ 2. Die Systeme LP_n und LQ_n

Wir bezeichnen mit P_n das folgende Sequenzschema

$$\to \begin{cases} \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_n, \\ \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_3, \ldots, \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathfrak{A}_{n-1} \supset \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_{n-1} \supset \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1} \supset \mathfrak{A}_n, \\ \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_{n-1}, \end{cases}$$

wobei für $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ beliebige Formeln eingesetzt werden dürfen. Dies Sequenzschema hat, nämlich, das leere Antezedens und dasjenige Sukzedens, welches aus allen Formeln der Formen $\mathfrak{A}_i \supset \mathfrak{A}_j$ $(i = 1, \ldots, n \;\; j = 1, \ldots, n \;\; i \neq j)$ besteht. Wir bezeichnen mit Q_n dasjenige Sequenzschema, welches man aus P_n durch Eliminierung von $\mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_{n-1}$ bekommt.

Nun fügen wir P_n als neues Grundsequenzschema zum System LJ' hinzu. Das dadurch entstandene System nennen wir LP_n. Entsprechend meinen wir für LQ_n.

Satz 2. *Für $n \geqq 2$ gelten*

$$\text{(I) } LP_n \supset LQ_{n+1} \qquad \text{(II) } LQ_{n+1} \supset LP_{n+1} \qquad \text{(III) } LP_n \supset LJ'.$$

Aus (I)-(III) erhalten wir eine unendliche Reihe von Systemen LP_n und LQ_n gegen LJ'.

Beweis. Aus den Definitionen der P_n und Q_n ersehen wir sofort $LP_n \geqq LQ_{n+1}$, $LQ_{n+1} \geqq LP_{n+1}$ und $LP_n \geqq LJ'$. Um $LP_n \supset LQ_{n+1}$ zu beweisen, müssen wir also zeigen, dass es eine P_n-herleitbare und nicht Q_{n+1}-herleitbare Sequenz gibt, entsprechend für $LQ_{n+1} \supset LP_{n+1}$ und $LP_n \supset LJ'$.

Dazu betrachten wir den folgenden finiten distributiven Verband mit den bestimmten natürlichen Zahlen r_1, r_2:

$$\mathfrak{S}(r_1, r_2) = \{(x, y) \mid x = y = 0, \text{ oder } x = 1, 2, \ldots, r_1 \ \ y = 1, 2, \ldots, r_2\},$$[6]

wobei $(x_1, y_1) \geqq (x_2, y_2)$ bedeutet, dass sowohl $x_1 \geqq x_2$ als $y_1 \geqq y_2$ gelten. Wir betrachten eine Abbildung $\mathfrak{v}$ unsres Systems in den Verband $\mathfrak{S}(r_1, r_2)$, welche man durch folgende Feststellung bekommt.

Jeder Elementarformel ordne man ein Element des Verbands $\mathfrak{S}(r_1, r_2)$ zu. Dann setze man fest:

$$\mathfrak{v}(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) = \mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \cup \mathfrak{v}(\mathfrak{B}), \ \mathfrak{v}(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = \mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \cap \mathfrak{v}(\mathfrak{B}),$$
$$\mathfrak{v}(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) = \min_x (\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \cup x \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{B})),$$
$$\mathfrak{v}(\overline{\mathfrak{A}}) = \min_x (\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \cup x \geqq \mathrm{I}),$$

wo $\cup$ bzw. $\cap$ die verband-theoretische Summe bzw. derselbe Durchschnitt sind. Dem leeren Antezedens ordne man das Element 0 und dem leeren Sukzedens das Element I zu.[7] Von den Kommata im Antezedens bzw. Sukzedens verfährt man in gleicher Weise als für die Zeichen $\wedge$ bzw. $\vee$ und die Hilfszeichen $\rightarrow$ sieht man für $\geqq$ an.

Nun behaupten wir: Jede Q_{n+1}-herleitbare Sequenz ist so beschaffen bei der Abbildung in $\mathfrak{S}(n, n)$, dass der Wert des Antezedens grösser oder gleich als der des Sukzedens ist. Jede J'-herleitbare Sequenz hat dieselbe Beschaffenheit.[8] $\mathfrak{v}(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ ist nicht 0, wenn $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{B})$ nicht gilt. Damit der Wert des Sukzedens von Q_{n+1} nicht 0 ist, muss man abbilden derartig, dass für $1 \leqq i, j \leqq n+1$ weder $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_i) \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{A}_j)$ noch $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_j) \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{A}_i)$ gelten, mit Ausnahme von $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_{n+1}) \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{A}_n)$. Das ist aber unmöglich, wie man aus der Definition von $\mathfrak{S}(n, n)$ ersieht.

Jedoch für P_n kann man als Werte von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ die Elemente $(1, n), (2, n-1), \ldots, (n, 1)$ nehmen, so dass der Wert des Sukzedens das Element $(1, 1)$ ist. Man bekommt folglich, dass es eine P_n-herleitbare und nicht Q_{n+1}-herleitbare Sequenz gibt.[9]

---

6) Man beachte, dass $\mathfrak{S}(r_1, r_2)$ kein Element der Form $(x, 0)$ $(x \neq 0)$ sowie $(0, y)$ $(y \neq 0)$ enthält.

7) In $\mathfrak{S}(r_1, r_2)$ bedeutet I natürlich das Element (r_1, r_2) und 0 das Element $(0, 0)$.

8) Vgl. G. Birkhoff, Lattice Theory, New York 1948. Man kann es direkt für LJ' beweisen. Z.B. für *FEA* und *FES* schliesst man wie folgt. Wenn sowohl $\mathfrak{v}(\Gamma) \geqq \mathfrak{v}(\Theta) \cap \mathfrak{v}(\mathfrak{A})$ als $\mathfrak{v}(\mathfrak{B}) \cup \mathfrak{v}(\Delta) \geqq \mathfrak{v}(\Lambda)$ gelten, so gilt $\min_x (\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \cup x \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{B})) \cup \mathfrak{v}(\Gamma) \cup \mathfrak{v}(\Delta) \geqq \mathfrak{v}(\Theta) \cup \mathfrak{v}(\Lambda)$. Wenn $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \cup \mathfrak{v}(\Gamma) \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{B})$ gilt, so gilt auch $\mathfrak{v}(\Gamma) \geqq \min_x (\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \cup x \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{B}))$.

9) Es sei Q'_{n+1} das aus Q_{n+1} durch Elinimierung von $\mathfrak{A}_{n+1} \supset \mathfrak{A}_{n-1}$ entstandene Sequenzschema. Wenn man als Werte von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ die Elemente $(1, n), (2, n-1), \ldots, (n, 1)$ und als Wert von $\mathfrak{A}_{n+1}$ $(n, 2)$ nimmt, so ergibt sich gleichfalls, dass der Wert des Sukzedens $(1, 1)$ ist. Daraus erhält man $LQ'_{n+1} \supset LQ_{n+1}$.

Für LP_{n+1} betrachten wir die Abbildung in $\mathfrak{S}(n, n+1)$. Damit der Wert des Sukzedens von P_{n+1} nicht 0 ist, muss es gelten, wie man aus der Form von P_{n+1} abliest, dass für $1 \leqq i, j \leqq n+1$ weder $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_i) \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{A}_j)$ noch $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_j) \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{A}_i)$ gültig sind, was unmöglich ist. Daher ist jede P_{n+1}-herleitbare Sequenz so beschaffen bei der Abbildung in $\mathfrak{S}(n, n+1)$, dass der Wert des Antezedens grösser oder gleich als der des Sukzedens ist. Anderseits ist der Wert des Sukzedens von Q_{n+1} das Element $(1, 1)$, wenn man für $1 \leqq i \leqq n$ $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_i) = (n+1-i, i)$ und $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_{n+1}) = (1, n+1)$ setzt. Q_{n+1} ist also nicht P_{n+1}-herleitbar und $LQ_{n+1} \supset LP_{n+1}$ ist gültig.

Für jede n gelten sowohl $LP_n \supset LQ_{n+1}$ als auch $LQ_{n+1} \supseteqq LJ'$, also erhält man $LP_n \supset LJ'$ für jede n.[10][11]

§ 3. Einige Systeme, welche mit LP_2 äquivalent sind

Wir wollen hier die einige mit P_2 äquivalenten Schemata zeigen.

P_2 $$\rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$$

3.1 $$(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C} \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C},\ \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$$

3.2 $$\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}$$

3.3 $$(\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_n) \supset (\mathfrak{B}_1 \vee \mathfrak{B}_2 \vee \ldots \vee \mathfrak{B}_m) \rightarrow \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{B}_m, \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{B}_m, \ldots, \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{B}_m,$$

wobei wir natürlich mit $\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}_n$ die Formel $(\ldots(\mathfrak{A}_1 \wedge \mathfrak{A}_2) \wedge \mathfrak{A}_3) \ldots) \wedge \mathfrak{A}_n)$ meinen, entsprechend für $\vee$.

3.4 $$\rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$$

3.5 $$\rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B},\ (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}$$

3.6 $$(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B},\ (\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A},\ \mathfrak{B}$$ [12]

Nun beweisen wir die Äquivalenzen der oben genannten Sequenzenschemata, wobei wir zwecks der Abkürzung die leicht angebbaren Herleitungsteilen auslassen.

---

10) Um $LP_n \supset LJ'$ direkt zu beweisen, darf man anstatt $\mathfrak{S}(r_1, r_2)$ $\mathfrak{S}(\omega, \omega)$, wo ω die transzendentale Ordnungzahl ist, betrachten.

11) Dabei soll es beachtet, dass diese Abbildungen unsere Zwischensysteme nicht charakterisieren.

12) Die Sequenz $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \rightarrow ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}) \wedge ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{A})$ ist J'-herleitbar. Daher ist $\rightarrow (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \supset \subset ((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}) \wedge ((\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{A})$ äquivalent mit P_2. Vgl. J. C. C. McKinsey, Proof of the independence of the primitive symbols of Heyting's calculus of propositions, The Jour. of Symbolic Logic, **4** (1939), S. 155–158, Fussnote 3.

Aus P_2 mit den zwei herleitbaren Schemata $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ und $\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ erhält man durch Schnitte das Schema $\to \mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}), \mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$, woraus man das Schema 3.1 durch Schnitte mit den zwei herleitbaren $\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}), (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}), (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C} \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}$ erhält. Umgekehrt erhält man das Schema $\to \mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}), \mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$ aus 3.1, also das Schema P_2 durch zweimalige Schnitte mit $\mathfrak{B} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$.

Ähnlich kann man die Äquivalenz von 3.2 mit P_2 beweisen.

Das Schema 3.3 ergibt sich durch die wiedergeholten Anwendungen von 3.1 und 3.2. Die Schemata 3.1 und 3.2 gehen sofort aus 3.3 hervor.

Aus 3.1 erhält man $(\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}$, also durch Schnitt mit $\to (\mathfrak{A} \wedge (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset \mathfrak{B}$ das Schema 3.4. Umgekehrt geht $\to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}, (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset \mathfrak{C}$ aus 3.4 hervor, folglich durch Schnitt mit dem herleitbaren Sequenzschema $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{C}) \supset \mathfrak{C}, (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C} \to \mathfrak{B} \supset \mathfrak{C}$ bekommt man 3.1.

Aus P_2 ergibt sich $\to (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$, woraus man das Schema 3.5 durch Schnitt mit $\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ erhält. Aus 3.5 durch Schnitt mit $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A} \to \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ erhält man P_2.

Aus $\to \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ erhält man $(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}, \mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}$ durch *FEA*, daraus mit Hilfe des Schemas $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ das Schema 3.6 durch *FEA*. Setzt man nun $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ für $\mathfrak{B}$ des Schemas 3.6 ein, so erhält man mit Hilfe des herleitbaren Schemas $\to (\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ das Schema $((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{A}) \supset \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}, \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$. Setzt man noch einmal $\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ für $\mathfrak{A}$ des genannten Schemas ein, so erhält man mit Hilfe des Schemas $\to (((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{B}) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})) \supset (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ das Schema 3.4.

Das Sequenzschema $\to \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$, welches wir mit M bezeichnen, ergibt sich aus P_2 wie folgt: Man setze $\overline{\mathfrak{A}}$ für $\mathfrak{B}$ des Schemas P_2 ein und führe die Schnitte mit den Schemata $\mathfrak{A} \supset \overline{\mathfrak{A}} \to \overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{A} \to \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ zweimal durch. Anderseits ist das Schema M nicht Q_3-herleitbar. Der Beweis lässt sich in gleicher Weise wie bei $LP_2 \supset LQ_3$ durchführen. Aber ist es undeutlich, ob für System LM, welches aus LJ' durch Hinzufügung des Schemas M entsteht, die Relation $LM \geqq LP_2$ gilt oder nicht.

Das System LM ist äquivalent mit demjenigen System LM', welches aus LK dadurch entsteht, dass man folgenden Schlussfigurenschemata anstatt *NES* und *FES* von LK nimmt:

$$M\text{-}NES: \frac{\mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \overline{\Theta}}{\Gamma \rightarrow \overline{\Theta},\ \overline{\mathfrak{A}}} \quad \text{und} \quad M\text{-}FES: \frac{\mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \overline{\Theta},\ \mathfrak{B}}{\Gamma \rightarrow \overline{\Theta},\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}},$$

wo $\overline{\Theta}$ als Mitteilungszeichen für (evtl. leere) Reihen von Formeln der Formen $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ dient. Man kann dies wie folgt beweisen. Die Schlussfigurenschemata *NES* und *FES* des Systems *LM* gehen aus *M-NES* und *M-FES* hervor, gesetzt, dass $\overline{\Theta}$ leer sei. Man erhält M aus $\mathfrak{A} \rightarrow \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ durch *M-NES*. Alle M-herleitbaren Sequenzen sind also M'-herleitbar. Umgekehrt erhält man $\overline{\overline{\Theta}},\ \mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \mathfrak{B}$ aus $\mathfrak{A},\ \Gamma \rightarrow \overline{\Theta},\ \mathfrak{B}$ durch *NEA*, woraus man $\overline{\overline{\Theta}},\ \Gamma \rightarrow \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ durch *FES* erhält. Folglich erhält man $\Gamma \rightarrow \overline{\Theta},\ \mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}$ durch mehrmalige Schnitte mit M, w.z.b.w.

Nun zählen wir ohne Beweise die anderen mit M äquivalenten Sequenzschemata auf.

M 1	$\overline{\overline{\mathfrak{A}}} \supset \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A},\ \overline{\mathfrak{A}}$
M 2	$\mathfrak{A} \supset \overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}},\ \overline{\mathfrak{B}}$
M 3	$\overline{\mathfrak{A}} \supset \mathfrak{B} \rightarrow \overline{\overline{\mathfrak{A}}},\ \mathfrak{B}$
M 4	$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}},\ \overline{\overline{\mathfrak{B}}}$
M 5	$\overline{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}},\ \overline{\mathfrak{B}}$[13]
M 6	$\mathfrak{A} \supset (\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{C}}) \rightarrow (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \vee \overline{\mathfrak{C}}$
M 7	$\overline{\mathfrak{A}} \rightarrow \overline{\mathfrak{B}},\ \overline{\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A}}$
M 8	$\overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}},\ \overline{\mathfrak{C}},\ (\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}$
M 9	$((\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B}) \supset \mathfrak{C}) \supset \mathfrak{D},\ \overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A}},\ \overline{\mathfrak{C}},\ \mathfrak{D}.$

§ 4. Das System LR_n

Nun fügen wir als Grundsequenzschema zum System LJ' das folgende Schema, das wir R_n heissen, hinzu:

$$\rightarrow \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2,\ \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_3,\ \ldots,\ \mathfrak{A}_{n-1} \supset \mathfrak{A}_n,\ \overline{\mathfrak{A}}_n,$$

wo n eine natürliche Zahl ist und für $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$ beliebige Formeln eingesetzt werden dürfen. Im Fall $n = 1$, bedeutet das Schema den Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Diese System nennen wir LR_n.

Satz 3. *Für $n \geqq 1$ gelten*

$$\text{(I)}\ LR_n \supset LR_{n+1} \qquad \text{(II)}\ LR_n \supset LP_2.$$

Aus (I) und (II) erhält man eine unendliche Reihe der logischen Systeme

13) Da $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\mathfrak{B}} \rightarrow \overline{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}$ herleitbar ist und $\overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$ mit $\overline{\mathfrak{A}} \wedge \overline{\mathfrak{B}}$ äquivalent ist, erhält man daraus den de Morganschen Satz.

https://doi.org/10.1017/S0027763000023412 Published online by Cambridge University Press

zwischen LK und LP_2.

Beweis. Aus R_n und $\overline{\mathfrak{A}}_n \to \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_{n+1}$ erhält man das Schema $\to \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{n-1} \supset \mathfrak{A}_n, \mathfrak{A}_n \supset \mathfrak{A}_{n+1}$ durch einmaligen Schnitt, daraus erhält man R_{n+1} durch die Verdünnung. Wenn n die gerade Zahl ist, so geht $\to \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_1 \supset \mathfrak{A}_2, \overline{\mathfrak{A}}_2$ aus R_n hervor, indem man für die Formeln der Formen $\mathfrak{A}_{2p}$ bzw. $\mathfrak{A}_{2p+1}$ die Formel $\mathfrak{A}_2$ bzw. $\mathfrak{A}_1$ einsetzt. Daraus ergibt sich P_2 durch zweimalige Schnitte mit $\overline{\mathfrak{A}}_2 \to \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2 \supset \mathfrak{A}_1$ sowie mehrmalige Zusammenziehungen. Da für jede n $LR_n \geqq LR_{n+1}$ gilt, so erhält man $LR_n \geqq LP_2$.

Um $LR_n \supset LR_{n+1}$ zu beweisen, betrachten wir eine Abbildung von LR_{n+1} in den folgenden distributiven Verband $\mathfrak{T}_n$:

$$\mathfrak{T}_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Wir stellen dieselben Bedingungen wie in §2 für $\mathfrak{v}$ fest. $\mathfrak{v}(\mathfrak{A} \supset \mathfrak{B})$ bedeutet dann $\mathfrak{v}(\mathfrak{B})$, falls $\mathfrak{v}(\mathfrak{B}) > \mathfrak{v}(\mathfrak{A})$ gilt, und 0, falls $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}) \geqq \mathfrak{v}(\mathfrak{B})$ gilt. Damit der Wert des Sukzedens von R_{n+1} nicht 0 ist, muss sowohl $0 < \mathfrak{v}(\mathfrak{A}_1) < \mathfrak{v}(\mathfrak{A}_2) < \ldots < \mathfrak{v}(\mathfrak{A}_{n+1})$ als auch $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_{n+1}) < n+1$ gelten, was unmöglich ist. Jede R_{n+1}-herleitbare Sequenz ist, folglich, so beschaffen bei der Abbildung in $\mathfrak{T}_n$, dass der Wert des Antezedens grösser oder gleich als der des Sukzedens ist. Setzt man nun $\mathfrak{v}(\mathfrak{A}_i) = i$, ist der Wert des Sukzedens von R_n 1. R_n ist also nicht R_{n+1}-herleitbar.

Aus $LR_n \supset LR_{n+1}$ und $LR_{n+1} \geqq LP_2$ ergibt sich $LR_n \supset LP_2$ für jede n.

Universität zu Nagoya