SUR LA COMBINAISON DES EVENEMENTS ET LES RESULTATS ALEATOIRES QUANTITATIFS QUI EN RESULTENT.

Ed. Franckx (*)
Bruxelles, Belgique

1. — Le Problème

1.1. — Le titre de cette note indique que le problème étudié est très général et par le fait même applicable à de nombreux domaines; physique, biologie, recherche opérationnelle, assurances, téléphonie, etc . . .

C'est évidemment parce que certains problèmes ont la même structure que leur considération sous forme abstraite, est plus importante. C'est la raison pour laquelle nous traitons le problème de structure, qu'il suffit de particulariser dans chaque domaine d'application.

1.2. — *Les trois hypothèses*

a) Nous supposerons une période de référence de durée constante.

b) Un évènement E, généralement quelconque, mais invariable, peut se produire pendant cette période. Le nombre de fois que cet évènement se réalise est une variable aléatoire I, qui sera définie par la suite

$$\left\{\begin{array}{lll} \{q_i\} & q_i \geqslant 0 & i = 0, 1 \ldots . \infty \\ \text{avec} \ \sum\limits_i q_i = 1 & & (1) \end{array}\right.$$

q_i désignant la probabilité pour que E se réalise i fois pendant la période de référence. Nous conviendrons de dire que I mesure l' „*intensite*" du phénomène E.

c) Lorsque l'évènement E se réalise, on effectue une expérience relativement à une autre variable aléatoire quantitative N (positive ou non). Cette variable stochastique est complètement définie par sa fonction de répartition.

$$F(n) = prob\,\{N < n\}$$

*) Ecole Royale Militaire, Bruxelles.

généralement quelconque; nous conviendrons de dire que n est le „*niveau*" atteint par la variable N au cours de l'expérience.

1.3. — De nombreux problèmes de la vie courante peuvent être synthétisés sous cette forme et pour ne mentionner que quelques dans le domaine de la vie des organismes d'assurances, citons sous forme de tableau

— l'arrivée des accidents automobiles.	grappes d'accidents	nombre d'accidents par grappe.
— un seul contrat annuel en risques divers (y compris la maladie).	nombre d'accidents résultant du contrat	montant d'un sinistre.
— un agent de production	nombre des contrats produits par mois.	montant du capital décès.
— recouvrement financier	nombre des primes encaissées mensuellement.	montant de la prime encaissée

Cette simple énumération indique la grande variété de problèmes de même structure que l'on rencontre journellement; il est par suite utile de les traiter en synthèse.

1.4. — *Le problème envisagé*

La question que nous soulevons est le *calcul effectif de la probabilité pour que pendant la période considérée, exactement k fois, la variable quantitative N atteigne ou dépasse un niveau prescrit* n_0: nous indiquerons par

$$\psi_{[k]}(n_0)$$

la probabilité de cet évènement.

Théoriquement, une fois ce résultat atteint, on en déduit immédiatement la probabilité pour qu'au cours de cette même période, au plus k fois, au moins k fois etc . . . la variable N dépasse un niveau prescrit. Ces extensions sont immédiates et ne seront pas traitées dans cette note.

— Pratiquement, il y a une raison particulière pour aborder la question au colloque de Trieste. En effet si nous nous reportons au cas particulier où le „niveau" est le montant d'un sinistre, alors $\psi_{[0]}(n_0)$ représente la probabilité pour que tous les sinistres soient

https://doi.org/10.1017/S0515036100010552 Published online by Cambridge University Press

inférieurs ou égaux au montant n_0. Nous retrouvons le problème du sinistre maximum traité à Juan-les-Pins.

Plus généralement, $\psi_{[k]}(n_0)$ se rattachera à un ensemble de problèmes où l'on cherche à inclure ou à exclure un nombre i fixé de sinistres trop élevés. Dans cet ordre d'idées, nous retrouvons le genre de questions posées à ce colloque par notre président Mr Beard.

2. — La Solution Opérationnelle du Problème Posé

— *Le but poursuivi*

Dans notre note à Juan-les-Pins, nous avons obtenu un résultat global caractéristique. Pour calculer effectivement $\psi_{[0]}(n_0)$, il suffit

a) de calculer *numériquement* la fonction génératrice

$$Q(s) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \quad s^i \qquad (2)$$

$$o \leqslant s \leqslant 1$$

b) Ensuite, quelle que soit la fonction $F(n)$, pour obtenir $\psi_{[0]}(n_0)$, on suit la règle opérationnelle

1°) calculer $s_0 = F(n_0)$ (3)

2°) trouver dans la table numérique $Q(s_0)$.

on a effectivement la propriété globale.

$$\psi_{[0]}(n_0) = Q[F(n_0)] \qquad (4)$$

En d'autres termes, la technique opératoire exige deux phases:

— la première consiste à disposer d'une table $Q(s)$, qui ne dépend que de la variable intensité I.

— cette seule table est suffisante pour calculer moyennant (3) la fonction de répartition du sinistre maximum et cela indépendamment de la forme de la fonction $F(n)$, à la seule condition qu'elle établisse par (3) une correspondance univoque.

Le but poursuivi dans cette note est de prouver que cette même technique opératoire peut être étendue au calcul de $\psi_{[k]}(n_0)$, et cela quel que soit k.

3. — Décomposition Opérationnelle du Calcul de $\psi_{[k]}(n_0)$.

3.1. — *Décomposition de* $\psi_{[k]}(n_0)$.

Nous suivrons pas à pas, la démonstration trouvée pour le calcul de $\psi_{[0]}(n_0)$. Désignons par $\psi_{[k]}(n_0/i)$ la probabilité pour que la

https://doi.org/10.1017/S0515036100010552 Published online by Cambridge University Press

variable quantitative N dépasse exactement k fois le niveau n_0, si *l'on sait que le nombre d'expériences réalisées est effectivement i.*

Alors:

$$\psi_{[k]}(n_0) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \; \psi_{[k]}(n_0/i).$$

Mais si le nombre des expériences est $i < k$, il est impossible de réaliser k expériences où le niveau soit supérieur à n_0, par suite $\psi_{[k]}(n_0/i) \equiv 0$ pour $i = 0, 1 \ldots k-1$ et il en résulte que:

$$\psi_{[k]}(n_0) = \sum_{i=k}^{\infty} q_i \; \psi_{[k]}(n_0/i) \tag{5}$$

3.2. — *Le cas particulier ou N est une variable „chance" dans le domaine* (0, 1)

a) Dans ce cas $F(s) = prob \} N < s \; = s$ avec $0 \leqslant s \leqslant 1$ (6)

Désignons par $\Phi_{[k]}(s/i)$ la probabilité particulière prise par $\psi_{[k]}(s/i)$ dans ce cas particulier

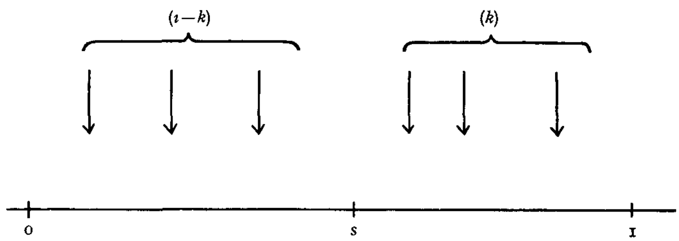

Fig. 1

Si on prend au hasard i points sur le segment (0, 1), la probabilité pour que k exactement tombe à droite du point s, est donnée par (fig. 1).

$$\Phi_{[k]}(s/i) = C_i^k \; s^{(i-k)} \; (1-s)^k =$$

$$\Phi_{[k]}(s/i) = \frac{(1-s)^k}{k!} \; \frac{i!}{i-k!} \; s^{i-k} \tag{7}$$

En sorte que (5) donne

$$\psi_{[k]}(s) = \frac{(1-s)^k}{k!} \sum_{i=k}^{\infty} q_i \; \frac{i!}{i-k!} \; s^{i-k}$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100010552 Published online by Cambridge University Press

b) Or la fonction génératrice $Q(s)$ définie par (2) est une fonction uniformément convergente dans l'intervalle ($0 \leqslant s \leqslant 1$) en vertu du fait que $\sum_{i=0}^{\infty} q = 1$. Nous pouvons dériver terme à terme, ce qui donne précisément:

$$\frac{d^k Q\,(s)}{ds^k} = \sum_{i=k}^{\infty} q_i \, \frac{i!}{i-k!} \, s^{i-k} \tag{8}$$

Par suite, on a la formule générale

$$\Phi_{[k]}\,(s) = \frac{1}{k!}\,(1 - s)^k \, \frac{d^k\, Q\,(s)}{ds^k} \tag{9}$$

Telle est l'expression générale des probabilités cherchées dans le cas ou la variable „niveau N" arrive au hasard.

Pour une loi $\{q_i\}$ donnée, une telle fonction peut avoir soit une expression mathématique déjà calculée, ou bien on peut toujours concevoir qu'on la calcule effectivement sur ordinateur. Remarquons qu'en particulier $\Phi_{[0]}(s) = Q(s)$ (cas du sinistre maximum).

3.3. — *L'extension au cas général.*

Pour étendre au cas d'une variable niveau N quelconque, il suffit de remplacer dans le raisonnement du paragraphe précédent la probabilité s pour que le niveau soit inférieur à s, par la probabilité $F(n_0)$ pour que le niveau soit inférieur à n_0.

Cette correspondance permet par suite d'écrire

$$\begin{cases} \psi_{[k]}\,(n_0/i) = \Phi_{[k]}\,(s_0/i) \\ \qquad \text{si} \quad s_0 = F(n_0) \end{cases}$$

et par suite

$$\begin{cases} \psi_{[k]}(s_0) = \Phi_{[k]}\,(s_0) \\ \quad \text{si} \quad s_0 = F(n_0) \end{cases} \tag{10}$$

ce qui établit la propriété en toute généralité.

La fonction $s = F(n)$ peut présenter des sauts et des paliers (fig. 2). La fonction $\Phi_{[k]}(s)$ étant continue, la fonction $\psi_{[k]}(n_0)$ présentera des sauts aux mêmes points et des paliers sur les mêmes intervalles que $s = F(n)$.

Le calcul de $\psi_{[k]}(n_0)$ peut se faire d'une manière analogue à celle qui a été indiquée pour $\Phi(m)$ dans la note du colloque de Juan-les-Pins *). Si l'on dispose des expressions explicites des lois d'intensité et de niveau, et si l'on peut calculer ψ, le calcul est direct (voir par exemple 4 ci-après, application de la loi de Poisson). Dans le cas contraire, on peut utiliser une méthode graphique ou une méthode de simulation (Monte-Carlo). Pour l'application de cette dernière, on remarquera qu'à chaque point s_0 (fig. 2) correspond un seul point n_0, à condition de prendre, si on tombe sur une marche horizontale, le niveau le plus élevé par exemple (le plus à droite).

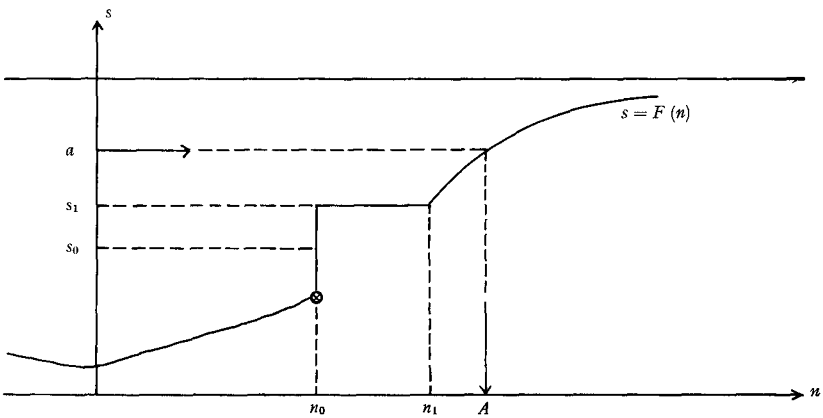

Fig. 2.

4. — Application à la loi de Poisson

4.1. — On connait le rôle privilégié joué en pratique, par la loi de Poisson. Dans le cas où les évènements ont une probabilité petite et si λ est le nombre moyen de ceux qui se réalisent pendant la période de référence, on pourra toujours poser en première approximation

$$q_i = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \tag{11}$$

Cette méthode est courante en recherche opérationnelle.

---

*) Ed. Franckx. Sur la fonction de distribution du sinistre le plus élevé. The Astin Bulletin. Vol II, Part III, april 1963, 415-424.

https://doi.org/10.1017/S0515036100010552 Published online by Cambridge University Press

4.2. — Dès lors, on peut rechercher la forme mathématique prise par les probabilités $\psi_{[k]}(n)$ dans ce cas important.

Or pour la loi de Poisson, on déduit:

$$Q(s) = \sum_{i=0}^{\infty} q_i s^i = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda s)^i}{i!} = e^{-\lambda(1-s)} \tag{12}$$

et par dérivation

$$\frac{d^k Q(s)}{ds^k} = \lambda^k e^{-\lambda(1-s)}$$

Par (9) on obtient

$$\Phi_{[k]}(s) = \frac{[\lambda(1-s)]^k}{k!} e^{-\lambda(1-s)} \tag{13}$$

Dès lors, on constate que les probabilités $\Phi_{[k]}(s)$, sont des probabilités de Poisson, avec la valeur moyenne $\lambda(1-s)$. On aurait par suite avantage à disposer des tables de Poisson avec des valeurs du paramètre λ très petites.

4.3. — Si nous passons au cas général, on aura par (10) et (9)

$$\psi_{[k]}(n) = \frac{\{\lambda(1-F(n)\}^k}{k!} e^{-\lambda(1-F(n))}$$

et on peut énoncer cette propriété générale:

Si la loi d'arrivée d'un évènement E, pendant un intervalle donné, est une loi de Poisson, alors, quelle que soit la variable quantitative ,,niveau'' que cette arrivée déclenche, la probabilité pour que le ,,niveau'' atteigne ou dépasse un nombre prescrit de fois un ,,niveau fixé'' est elle-meme déterminée par une loi de Poisson.

4.4. — *Exemple numérique*

Afin de montrer que les résultats obtenus sont maniables en pratique moderne, nous traitons un exemple numérique complet, dont les résultats sont donnés sous forme de tableau.

Supposons un risque dont:

1) la survenance moyenne annuelle est définie par $\lambda = 0{,}001$.
2) la valeur moyenne du sinistre est fixé à $n = 1000$ unités

monétaires et le risque est suffisamment dangereux que pour admettre la loi exponentielle

$$F(n) = 1 - e^{-\frac{n}{1000}}$$

Dans ces conditions on a

$$\psi_{[k]}(n) = \frac{(0{,}001\ e^{-0{,}001\ n})^k}{k!}\ e^{-0{,}001\ e^{-0{,}001\ n}}$$

Le tableau suivant donne les résultats du calcul de $\psi_{[k]}(n)$.

$n^* = \frac{n}{1000}$ \ K	0	1	2
0,250	0,999221	0,000778	0,000000
0,500	0,999393	0,000606	
0,750	0,999527	0,000472	
1,000	0,999632	0,000367	
1,250	0,999713	0,000286	
1,500	0,999776	0,000223	
1,750	0,999826	0,000173	
2,000	0,999864	0,000135	
2,250	0,999894	0,000105	
2,500	0,999917	0,000082	
2,750	0,999936	0,000063	
3,000	0,999950	0,000049	
3,250	0,999961	0,000038	
3,500	0,999969	0,000030	
3,750	0,999976	0,000023	
4,000	0,999981	0,000018	
4,250	0,999985	0,000014	
4,500	0,999988	0,000011	
4,750	0,999991	0,000008	
5,000	0,999993	0,000006	

Le calcul d'une colonne de ce tableau s'effectue en une minute environ sur la calculatrice électronique française CAB 500 *).

*) Programme et calcul réalisés par le Capitaine D'HOOGE, Ecole Royale Militaire.

https://doi.org/10.1017/S0515036100010552 Published online by Cambridge University Press