Ergod. Th. & Dynam. Sys. (1989), **9**, 101–113
Printed in Great Britain

Un exemple de transformation dilatante et C^1 par morceaux de l'intervalle, sans probabilité absolument continue invariante

P. GORA
Warsaw University, Institute of Mathematics, PKIN IX p, 00-901 *Warsaw, Poland*

B. SCHMITT
Département de Math., UFR Sciences et Techniques, Universite de Dijon, 21000 *Dijon, France*

(*Received* 15 *June* 1987 *and revised* 22 *October* 1987)

Abstract. We construct a transformation on the interval [0, 1] into itself, piecewise C^1 and expansive, which doesn't admit any absolutely continuous invariant probability measure (a.c.i.p.).

So in this case we give a negative answer to a question by Anosov: is C^1 character sufficient for the existence of absolutely continuous measure?

Moreover, in our example, f' has a modulus of type $K/(|1+|\log|x||)$; it is known that a modulus of continuity of type $K/(1+|\log|x||)^{1+\gamma}$, $\gamma>0$ implies the existence of a.c.i.p..

0. *Introduction*

Une application f de l'intervalle [0, 1] dans lui même est dite dilatante par morceaux s'il existe une subdivision $a_0=0<a_1<\cdots<a_p=1$ de l'intervalle [0, 1] et un réel $\rho>1$ tels que:

(i) la restriction f_i de f à chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$ $(i=0, 1, \ldots, p-1)$ est C^1 et se prolonge en une application C^1 sur $[a_i, a_{i+1}]$.

(ii) $|f_i'|\geq\rho$ pour $i=0, 1, \ldots, p-1$.

De nombreux auteurs ont étudié l'existence de mesures de probabilité invariantes pour de telles applications, absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue λ de [0, 1] (en abrégé a.c.i.p.). Les premiers résultats concernaient des transformations particulières ([**Re, Pa**]). Puis, en 1972, Kosjakin et Sandler [**Ko–Sa**], et de manière indépendante Lasota et Yorke [**La–Y**] en 1973 ont prouvé l'existence d'a.c.i.p. pour des applications C^2 et dilatantes par morceaux. La question gui s'est posée alors est la suivante: le caractère C^2 est-il nécessaire pour l'existence d'a.c.i.p.?

De nombreux papiers ont affaibli cette condition: d'abord le caractère C^{1+1} [**Ko**], puis le caractère $C^{1+\varepsilon}$ $(\varepsilon>0)$ ([**Wo, Ry, Ke**]).

Ces différentes hypothèses ont en fait une formulation plus générale [**Sc**]; si $\mathcal{P}$ désigne la partition finie $(]a_i, a_{i+1}[)_{i=0,1,\ldots,p=1}$ de [0, 1] et $\mathcal{P}(n)$ la partition

$\bigvee_{i=0}^{n-1} f^{-i}(\mathscr{P})$, nous définissons les réels

$$d_n = \sup_{A^{(n)} \in \mathscr{P}^{(n)}} (\operatorname{osc}_{A^{(n)}} |f'|). \tag{1}$$

Sous la condition:

$$\text{(c)} \quad \sum_{n \geq 0} d_n < +\infty,$$

l'application f admet au moins une a.c.i.p.

En particulier P. Collet [**Co**] montre que si le module de continuité de f' est de la forme

$$\frac{K}{(1+|\log|x||)^{1+\gamma}} \quad \gamma > 0,$$

alors f admet une a.c.i.p. La question qui se posait est de savoir si la propriété reste valable pour $\gamma = 0$. Nous répondons à cette question de manière négative en présentant un exemple de transformation C^1 et dilatante par morceaux, not le module de continuité de f' est équivalent à $k/(1+|\log|x||)$ et sans a.c.i.p.. Par cet exemple, nous montrons que le module de continuité de la forme $k/(1+|\log|x||)$ est un module de continuité frontière entre les transformations C^1 et dilatantes par morceaux qui ont une a.c.i.p. et celles qui n'en ont pas.

Ce contre exemple donne également une réponse négative à la question que posait Anosov [**An**] de savoir si le caractère C^1 suffirait pour l'existence d'a.c.i.p. d'applications dilatantes.

1. *Construction de la transformation f*

1.1.

Nous utilisons d'abord le Cantor suivant, de mesure de Lebesgue nulle. Nous notons λ la mesure de Legesgue sur $[0, 1]$, et considérons les intervalles suivants.

$-I_1^1 =]a_1^1, b_1^1[$ est l'intervalle centré en $\frac{1}{2}$, en longueur $\frac{1}{2}$.

- Sur chaque composante connexe du compact $K_1 = [0,1] \backslash I_1^1$, centrés en leurs milieux respectifs, nous définissons les intervalles

$$I_2^1 =]a_2^1, b_2^1[\quad \text{et} \quad I_2^2 =]a_2^2, b_2^2[\text{tels que}$$
$$a_2^1 < b_2^1 < a_2^2 < b_2^2 \quad \text{et} \quad \lambda(I_2^1) = \lambda(I_2^2) = \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{2})/2.$$

- Nous supposons construits les intervalles $I_p^{i_p}$ pour

$$p = 1, 2, \ldots, n \quad \text{et} \quad i_p = 1, 2, \ldots, 2^{p-1}.$$

Si nous notons K_n le compact

$$[0,1] \Big\backslash \bigcup_{p=1}^{n} \left(\bigcup_{i_p=1}^{2^{p-1}} I_p^{i_p} \right),$$

K_n possède 2^n composantes connexes; sur chacune d'entre elles, centrés en leurs milieux respectifs, nous définissons les intervalles

$$I_{n+1}^{i_{n+1}} =]a_{a_{n+1}}^{i_{n+1}}, b_{n+1}^{i_{n+1}}[,$$

$i_{n+1}=1,2,\ldots,2^n$ tels que

$$a^1_{n+1}<b^1_{n+1}<a^2_{n+1}<b^2_{n+1}<\cdots<a^{2^n}_{n+1}<b^{2^n}_{n+1},\quad \text{et}$$

$$\lambda(I^{i_{n+1}}_{n+1})=\frac{\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots(1-\frac{1}{2})}{2^n}$$

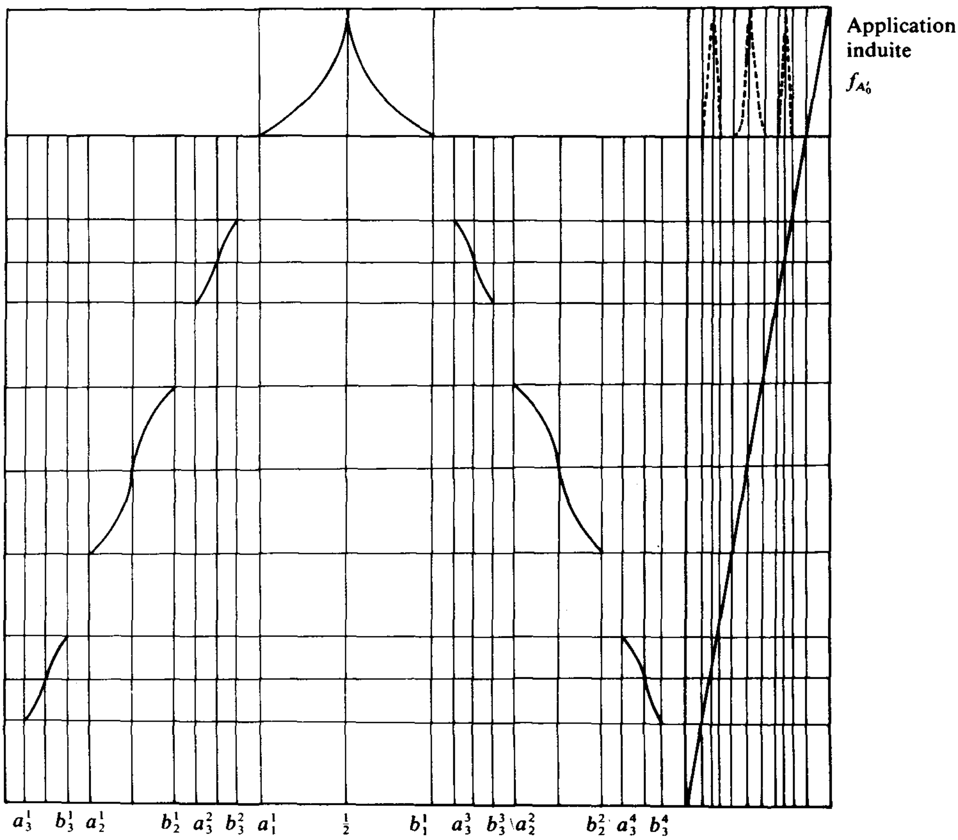

FIGURE 1. Graphe de f; graphe de $f_{A'_0}$.

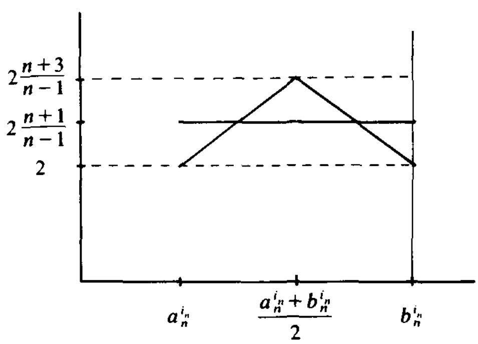

FIGURE 2. Graphe de $(f^{i_n}_n)'$.

https://doi.org/10.1017/S0143385700004831 Published online by Cambridge University Press

Les intervalles $(I_n^{i_n})_{n\geq 1}$ sont disjoints par construction et l'ensemble $K=\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ est un fermé d'intérieur vide, totalement discontinu, sans points isolés, c'est à dire un ensemble de Cantor. Par construction

$$\lambda(K_n)=(1-\tfrac{1}{2})(1-\tfrac{1}{3})\cdots(1-1/(n+1)) \text{ et donc } \lambda(K)=0.$$

1.2. *Construction de l'application*

Nous fixons un réel $b>1$ et notons J l'intervalle $[0, b]$. Nous construisons une application f de J dans lui-même, en définissant ses restrictions aux intervalles $I_n^{i_n}$ et $]1, b[$ de la façon suivante:

(C$_1$) $f(x)=f(1-x)$ pour $x\in[0,\frac{1}{2}[$.

(C$_2$) $f_0=f/_{]1,b[}$ est surjective, linéaire, croissante et applique $]1, b[$ sur $]0, b[$.

(C$_3$) $f_n^{i_n}=f/_{I_n^{i_n}}$ applique surjectivement $]a_n^{i_n}, b_n^{i_n}[$ dans $]a_{n-1}^{i_n}, b_{n-1}^{i_n}[$ pour $i_n=1,2,\ldots,2^{n-2}$; $f_n^{i_n}$ est C^1 et sa dérivée est ainsi définie:

$$(f_n^{i_n})'(x)=2\frac{n+3}{n-1}+\frac{16}{(n-1)(b_n^{i_n}-a_n^{i_n})}\left(x-\frac{a_n^{i_n}+b_n^{i_n}}{2}\right) \quad \text{si} \quad x\in\left]a_n^{i_n},\frac{a_n^{i_n}+b_n^{i_n}}{2}\right[,$$

$$(f_n^{i_n})'(x)=2\frac{n+3}{n-1}-\frac{16}{(n-1)(b_n^{i_n}-a_n^{i_n})}\left(x-\frac{a_n^{i_n}+b_n^{i_n}}{2}\right) \quad \text{si} \quad x\in\left]\frac{a_n^{i_n}+b_n^{i_n}}{2}, b_n^{i_n}\right[.$$

(C$_4$) $f_1=f/_{]a_1^1,\frac{1}{2}[}$ applique surjectivement $]a_1^1,\frac{1}{2}[$ dans $]1, b[$; elle est C^1 et la fonction f_1' est croissante, affine et applique $]a_1^1,\frac{1}{2}[$ sur l'intervalle $]2, 8b-10[$.

(C$_5$) La constante b est choisie pour que C_4 soit possible et que $f_0'>1$. (cf, figs. 1 et 2).

LEMME 1.2. *Le réel b étant fixé, vérifiant la condition* C.5, *il existe une unique application de J dans lui-même, verifiant les conditions C_1, C_2, C_3, C_4. Cette application est Lipschitzienne, différentiable, dilatante et surjective sur chaque morceau* $]0,\frac{1}{2}[$; $]\frac{1}{2}, 1[$; $]1, b[$; *elle est de plus C^1 sur chaque branche.*

Nous renvoyons le lecteur à [Sc] pour une démonstration précise. Le caractère C^1 par morceaux provient du fait que $f'(a_n^{i_n-})$ (resp. $f'(b_n^{i_n-})$) et $f'(a_n^{i_n+})$ (resp. $f'(b_n^{i_n+})$) prennent la valeur 2.

1.3. *Module de continuité de f'*

Un calcul identique à celui fait dans [Sc] montre que le réel de déterminé par (1) est égal à $8/(n-1)$; la condition (C) n'est donc pas vérifiée. Nous pouvons dire plus et préciser le module de continuité de f'. Nous notons:

$$\omega(x)=\sup_{|y_1-y_2|<x}|f'(y_1)-f'(y_2)|, \quad x>0,$$

y_1 et y_2 appartenant à une même branche de monotomie de f. Il est clair, par construction, que pour $x=\frac{1}{2}\lambda(I_n^{i_n})$, $\omega(x)$ atteint sa valeur sur une moitié de l'intervalle $I_n^{i_n}$, dès que n est assez grand. Or:

$$\tfrac{1}{2}\lambda(I_n^{i_n})=\frac{1}{2^n n(n+1)},$$

et l'oscillation de f' sur la moitié de l'intervalle $I_n^{i_n}$ vaut

$$2\left(2\frac{n+1}{n-1}-2\right)=\frac{8}{n-1}.$$

Il en résulte que la fonction ω est décroissante, linéaire par morceaux et passe par les points

$$\left(\frac{1}{2^n n(n+1)},\frac{8}{n-1}\right)$$

pour n assez grand.

Il en résulte que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\omega(x)}{8\left(-\dfrac{\log x}{\log 2}\right)-1}=1.$$

Le module de continuité de f' est majoré par une quantité de type $(8+\varepsilon)\times(-\log x/\log 2)-1$, c'est à dire par une fonction de type $K/(1+|\log x|)$ et est équivalent à cette fonction lorsque x tend vers 0. (K étant un réel convenablement choisi.)

Nous formulons ce résultant:

LEMME 1.3. *Il existe un réel $K>0$ tel que le module de continuité $\omega(x)$ de f' sur chaque branche de monotonie de f est équivalente à $K/1+|\log x|$ lorsque x tend vers* 0.

2. *Etude d'une application induite naturelle associée à f*

2.1. *Définition et propriétés de cette application induite*

Nous notons:

$$A_0=[1,b];\quad A_k=\bigcup_{i_k=1}^{2^{k-1}} I_k^{i_k};$$

$]e_k^{i_k},f_k^{i_k}[=f^{-1}(I_k^{i_k})\cap A_0$.

Puisque $f(K)\subset K\subset[0,1]$, l'ensemble des points de A_0 qui reviennent en A_0 est égal à $A_0'=A_0\backslash f^{-1}(K)$.

L'application $f_{A_0'}$ induite par f sur A_0' est donc définie sur l'ouvert dense A_0' de A_0.

L'ensemble des points de A_0' qui retournent en A_0' en exactement $(k+1)$ étapes est évidemment l'ensemble $B_k=f^{-1}(A_k)\cap A_0$ $(k=0,1,\ldots)$ et $A_0'=\bigcup_{k\geq 0}B_k$.

De manière plus précise, l'application $f_{A_0'}$ coïncide avec f^{k+1} sur chaque intervalle

$$\left]e_k^{i_k},\frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2}\right[;\quad \left]\frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2},f_k^{i_k}\right[.$$

De plus, $f_{A_0'}$ est croissante (resp. décroissante) sur

$$\left]e_k^{i_k}, \frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2}\right[,$$

(resp.$](e_k^{i_k}+f_k^{i_k})/2, f_k^{i_k}[$), surjective, à dérivée croissante (resp. décroissante), avec:

$$f_{A_0'}(e_k^{i_k}) = f_{A_0'}(f_k^{i_k}) = 1,$$

$$f_{A_0'}\left[\left(\frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2}\right)-\right] = f_{A_0'}\left[\left(\frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2}\right)+\right] = b,$$

$$f'_{A_0'}(e_k^{i_k}) = f'_{A_0'}(f_k^{i_k}) = 2^n.$$

Les deux graphes de $f_{A_0'}$ sur

$$\left]e_k^{i_k}, \frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2}\right[, \quad \text{et} \quad \left]\frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2}, f_k^{i_k}\right[,$$

sont symétriques par rapport à la droite $x=(e_k^{i_k}+f_k^{i_k})/2$.

Définition. Une application h de classe C^3, définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ est à Schwartzien négatif si:

$$Sh = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2}\left(\frac{h''}{h'}\right)^2 \leq 0.$$

PROPOSITION 2.1. *L'application $f_{A_0'}$ est à Schwartien négatif sur chacune de ses branches de monotonie.*

Cette proposition résulte du fait que l'application f est quadratique sur chaque intervalle $I_n^{i_n}$ (conditions C_3 et C_4) ou linéaire sur $]1, b[$, donc à Schwartzien négatif sur ces intervalle, que $f_{A_0'}$ coïncide avec un itéré de f sur chaque branche de monotonie

$$\left]e_k^{i_k}, \frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2}\right[\quad \text{ou} \quad \left]\frac{e_k^{i_k}+f_k^{i_k}}{2}, f_k^{i_k}\right[,$$

et que la propriété de Schartzien négatif est stable par itération (cf, [**Co, Ec**]).

2.2. *Etude de quelques propriétés de l'opérateur de Perron–Frobenius*
Nous rappelons que λ désigne la mesure de Lebesgue du segment $[1, b]$ et nous notons $\lambda_{A_0'}$ la mesure de probabilité $\lambda_{A_0'} = \lambda/(b-1)$ sur ce segment.

Nous notons L^1_λ ($[1, b]$) l'espace des fonctions définies sur $[1, b]$, intégrables au sens de Lebesgue par rapport à la mesure λ, muni de sa norme usuelle $\| \ \|_1$.

Si h appartient à L^1_λ ($[1, b]$), $\mu = h\cdot\lambda$ est la mesure définie sur $[1, b]$, de densité h par rapport à λ; enfin $\mu\circ f_{A_0'}$ est la mesure définie sur $[1, b]$ par:

$$\mu\circ f_{A_0'}(B) = \mu(f_{A_0'}^{-1}(B)),$$

pour tout borélien B de $[1, b]$.

L'application $f_{A_0'}$ étant non singulière pour λ, pour tout h appartenant à L^1_λ ($[1, b]$), la mesure $(h\cdot\lambda)\circ f_{A_0'}$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesque λ; nous pouvons définir l'opérateur P dit de Perron Frobenius, défini sur L^1_λ ($[1, b]$) par:

$$Ph(x) = \frac{d[(h\cdot\lambda)\circ f_{A_0'}]}{d\lambda}(x), \quad \forall h\in L^1_\lambda([1, b]). \tag{2}$$

Il est connu que cet opérateur a pour expression:

$$Ph(x) = \sum_{y \in f_{A_0'}^{-1}\{x\}} \frac{h(y)}{|f'_{A_0'}(y)|}.$$

Nous rappelons les principales propriétés de P dans la

PROPOSITION 2.2.

(i) $\int_{[1,b]} h(x)\, d\lambda(x) = \int_{[1,b]} Ph(x)\, d\lambda(x)$ *pour toute fonction positive* h *de* L^1_λ $(1, b)$.

(ii) *Si* g *appartient à* L^∞_λ $([1, b])$, *on a*:

$$\int_{[1,b]} g \circ f_{A_0'} h(x)\, d\lambda(x) = \int_{[1,b]} g(x) Ph(x)\, d\lambda(x).$$

Cette proposition implique que P est un opérateur markovien sur L^1_λ $([1, b])$, dont l'opérateur adjoint P^* est défini sur L^∞_λ $([1, b])$ par:

$$P^* g = g \circ f_{A_0'}.$$

En particulier, la tribu des sous-ensembles invariants de P coïncide avec la tribu $\mathcal{J}$ des sous-ensembles boréliens de $[1, b]$ invariants par $f_{A_0'}$.

D'autre part, la densité h d'une a.c.i.p. pour $f_{A_0'}$, est un point fixe fixe de l'opérateur P. C'est à l'étude de ces points fixes que nous allons nous consacrer dans la suite de ce travail.

2.3. *L'espace fonctionnel* $\mathcal{D}_0$

Définition. Une fonction τ définie sur le segment $[1, b]$ appartient à $\mathcal{D}_0$ si elle est soit identiquement nulle, soit positive et convexe sur $[1, b]$.

Les résultats que nous rappelons maintenant, relatifs à $\mathcal{D}_0$ et à l'opérateur de Perron Frobenius P associé à $f_{A_0'}$ sont adaptés de manière simple de résultats dus à M. Misiurewicz ([**Mi**, par. 4]). Nous notons $\mathcal{T}$ la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de$]1, b[$ sur l'ensemble des fonctions continues sur $]1, b[$.

Les démonstrations des lemmes suivants figurent dans [**Mi**]

LEMMA 2.1. *Une fonction* τ *définie et* C^2 *sur* $]1, b[$ *appartient à* $\mathcal{D}_0$ *si et seulement s'il existe un difféomorphisme* C^3, *à Schwartzien négatif,* g, *défini sur un intervalle ouvert* J *à valeurs dans* $]1, b[$, *tel que*: $\tau = 1/|g' \circ (g^{-1})|$.

LEMME 2.2. (i) *Si* τ *et* ψ *appartiennent à* $\mathcal{D}_0(J)$ *et sont de classe* C^r, $\tau + \psi$ *possède la même propriété.*

(ii) $\mathcal{D}_0$ *est fermé dans l'ensemble* $\mathcal{C}$ $(]0, 1[)$ *pour la topologie* $\mathcal{T}$.

En utilisant la Proposition 2.1, les Lemmes 2.1 et 2.2 et les résultats de [**Mi**] relatifs à une transformation n'ayant qu'un nombre fini de branches, nous obtenons la proposition suivante:

PROPOSITION 2.3. *Soit une fonction* C^2 *sur* $]1, b[$. *Soit* H *la fermeture de l'enveloppe convexe de l'ensemble* $(P^n\tau)_{n\geq 0}$. *Alors*:

(a) *si* $\tau \in \mathcal{D}_0$, *alors* $H \subset \mathcal{D}_0$;

(b) tout élément de H est continu sur $]1, b[$;

(c) H est compact pour la topologie $\mathcal{T}$.

(d) $H \subset L^1_\lambda$ (]1, b[);
(e) les topologies $\mathcal{T}$ et L^1 coïncident sur H.

Nous notons alors: $A_n = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} P_i$, opérateur sur L^1_λ ([1, b]) et la fonction **1** identiquement égale à 1 sur]1, b[.

Il résulte de la Proposition 2.3 que l'on peut extraire de la suite $(A_n \mathbf{1})_{n\geq 0}$, une sous-suite $(A_{n_i}\mathbf{1})$ qui converge dans les topologies L^1 et $\mathcal{T}$ vers une fonction g appartenant à $\mathcal{D}_0$.

Il en résulte que g est un point fixe de l'opérateur P, donc une densité d'a.c.i.p. pour $f_{A'_0}$.

LEMME 2.2. *Toute valeur d'adhérence de la suite $(A_n \mathbf{1})_{n\geq 0}$ pour la topologie $\mathcal{T}$ (ou L^1) est soit identiquement nulle soit de borne inférieure strictement positive sur*]1, b[.

La démonstration de ce lemme résulte du fait que ces valeurs d'adhérence sont non négatives, convexes d'après la Proposition 2.3, et points fixes de l'opérateur P.

Il nous reste à analyser chacun des deux cas invoqués dans ce lemme.

2.4. *Etude des a.c.i.p. de $f_{A'_0}$*

1*er cas.* Nous supposons que $(A_n \mathbf{1})_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence identiquement nulle (pour les topologies $\mathcal{T}$ ou L^1).

PROPOSITION 2.4. *Si la suite $(A_n \mathbf{1})_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence pour la topologie $\mathscr{C}$ (ou L^1) identiquement nulle, nous avons*:

$$A_n h \xrightarrow{L^1} 0, \quad \forall h \in L^1_\lambda([1, b]).$$

Démonstration. Supposons qu'il existe une fonction g non identiquement nulle dans L^1_λ ([1, b]) telle que $Pg = g$. Nous notons L le support de g.

La mesure $g.\lambda$ étant invariante par $f_{A'_0}$, le sous-ensemble L l'est également. Si $L^1_\lambda(L)$ désigne l'ensemble des fonctions boréliennes à support dans L, Lebesgue intégrables pour la restriction λ de la mesure de Lebesgue à L, il résulte de (2) que P agit sur $L^1_\lambda(L)$.

La restriction de P à $L^1_\lambda(L)$ est également markovienne et admet g comme point fixe. Il résulte du théorème ergodique de Hopf (cf [**Ne**] que:

$$A_n h \xrightarrow[L^1]{\lambda \cdot p \cdot s} g. \frac{E^{\mathcal{I}} h}{E^{\mathcal{I}} g}, \quad \forall h \in L^1_\lambda(L).$$

($E^{\mathcal{I}}$ désigne l'espérance conditionnelle pour la tribu $\mathcal{I}$ des invariants).
En particulier:

$$A_n 1_L \xrightarrow[L^1]{\lambda \cdot p \cdot s} g. \frac{E^{\mathcal{I}} 1_L}{E^{\mathcal{I}} g}. \tag{4}$$

Par hypothèse, il existe une sous-suite (n_i) d'entiers telle que $(A_{n_i}.\mathbf{1})$ converge pour la topologie $\mathcal{T}$ vers 0. L'opérateur P étant markovien, donc positif, il en résulte:

$$A_{n_i} 1_L \xrightarrow[L^1]{\lambda \cdot p \cdot s} 0. \tag{5}$$

Il résulte de (4) et (5) que $g=0\ \lambda\cdot p\cdot s$. Ceci démontre la proposition.

COROLLAIRE 2.1. *Si la suite $(A_n\mathbf{1})_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhèrence pour $\mathcal{T}$ identiquement nulle, $f_{A_0'}$ n'adment pas d'*a.c.i.p.

2ème cas. Nous supposons que $(A_n\mathbf{1})_{n\geq 0}$ possède une valeur d'adhérence g pour $\mathcal{T}$ telle que: $\inf_{]1,b[}\ g>0$.

Utilisant à nouveau le théorème ergodique de Hopf pour l'opérateur markovien P sur L^1_λ $([1, b])$, il vient:

$$A_nh \xrightarrow[L^1]{\lambda\cdot p\cdot s} g\cdot\frac{E^{\mathcal{I}}h}{E^{\mathcal{I}}g},\quad \forall h\in L^1_\lambda(1, b). \tag{6}$$

PROPOSITION 2.5. *Si la suite $(A_n\mathbf{1})_{n\in N}$ a une valeur d'adhérence g pour $\mathcal{T}$ strictement positive, alors pour tout h appartenant à L^1_λ $([1, b])$, non négatif, non identiquement nul, la suite $(A_nh)_{n\geq 0}$ possède une limite strictement positive dans $L^1_\lambda([1, b])$.*

Démonstration. Nous notons Q la partition modulo 0 de $[1, b]$ constitué par les intervalles ouverts de monotonie de $f_{A_0'}$ et

$$Q^{(n)}=\bigvee_{i=0}^{n-1} f_{A_0'}^{-i}(Q)=f^{-n+1}(Q).$$

Les atomes de $Q^{(n)}$ sont les intervalles de monotonie de $f_{A_0'}^{(n)}$; sur chacun d'entre eux, $f^n_{A_0'}$ possède la propriété du Schwartzien négatif et est surjective.

L'opérateur itéré n ième de P, P^n, a pour expression:

$$P^nh(x)=\sum_{y\in f_{A_0'}^{-n}\{x\}}\frac{h(y)}{|(f^n_{A_0'})'|(y)},\quad \forall h\in L^1_\lambda([1, b]).$$

Il en résulte que si A est un atome de $Q^{(n)}$:

$$P^n\mathbf{1}_A(x)=\frac{1}{|(f^n_{A_0'})'(y)|},\quad \text{où } y=(f^n_{A_0'/A})^{-1}(x).$$

Il résulte du Lemme 2.1 que $P^n\mathbf{1}_A(x)$ appartient à $\mathcal{D}_0$ et son support est $[1, \mathbf{b}]$.

Les suites $(A_m\ 1_A)_{m\in N}$ et

$$\left(\frac{1}{m-n}\sum_{i=n}^{m-n+1}\right)P^i1_A$$

ont même limite pour la topologie L^1 (ou pour la toplogie $\mathcal{T}$); d'après la Proposition 2.3, cette limite appartient à $\mathcal{D}_0$, et vaut $g\cdot E^{\mathcal{I}}P^n1_A/E^{\mathcal{I}}g$ d'après (6). Appliquant à P^n1_A le Lemme 2.2 on en déduit que cette limite est de borne inférieure strictement positive.

Nous notons $\mathcal{A}=\bigcup_{n\in N}\{1_A;\ A\in Q^{(n)}\}$. L'application $f_{A_0'}$ étant dilatante, le sous-espace vectoriel span $\mathcal{A}$ engendré par $\mathcal{A}$ est donc dense dans L^1_λ $([1, b])$, pour la topologie L^1.

Par ailleurs, si nous désignons par A_∞ l'opérateur défini sur L^1_λ $([1, b])$ par:

$$A_\infty h=gE^{\mathcal{I}}h/E^{\mathcal{I}}g,\quad \forall h\in L^1_\lambda([1, b]), \tag{7}$$

c'est un opérateur continu pour la norme L^1. A tout élément non négatif $h\not\equiv 0$ de L^1_λ $([1, b])$, on peut associer une suite $(k_m)_{m\in N}$ d'éléments non négatifs de span $\mathcal{A}$, telle que:

$$k_m \xrightarrow[m\to+\infty]{L^1} h.$$

Nous avons:

$$A_\infty(k_m) \xrightarrow[m\to+\infty]{L^1} A_\infty(h).$$

Chaque terme $A_\infty(k_m)$ appartient à $\mathscr{D}_0$ et est de borne inférieure strictement positive sur $[1, \mathrm{b}]$.

La limite $A_\infty(h)$ est donc non négative, non identiquement nulle d'apprès (7), et vérifie l'inégalité de convexité sur un ensemble de mesure pleine (il suffit d'utiliser une sous suite convergent $\lambda \cdot p \cdot s$); c'est par ailleurs un point fixe de l'opérateur P. On en déduit que $A_\infty(h)$ est strictement positive $\lambda \cdot p \cdot s$. On en déduit les corollaires suivants:

COROLLAIRE 2.2. *Toute* a.c.i.p. *pour* $f_{A_0'}$, *si elle existe, est équivalente à la mesure de Lebesgue sur* $[1, b]$.

COROLLAIRE 2.3. *Si* $f_{A_0'}$ *admet une* a.c.i.p. ν, *elle est ergodique, unique et*: $A_\infty h = [g/\lambda(g)]\lambda(h)$ *quelque soit* h *appartenant à* $L^1_\lambda([1, b])$.

Soit $A \in \mathscr{J}$ tel que $\lambda(A) \neq 0$, d'après la Proposition 2.5., $A_\infty 1_A$ est strictement positive sur $]1, b[$ et

$$g \cdot \frac{E^{\mathscr{J}} 1_A}{E^{\mathscr{J}} g} = g \cdot \frac{1_A}{E^{\mathscr{J}} g} = A_\infty 1_A(\lambda \cdot p \cdot s), \quad \text{d'après (6).}$$

On en déduit que nécessairement $1_A =]1, b[\ \lambda \cdot p \cdot s$.

La tribu $\mathscr{J}$ des invariants est donc λ.triviale, c'est à dire ν triviale d'après le Corollaire 2.2.

Notons maintenant k la densité de l'a.c.i.p. ν; d'après ce qui précède et le théorème ergodique de Hopf, nous avons:

$$k = A_\infty k \overset{\lambda \cdot p \cdot s}{=} g/\lambda(g).$$

L'unicité de l'a.c.i.p. en résulte. La propriéte:

$$A_\infty h = \frac{g}{\lambda(g)} \cdot \lambda(h)$$

est évidemment une simple conséquence du théorème ergodique de Hopf.

3. *L'application f n'admet pas d'a.c.i.p.*

Nous représentons l'application f, à partir de son induite $f_{A_0'}$ et d'une construction par tours d'un étage, de base B_k, de premier étage $A_k = f(B_k)$, ce que nous représentons comme suit.

Nous avons:

$$\begin{cases} f^{-1}(A_k) = B_k \cup A_{k+1} \\ f^{-1}(A_0') = B_0 \cup A_1. \end{cases} \tag{8}$$

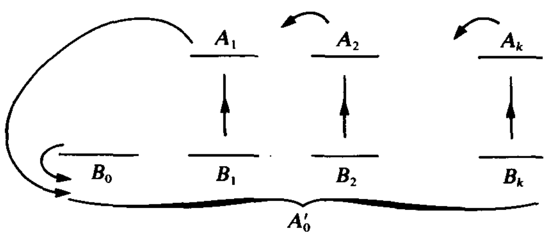

FIGURE 3

Nous reprenons succintement des résultats démontrés dans **[Sc]**.

LEMME 3.1. *Une* a.c.i.p. *pour* f *s'induit en une* a.c.i.p. *pour* $f_{A'_0}$.

Un calcul standard montre que:

$$\lambda(B_k) = \frac{2(b-1)\lambda_0\lambda_1}{k(k+1)}, \tag{9}$$

où λ_0 est l'inverse de la pente de f_0 (condition C_2) et $\lambda_1 = 1/2(b-1)$.

Soit alors μ une a.c.i.p. pour f et $\nu = \mu_{A'_0}/\mu(A'_0)$. D'après le Lemme 3.1, nous savons que ν est une a.c.i.p. pour $f_{A'_0}$.

En utilisant (7), il est aisé de voir que:

$$\mu(A_k) = \mu(A'_0)\cdot \sum_{i\geq k} \nu(B_i), \quad \text{et donc}$$

$$\mu([0,b]) = \mu(A'_0)\left[\nu(B_0) + \sum_{k\geq 1} k\cdot \nu(B_k)\right]. \tag{10}$$

PROPOSITION 3.1. *L'application* f *n'admet pas d'*a.c.i.p.

Nous utilisons les résultats du paragraphe 2. Les Propositions 2.3 et 2.4 signifient qu'ou bien $f_{A'_0}$ n'admet pas d'a.c.i.p. ou bien que sa densité g, appartient à $\mathcal{D}_0$, est strictement positive et $\inf_{[1,b]} g > 0$.

Si $f_{A'_0}$ n'admet pas d'a.c.i.p., d'après le Lemme 3.1, f n'admet pas d'a.c.i.p.

Si $f_{A'_0}$ admet une a.c.i.p. ν, de densité g, les relations (9) et (10), ainsi que la stricte positivité de $\inf_{[1,b]} g$ impliquent la proposition. On peut remarquer que dans ce cas, l'application f admet une mesure invariante σ-finie.

Remarque. Nous terminons cet article par l'étude d'un endomorphisme C^1 du cercle S^1 sans a.c.i.p. Nous savons en effet, de manière générale qu'une application dilatante de classe $C^r(r\geq 2)$ d'une variété différentiable M, compacte, connexe admet une mesure invariante, normalisée, absolument continue par rapport à la mesure riemanienne, dont la densité est de classe C^{r-1} **[Kr1]**. Par $r=1$, l'ensemble des applications dilatantes, de classe C^1, définies sur M, admettant une a.c.i.p. forme un ensemble de première catégorie dans l'ensemble des applications dilatantes de classe C^1 sur M, muni de la C^1 topologie **[Kr2]**.

Ce résultat montre de manière non constructive qu'il existe des transformations dilatantes de classe C^1 sur M, sans a.c.i.p. Nous proposons ici la construction d'une telle applications sur S^1.

Nous représentons son graphe, (figure 4) que nous explicitons.

Sur l'intervalle $[0, \frac{1}{4}]$, g coïncide avec l'application f construite au paragraphe 1. Sur $[\frac{3}{4}, 1]$, le graphe de g est translaté du graphe sur $[0, \frac{1}{4}]$ par la translation $\frac{3}{4}\,i$.

Sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$, le graphe de g est celui de la parabole $x \to 8x^2 + 2x$ translaté de $\frac{1}{4}i + j$.

Sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, c'est la même parabole transformée par translation et rotation.

Sur l'intervalle $[1, 1+z]$, le graphe de g est celui de la parabole $x \to ax^2 + 2x$ translaté, a et z vérifiant les conditions:

$$\begin{cases} (ax^2+2x)_{x=z} = 2 \\ (2-2z)(2ax+2)_{x=z} = 1. \end{cases}$$

Sur l'intervalle $[3-z, 3]$, c'est le même parabole transformé par translation et rotation.

Enfin, sur l'intervalle $[1+z, 3-z]$, g est linéaire telle que $g(1+z) = 0$ et $g(3-z) = 1$.

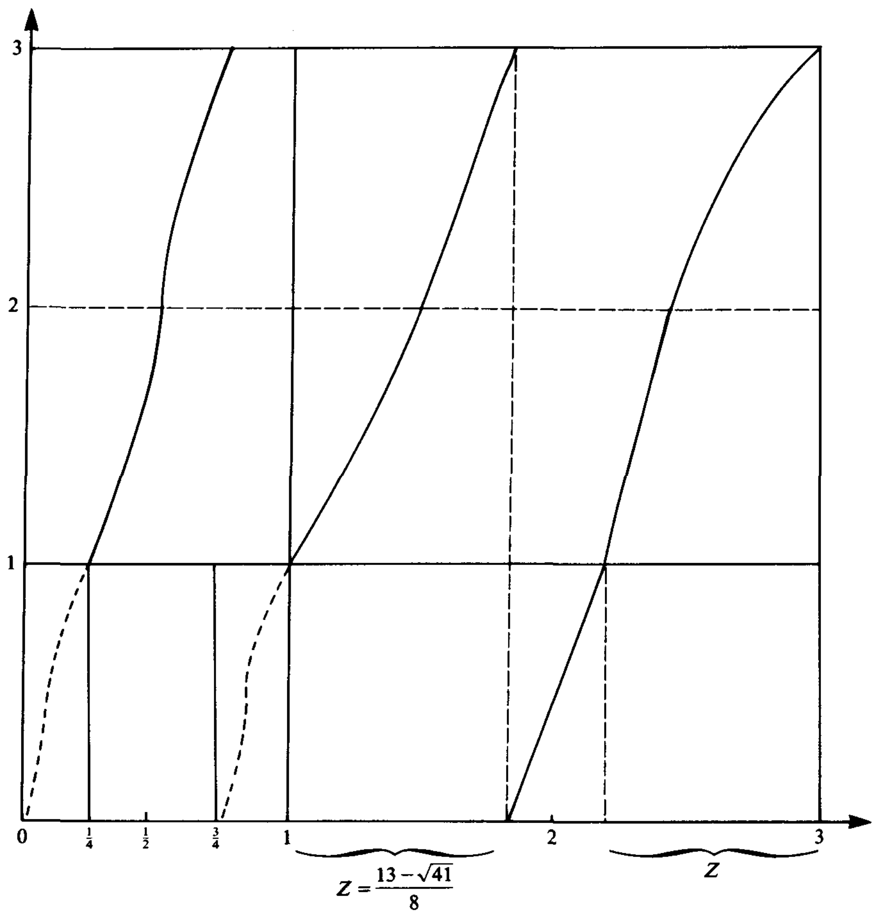

FIGURE 4

La preuve de la non existence d'a.c.i.p. est la même que celle donnée pour f, en induisant sur l'intervalle $[1, 3]$; une petite difficulté provient du fait que sur l'intervalle $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$, l'application est seulement C^1, mais $1/f'$ étant convexe, elle a les mêmes propriétés qu'une fonction à Schartzien négatif.

Acknowledgment. B. Schmitt tient à remercier pour leur hospitalité les organisateurs de 'XVIIIe semestre on dynamical systems and ergodic theory' qui a eu lieu au Centre Banach à Varsovie, et durant lequel ce travail a été effectué.

REFERENCES

[An] D. Anosov. Geodesic flows on closed Riemann manifolds with negative curvature. Proc. Steklov Institute of mathematics no. 90 (1967). Translated by: *Amer. Math. Soc.*: Providence, Rhode Island, 1969

[Co] P. Collet. Preprint. Ecole Polytechnique. Centre physique théorique: Palaiseau.

[Co-Ec] P. Collet & J. P. Eckman. *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems.* Birkhäuser: 1980.

[Ke] G. Keller. Generalized bounded variation and applications to piecewise monotonic transformations. *Z. Warscheinlichkeitstheorie* **69** (1985), 461-478.

[Ko] Z. Kowalski. Invariant measures for piecewise monotonic transformations. Ins. Proc. 4th Winter-School on Prob. Karpacz, Poland, 1975. pp. 77-94. *Lect. Notes Math.* **472**, Springer; Berlin-Heidelberg-New-York, 1975.

[Ko-Sa] A. A. Kosjalin & E. A. Sandler. Ergodic properties of a certain class of piecewise smooth transformations of a segment (in Russian). *Izvestija Vyssih Ucebryh Zaredinu, Matematika* **3** (1972), 32-40.

[Kr1] K. Kryzewski. On expanding mappings. *Bull. Acad. Pol. Sci. Série Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques* **19** (1971), 23-24.

[Kr2] K. Kryzewski. A remark on expanding mappings. *Coll. Math.* **41** (1979), 291-295.

[La-Y] A. Lasota & J. A. Yorke. On the existence of invariant measures for piecewise monotonic transformations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **186** (1973), 481-488.

[Mi] M. Misiurewicz. Absolutely continuous measures for certain maps of an interval. *Publications mathématiques de l'IHES* **53** (1981)

[Ne] J. Neveu. *Bases Mathématiques du Calcul des Probabilités* Masson et Cie: Paris, 1964.

[Pa] W. Parry. On the β-expansion for real numbers. *Acta. Math. Acad. Sc. Hungar.* **11** (1960), 401-416.

[Re] A. Renyi. Representations for real numbers and their ergodic properties. *Acta. Math. Acad. Sc. Hungar.* **8** (1957), 477-493.

[Ry] M. Rychlik. Invariant measures for piecewise monotonic, piecewise $C^{1+\varepsilon}$ transformations. Preprint Warsaw University.

[Sc] B. Schmitt. Condition d'existence d'une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, invariants pour une transformation dilatante de l'intervalle. Préprint de l'Université de Bourgogne.

[Wo] S. Wong. Some metric properties of piecewise monotonic mappings of the unit interval. *Trans. Amer. Math. Soc.* **246** (1978).