Compositio Mathematica **114:** 219–261, 1998.

Prolongement méromorphe des séries de Dirichlet à support dans un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$

D. ESSOUABRI
Université de NancyI, Institut de Mathématiques Elie Cartan**, B.P.239, 54506 Vandœuvre lès Nancy, France; e-mail: essouabr@iecn.u-nancy.fr*

Received 11 September 1996; accepted in final form 17 July 1997

Abstract. We consider the Dirichlet series $Z(P, A; s) = \sum_{m\in A\cap\mathbb{Z}^n} P^{-s}(m) \quad (s \in \mathbb{C})$ where $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ and A is an open semi-algebraic subset of $\mathbb{R}^n$. We will say that $Z(P, A; s)$ exists if this multiple series is absolutely convergent. In this paper we study the existence and several properties of meromorphic continuations of such series, under certain assumption on P and A. As an application, we show the existence of a finite asymptotic expansion of the counting function with support in A: $N_p(A, t) := \sharp\{m \in A \cap \mathbb{Z}^n | P(m) \leqslant t\}$ when $t \to +\infty$.

Mathematics Subject Classifications: 11M41, 11P21, 14B05, 14P10, 32A20 et 32A25.

Key words: Dirichlet series, meromorphic continuation, integral representation, resolution of singularities, semi-algebraic set, lattice points.

1. Introduction

Soit A un semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ et $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$. On appelle série de Dirichlet associée à P à support dans A la fonction:

$$s \mapsto Z(P, A; s) = \sum_{m\in A\cap\mathbb{Z}^n} \frac{1}{P(m)^s} \quad (s \in \mathbb{C}),$$

quand elle existe.

Dans ce sujet, trois questions sont d'une importance capitale, à savoir:

(1) Déterminer le domaine de convergence D de $s \mapsto Z(P, A; s)$.
(2) Prolonger méromorphiquement $s \mapsto Z(P, A; s)$ au-delà de D, déterminer un ensemble de candidats-pôles et obtenir une majoration des ordres des pôles.
(3) Obtenir des majorations du prolongement méromorphe sur les bandes verticales de $\mathbb{C}$.

* L'auteur exprime aussi sa reconnaissance au Max-Planck-Institut für Mathematik de Bonn où il a achevé ce travail.

Le cas où A est un quadrant de la forme $[B,+\infty[^n$ $(0<B<1)$ a été généralisé récemment (voir [3]) où l'historique et les différentes étapes de ce problème sont donnés.

Dans le cas d'un ouvert semi-algébrique quelconque A, bien que le problème ait été posé depuis longtemps (voir [8] et [6] par exemple), et hormis l'étude de Mahler [8] du cas particulier où A est un secteur angulaire, il semble que ce papier soit la première contribution dans la cas où A est un semi-algébrique ouvert quelconque.

Cet article est constitué de deux parties. Dans la première, nous étudions le cas des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$ vérifiant une hypothèse probablement optimale. Dans la deuxième, nous nous placerons dans $\mathbb{R}^n$ $(n>2)$. Les hypothèses sur l'ensemble A dans ce dernier cas sont moins générales, les seuls exemples connus les vérifiant étant ceux des sous-ensembles semi-algébriques asymptotiques à l'infini à des ensembles polyédraux.

Notations
Dans toute la suite les symboles:

$$f(\lambda,\mathbf{y},\mathbf{x}) \ll_{\mathbf{y}} g(\mathbf{x}) \qquad \text{uniformément en } \mathbf{x}\in X \text{ et } \lambda\in\Lambda,$$
$$f(\lambda,\mathbf{y},\mathbf{x}) = 0_{\mathbf{y}}(g(\mathbf{x})) \qquad \text{uniformément en } \mathbf{x}\in X \text{ et } \lambda\in\Lambda,$$

ont le même sens et signifie qu'il existe $A=A(\mathbf{y})>0$, ne dépendant ni de $\mathbf{x}$ ni de λ, mais pouvant à priori dépendre de tous les autres paramètres du problème considéré en particulier de $\mathbf{y}$, tel qu'on ait:

$$\forall \mathbf{x}\in X \quad \textit{et} \quad \forall\lambda\in\Lambda \quad |f(\lambda,\mathbf{y},\mathbf{x})| \leqslant Ag(\mathbf{x}).$$

Quand il n'y a pas d'ambiguité, on omettera le mot uniformément dans ce qui précéde. Le symbole $f\asymp g$ signifie qu'on a à la fois $f\ll g$ et $g\ll f$. Soit maintenant un polynôme $P\in\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$, on le notera $P(x) = \sum_{\alpha\in \operatorname{supp}(P)} a_\alpha x^\alpha$ où $\operatorname{supp}(P)$ désigne l'ensemble des indices des coefficients non nuls de P. On définit ensuite, comme dans [9], le polynôme $P^*(x)=\sum_{\alpha\in\mathcal{E}(P)} x^\alpha$ où $\mathcal{E}(P)$ est l'ensemble des points extrémaux du polyèdre de Newton de P à l'infini: $\mathcal{E}^\infty(P)=\operatorname{Conv}\{\operatorname{supp}(P)-\mathbb{R}_+^n\}$, Conv désignant l'enveloppe convexe. Nous dirons alors que P est non dégénéré sur une partie B de $\mathbb{R}^n$ si $P\asymp P^*$ sur B.

On note enfin, pour $s\in\mathbb{C}$, $s=\sigma+i\tau$ où $\sigma=\Re(s)$ et $\tau=\Im(s)$.

2. Enoncés des résultats

A. Le cas des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$

(1) *Cas général*
On considère un sous-ensemble ouvert semi-algébrique A de $\mathbb{R}^2$ et on suppose qu'il existe deux constantes c et $\gamma>0$ tels que:

$$\forall x\in\partial A \quad \mathrm{d}(x,\mathbb{Z}^2) \geqslant c(1+\|x\|)^{-\gamma}. \qquad (*1)$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

En utilisant les propriétés géométriques des ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^2$, on peut toujours se ramener au cas où A est défini par:

$$A = A(Q, a) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > a \quad \text{et} \quad x_2 > Q(x_1)\},$$

où $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{Z}$ et Q est une fonction continue semi-algébrique qui possède un développement en série de Puiseux à l'infini. On pose $d = \deg Q$ $(d \in \mathbb{Q})$ le plus grand des exposants intervenant dans ce développement. Si $d \leqslant 0$, on se ramène de façon évidente au cas déjà connu d'un quadrant [3]. On suppose donc désormais $d \in \mathbb{Q}_+^*$. On considère aussi $P \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ qui vérifie:

(i) $P(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, $x \in A$ et $\forall m \in A \cap \mathbb{Z}^n$, $P(m) \neq 0$;
(ii) $d(A, Z(P)) > 0$ où $Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^2 | P(z) = 0\}$ est l'ensemble des zéros complexes de P;
(iii) P est non dégénéré sur l'ensemble

$$S = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 > a, x_2 = Q(x_1)\} \subset \partial A$$

(voir les notations pour la définition de non dégénéré).

On a alors:

THÉORÈME 1 ET DÉFINITION. *Sous l'hypothèse* (i), *il existe* $\alpha = \alpha(P, A) > 0$ *tel que la série* $\sum_{m \in A \cap \mathbb{Z}^2} \frac{1}{P(m)^s}$ *converge absolument et sa somme* $Z(P, A; s)$ *est une fonction holomorphe de* s *dans le demi-plan* $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$.

La borne inférieure de ces réels α *sera appelée abscisse de convergence de la série de Dirichlet et nous la noterons* $\sigma_0 = \sigma_0(P, A)$.

En outre, si P vérifie en plus l'hypothèse (ii) *et si on note* σ_0' *l'abscisse de convergence de l'intégrale*

$$Y_P(A; s) = \int_A P^{-s}(x)\, \mathrm{d}x, \quad \textit{alors}\, \sigma_0 = \sigma_0'.$$

Remarque: La dernière partie du Théorème 1 nous donne un moyen efficace pour calculer σ_0. En effet, il est plus facile de calculer σ_0' en désingularisant P et les équations du semi-algébrique A (par exemple) dans l'intégrale $Y_P(A; s)$, ce qui permet de calculer σ_0' et donc σ_0 aussi. Quand à l'intêret du calcul de σ_0 il se justifie par son rôle dans le Corollaire 1.

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses* $(*1)$ *et* (i), (ii)–(iii), $\exists \beta = \beta(P, A) > 0$ *tel que* $s \mapsto Z(P, A; s)$ *possède un prolongement méromorphe au demi-plan*

$E = \{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \sigma_0 - \beta\}$ *avec un seul pôle dans* E *qui est* σ_0. *De plus, l'ordre du pôle* σ_0 *est soit* 1, *soit* 2. *En outre, il existe* $D = D(P, A) > 0$ *tel que le prolongement méromorphe* $\widetilde{Z}(P, A; s)$ *de* $Z(P, A; s)$ *vérifie: quels que soient* ε, $\varepsilon' > 0$, *il existe* $C = C(\varepsilon, \varepsilon', P, A) > 0$ *vérifiant:*

$$|\widetilde{Z}(P, A; s)| \leqslant C(1 + |\tau|^{D(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon}),$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\sigma > \sigma_0 - \beta$ *et* $|s - \sigma_0| \geqslant \varepsilon'$.

COROLLAIRE 1 (Application à la thèorie Analytique des nombres).
Soit $\sigma_0 = \sigma_0(P, A)$ *l'abscisse de convergence de la série de Dirichlet* $s \mapsto Z(P, A; s)$. *Alors il existe* $\theta = \theta(P, A) > 0$ *tel qu'on a:*

$$N_P(A, t) := \sharp\{m \in A \cap \mathbb{Z}^n | P(m) \leqslant t\} = t^{\sigma_0} Q_0(\ln t)(1 + 0(t^{-\theta}))$$

quand $t \to +\infty$ *où* $Q_0 \in \mathbb{R}[X]$ *est un polynôme non identiquement nul et de degré* $\leqslant 1$ *défini par:*

$$Q_0(X) = \mathrm{e}^{-\sigma_0 x} \,\mathrm{Re}\, s_{s=\sigma_0} \left(\frac{Z(P, A; s)}{s} \,\mathrm{e}^{sx} \right).$$

Remarque. Selon les méthodes standards, on s'attendrait au comportement suivant: $N_P(A, t) =$ (un terme dominant) $+$ (un terme d'erreur) quand $t \to +\infty$, dont la croissance des deux termes serait à peu près la même (on utilise un théorème de Landau sur les séries de Dirichlet à coefficients positifs et un théorème taubérien de G. Freud, voir [6] pour plus de détails).

Le principal apport de notre résultat (i.e. Corollaire 1) est de montrer que dans le cadre général de notre étude le terme d'erreur est vraiment d'ordre strictement inférieur au terme dominant. Ce n'est pas possible de le démontrer par les méthodes classiques.

(2) *Cas particuliers importants*

Les Théorèmes 1, 2 et le Corollaire 1 sont optimaux dans leur formulation, et pour prolonger méromorphiquement au-delà de $\sigma_0 - \beta$, il faut tenir compte des propriétés arithmétiques fines de la frontière. En effet même dans les cas où il y a un prolongement méromorphe au-delà de $\sigma_0 - \beta$ ce prolongement n'est pas standard si les propriétés arithmétiques de la frontière de A ne sont pas négligeables et ces propriétés peuvent engendrer alors une répartition non standard des pôles qui ne forment plus nécessairement une suite discrète de réels voir ([8] et [4]) pour l'étude de tels exemples (voir Section 8 pour plus de détails).

En conclusion, le théorème ne peut être amélioré que pour des classes restreintes d'ensembles semi-algébriques. Nous étudierons ici le cas d'une classe importante, car dans un sens générique des cas où l'effet arithmétique de la frontière n'est pas prépondérant. Nous montrerons que pour cette classe il n'y a plus d'obstruction a l'existence d'un prolongement méromorphe à tout le plan complexe avec une répartition standard des pôles.

On suppose dans ce paragraphe que l'ensemble semi-algébrique

$$A = A(Q, a) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > a, x_2 > Q(x_1)\},$$

vérifie $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{Z}$ et $Q(t) = \sum_{j=0}^{d} a_j t^j + o(1)$ quand $t \to +\infty$, où $d \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{Z}$. On vérifie alors facilement que, pour $\gamma = 2(\frac{d-1}{d+1})$, il existe $c > 0$ tel que:

$$\forall x \in \partial A \quad d(x, \mathbb{Z}^2) \geqslant c(1 + \|x\|)^{-\gamma}.$$

Donc notre hypothèse $(*1)$ est vérifiée. On se donne de plus un polynôme.

$P \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ vérifiant (i)–(ii)–(iii). Alors le Théorème 2 et son corollaire peuvent être améliorés comme suit:

THÉORÈME 2 bis. *La fonction $s \mapsto Z(P, A; s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordre au plus 2 et contenus dans un ensemble de la forme $\mathcal{S} = \sigma_0 - \frac{1}{M}\mathbb{N}$, où $\sigma_0 = \sigma_0(P, A) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $M = M(P, A) \in \mathbb{N}^*$. De plus, l'abscisse de convergence σ_0 est effectivement un pôle de $s \mapsto Z(P, A; s)$. En outre, il existe $D = D(P, A) > 0$ tel que le prolongement méromorphe $\widetilde{Z}(P, A; s)$ de $Z(P, A; s)$ vérifie $\forall \varepsilon$, ε' et $N > 0$, il existe $C = C(N, \varepsilon, \varepsilon', P, A) > 0$ tel que $|\widetilde{Z}(P, A; s)| \leqslant C(1 + |\tau|^{D(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon})$ uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geqslant \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geqslant \varepsilon'$.*

Remarque. Le fait que l'abscisse de convergence σ_0 soit un pôle découle d'un résultat classique de Landau (voir par exemple [10], p. 125) qui montre que si une série de Dirichlet à coefficients positifs posséde un prolongement méromorphe au delà de son abscisse de convergence σ_0 alors σ_0 est forcément un pôle.

COROLLAIRE 1 bis (Application en théorie des nombres). *On note $(\sigma_k)_{k\geqslant 0}$ la suite des pôles de $s \mapsto \frac{1}{s}Z(P, A; s)$ classés par ordre décroissant. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on définit le polynôme $Q_k \in \mathbb{R}[X]$ par la relation $Q_k(X) = \mathrm{e}^{-\sigma_k X} \operatorname{Res}_{s=\sigma_k}(\frac{Z(P,A;s)}{s} \mathrm{e}^{sX})$. Alors, Q_k est non identiquement nul et son degré est inférieur ou égal à 2. Par ailleurs, soit $D = D(P, A)$ le nombre donné par le Théorème 2 bis. Notons $m = m(P, A)$ le plus grand entier k tel que $\sigma_k > \sigma_0 - \frac{1}{D}$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on a:*

$$N_P(A, t) := \sharp\{m \in \mathbb{Z}^2 \cap A | P(m) \leqslant t\} = \sum_{k=0}^{m} t^{\sigma_k} Q_k(\ln t) + 0(t^{\sigma_0 - \frac{1}{D} + \varepsilon}).$$

B. Le cas des sous-ensembles semi-algébriques de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$

Soit A un sous-ensemble ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ qui vérifie:

$$d(\partial A, \mathbb{Z}^n) > 0; \tag{$*2$}$$

Et soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que:

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

(a) $P(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, $x \in A$ et $\forall m \in A \cap \mathbb{Z}^n\, P(m) \neq 0$;
(b) $d(A \cap \mathbb{Z}^n, Z(P)) > 0$, où $Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n | P(z) = 0\}$.

On a alors:

THÉORÈME 3. *Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ vérifiant l'hypothèse* (a). *Alors la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P, A; s)$ posséde un demi plan de convergence et d'holomorphie $\{\Re(s) > \sigma_0\}$ avec une abscisse de convergence $\sigma_0 = \sigma_0(P, A)$. En outre si P vérifie en plus* (b) *alors $\sigma_0 = \sigma_0'$ où σ_0' est l'abscisse de convergence de l'intégrale $Y_P(A; s) = \int_A P^{-s}(x)\, \mathrm{d}x$.*

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses $(*2)$,* (a) *et* (b)*, on a le même énoncé que le Théorème* 2 *bis, à condition de remplacer 'pôles d'ordre au plus* 2*' par 'pôles d'ordre au plus n'.*

COROLLAIRE 2. *Sous les hypothèses $(*2)$,* (a) *et* (b)*, on a le même énoncé que le Corollaire* 1 *bis, à condition de remplacer* 'deg $Q_k \leqslant 2$' *par* 'deg $Q_k \leqslant n$'.

Remarque. La méthode que nous allons utiliser pour démontrer les théorèmes 1, 1bis et 4 montre clairement que les pôles des séries de Dirichlet considérés sont rationnels. En particulier comme l'abscisse de convergence σ_0 est un pôle alors c'est un rationnel.

3. Résultats intermédiaires

3.1. QUELQUES LEMMES DE GÉOMÉTRIE ALGÉBRIQUE RÉELLE

Dans cette partie, A est un sous-ensemble ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$ et $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Et on note $Z(P) = \{z \in \mathbb{C}^n | P(z) = 0\}$.

LEMME 1. *On suppose que $d(\partial A, \mathbb{Z}^n) > 0$ et $d(A \cap \mathbb{Z}^n, Z(P)) > 0$, alors il existe des semi-algébriques, ouverts et connexes en nombre fini $A_1, \ldots, A_k$ deux à deux disjoints tels que*

$$\bigcup_{i=1}^{k} A_i \subset A \quad \textit{et} \quad A \cap \mathbb{Z}^n = \bigcup_{i=1}^{k} (A_i \cap \mathbb{Z}^n), \tag{1}$$

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad d(\partial A_i, \mathbb{Z}^n) > 0 \quad \textit{et} \quad d(A_i, Z(P)) > 0. \tag{2}$$

LEMME 2. *On suppose que $P(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$, $x \in A$, alors il existe $c, \alpha > 0$ et $r_0 > 0$ tel que pour tout $x \in A$ vérifiant $\|x\| \geqslant r_0$ on a*

$$P(x) \geqslant c(1 + \|x\|)^{\alpha}.$$

LEMME 3. *On suppose que* $d(A, Z(P)) > 0$, *alors il existe* $\delta > 0$ *tel que:* $\frac{P(x+iy)}{P(x)} = 1 + 0(\|y\|)$ *quand* $y \to 0$ *uniformément en* $x \in \overline{A}$ *et* $y \in \mathbb{R}^n$ *vérifiant* $\|y\| < \delta$. *Ce qui veut dire qu'il existe une constante* $K = K(A, \delta, P) > 0$ *tel que,*

$$\forall x \in \overline{A} \textit{ et } \forall y \in \mathbb{R}^n \textit{ vérifiant } \|y\| < \delta \textit{ on a: } \left| \frac{P(x+iy)}{P(x)} - 1 \right| \leqslant K\|y\|.$$

LEMME 4. *On suppose que pour tout* $x \in A \quad P(x) \neq 0$. *Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes:*

$$d(A, Z(P)) > 0; \tag{1}$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \textit{ avec } |\alpha| \leqslant \textit{ deg } (P), \textit{la fonction } x \mapsto \frac{\partial^\alpha P(x)}{P(x)} \tag{2}$$

est borné sur A.

Les Lemmes 2, 3 et 4 sont des généralisations faciles des Lemmes 1, 2 et 3 que nous avons démontrés dans ([3], Section 3). Nous nous contenterons donc ici de démontrer le Lemme 1.

Démonstration du Lemme 1. Nous posons

$\delta = \inf(\mathrm{d}(\partial A, \mathbb{Z}^n), \mathrm{d}(A \cap \mathbb{Z}^n, Z(P))) > 0$ et $B = \{x \in A | \mathrm{d}(x, Z(P)) > \frac{\delta}{2}\}$, alors B est un sous-ensemble ouvert semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ et $B \subset A$.

De plus $\partial B \subset \partial A \cup K$ où $K = \{x \in A | \mathrm{d}(x, Z(P)) = \frac{\delta}{2}\}$.

- Si $x \in \partial A$, on a évidemment $\mathrm{d}(x, \mathbb{Z}^n) \geqslant \delta$.
- Si $x \in K$, alors $\mathrm{d}(x, Z(P)) = \frac{\delta}{2}$, d'où $\mathrm{d}(x, \mathbb{Z}^n) \geqslant \frac{\delta}{4}$.

En effet, sinon alors $\mathrm{d}(x, \mathbb{Z}^n) < \frac{\delta}{4} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z}^n$ tel que $d(x, m) < \frac{\delta}{4}$.

On distingue alors deux cas à savoir:

Soit $m \in A$, d'où $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ et on a alors

$$\begin{aligned} \delta &\leqslant \mathrm{d}(A \cap \mathbb{Z}^n, Z(P)) \leqslant \mathrm{d}(m, Z(P)) \\ &\leqslant \mathrm{d}(m, x) + \mathrm{d}(x, Z(P)) < \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{2} = \frac{3\delta}{4} < \delta \quad \text{absurde.} \end{aligned}$$

Soit $m \notin A$, alors $m \in A^c$, d'où

$$\frac{\delta}{4} \geqslant \mathrm{d}(x, m) \geqslant \mathrm{d}(m, \partial A) \geqslant \mathrm{d}(\mathbb{Z}^n, \partial A) \geqslant \delta \quad \text{absurde.}$$

Donc en conclusion, on a

$$\mathrm{d}(\partial B, \mathbb{Z}^n) \geqslant \frac{\delta}{4}.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

De plus, par définition de B, on a aussi

$$\mathrm{d}(B, Z(P)) \geqslant \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad B \cap \mathbb{Z}^n = A \cap \mathbb{Z}^n.$$

On pose $\delta' = \frac{\delta}{4} > 0$, on a alors

$$\mathrm{d}(B, Z(P)) \geqslant \delta', \qquad \mathrm{d}(\partial B, \mathbb{Z}^n) \geqslant \delta', \qquad B \cap \mathbb{Z}^n = A \cap \mathbb{Z}^n$$

et B *est un semi-algébrique ouvert inclus dans* A.

Comme B est un semi-algébrique ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors un résultat classique de géométrie algébrique réelle (voir [2]), montre que B possède un nombre fini de composantes connexes $A_1, \ldots, A_k$ qui sont en plus ouvertes et semi-algébriques.

Par suite: $B = \bigcup_{i=1}^{k} A_i$ et $A \cap \mathbb{Z}^n = B \cap \mathbb{Z}^n = \cup_{i=1}^{k}(A_i \cap \mathbb{Z}^n)$, d'où le point (1) du lemme.

En outre, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$ fixé, on a

$$A_i \subset B, \quad \text{donc}\, d(A_i, Z(P)) \geqslant \mathrm{d}(B, Z(P)) \geqslant \delta' > 0.$$

Il reste à démontrer que $d(\partial A_i, \mathbb{Z}^n) > 0$. Mais ceci découle du fait que $\partial A_i \subset \partial B$, d'où $\mathrm{d}(\partial A_i, \mathbb{Z}^n) \geqslant \mathrm{d}(\partial B, \mathbb{Z}^n) \geqslant \delta' > 0$. Ce qui termine la démonstration du lemme. □

Remarque. Bien que ca ne soit pas nécessaire pour la suite, les Lemmes 2, 3 et 4 sont aussi valables si à la place d'un polynôme P, on considère une fonction rationnelle φ et si on désigne par $Z(\varphi)$ le diviseur qui lui est associé. En effet, il est facile de vérifier que la démonstration du Lemme 2 que nous avons donné dans le cas où A est un quadrant (voir [3], §3) et qui se généralise sans difficulté au cas d'un semi algébrique A, reste valable modulo quelques modifications évidentes. De plus, si on écrit $\varphi = P/R$ où P et R sont deux polynômes et on applique le Lemme 3 précedent à P et R séparément, on obtient le Lemme 3 pour φ.

C'est à dire que si $\mathrm{d}(A, Z(\varphi)) > 0$, alors

$$\frac{\varphi(x+iy)}{\varphi(x)} = 1 + 0(\|y\|) \text{ quand } \|y\| \to 0 \text{ uniformément en } x \in \overline{A} \text{ et } y \in \mathbb{R}^n.$$

Et une adaptation de la même démonstration permet de voir qu'on a aussi:

$$\frac{\varphi(x+z)}{\varphi(x)} = 1 + 0(\|z\|) \text{ quand } \|z\| \to 0 \text{ uniformément en } x \in \overline{A} \text{ et } z \in \mathbb{C}^n.$$

Or d'après la formule de Cauchy, il est clair que pour $r > 0$ assez petit on a, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $x \in \overline{A}$

$$\partial^\alpha \varphi(x) = \frac{\alpha!}{(2\pi i)^n} \int_{|z_1|=r} \cdots \int_{|z_n|=r} \frac{\varphi(x+z)\, \mathrm{d}z_1 \cdots \mathrm{d}z_n}{z_1^{1+\alpha_1} \cdots {z_n}^{1+\alpha_n}}.$$

Ce qui permet de voir que la fonction $x \to \frac{\partial^\alpha \varphi(x)}{\varphi(x)}$ est bornée sur A. On obtient ainsi l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du Lemme 4, Quant à la réciproque, elle est facile (il suffit de développer en série entière).

3.2. UN RÉSULTAT DE PROLONGEMENT MÉROMORPHE

Dans cette partie, B désigne un sous-ensemble semi-algébrique de $\mathbb{R}^n$ de dimension inférieur ou égale à n et $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. Nous noterons μ le degré total de P et on définit $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{N}^n$ par:

$$\alpha_1 = 0 \text{ et } \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \,||\alpha| \leqslant \mu\}.$$

Nous supposerons qu'il existe c, $\alpha > 0$ tels que: $\forall x \in B$, $P(x) \geqslant c(1 + \|x\|)^\alpha$. Nous poserons $H(x) = (1, \frac{\partial^{\alpha_2} P(x)}{P(x)}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_q} P(x)}{P(x)})$ et nous supposons que:

$x \mapsto H(x)$ est bornée sur B.

Nous poserons aussi pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{N}^q$ et pour tout $x \in B$:

$$(H(x))^u = \prod_{j=2}^{q} \left(\frac{\partial^{\alpha_q} P(x)}{P(x)}\right)^{u_j}.$$

Nous définissons ensuite, pour tout $h \in \mathbb{Z}^n$, $u \in \mathbb{N}^q$ et $s \in \mathbb{C}$

$$Y_P(B, h, u; s) = \int_B P^{-s}(x)(H(x))^u \, \mathrm{e}^{\pi i\langle h, x\rangle} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_r \quad (\text{quand elle existe}). \qquad (*)$$

On a alors:

THÉORÈME 5. *Sous les hypothèses ci-dessus, il existe $\alpha = \alpha(P, B) > 0$ indépendant de u et h tel que $s \mapsto Y_P(B, h, u; s)$ existe et est holomorphe sur le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \alpha\}$. De plus, cette fonction possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordre au plus r et contenus dans un ensemble de la forme $\mathcal{S} = \sigma_0' - \frac{1}{M'}\mathbb{N}$ où $\sigma_0' = \sigma_0'(P, B) \in \mathbb{Q}_+^*$ et $M' = M'(P, B) \in \mathbb{N}^*$ ne dépendent que de P et B.*

En outre, il existe $D' = D'(P, B) > 0$, $K = K(P, B) \geqslant 1$ tels que ce prolongement méromorphe vérifie: $\forall \varepsilon'$, δ, $N > 0$, il existe $C = C(N, \varepsilon', \delta, P, B)$ (donc indépendants de $h \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{N}^n$) positive tel que

$$|\widetilde{Y}_P(B, h, u; s)| \leqslant C(1 + |\tau|^{D'(\sigma_0' - \sigma) + \varepsilon'})(1 + \|h\|^{D'(\sigma_0' - \sigma) + \varepsilon'}) K^{|u|}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geqslant \sigma_0' - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geqslant \delta$.

Preuve. La démonstration de ce théorème est en tout point analogue à celle du théorème 5 que nous avons énoncé et démontré dans [3] (pages 449–468) en prenant comme paramètre $\varepsilon = 0$, $n_1 = 0$ et donc $n_2 = n$. La seule différence et qu'ici on intègre sur B au lieu d'un quadrant dans [3], mais ceci ne pose pas de nouvelles difficultés. En effet, comme B est un semi algébrique de $\mathbb{R}^n$ alors quitte à décomposer B en un nombre fini de morceaux, à enlever des compacts (ce qui ne pose pas de problème car nous sommes au voisinage de l'infini) et à faire des changements de variables linéaires, on peut supposer que:

$$B = \{x \in]1, +\infty[^n | Q_1(x) > 0, \ldots, Q_r(x) > 0 \text{ et } G_1(x) = \cdots = G_\ell(x) = 0\}$$

où $Q_1, \ldots Q_r$ et $G_1, \ldots, G_\ell$ sont des polynômes dans $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$. On effectue comme dans [3] le changement de variables

$$t = (t_1, \ldots, t_n) \mapsto x = \left(\frac{1}{t_1}, \ldots, \frac{1}{t_n}\right),$$

B devient,

$$\tilde{B} = \{t \in]0, 1[^n | \tilde{Q}_1(t) > 0, \ldots, \tilde{Q}_r(t) > 0 \text{ et } \tilde{G}_1(t) = \cdots = \tilde{G}_\ell(t) = 0\}$$

où les $\tilde{Q}_j$ (respectivement les $\tilde{G}_j$) sont des polynômes qui se déduisent de façon évidente des Q_j (respectivement des G_j).

Maintenant, si dans notre démonstration donnée dans ([3], p. 463) on ajoute à la liste des fonctions à désingulariser simultanément, les $\tilde{Q}_j$ $(j = 1, \ldots, r)$ et les $\tilde{G}_j$ $(j = 1, \ldots, \ell)$, alors après désingularisation et dans un ouvert de la partition de l'unité cartographié par un système de coordonnées locales $w = (w_1, \ldots, w_n)$ décrivant l'ouvert $]-1, +1[^n$ et si on note π le morphisme propre de la désingularisation, on peut remplacer localement $\tilde{B}$ par

$$\begin{aligned}\tilde{B}' = \{&w \in]-1, +1[^n | \tilde{Q}_1 \circ \pi(w) > 0, \ldots, \tilde{Q}_r \circ \pi(w) > 0 \\ &\text{et } \tilde{G}_1 \circ \pi(w) = \cdots = \tilde{G}_\ell \circ \pi(w) = 0\}.\end{aligned}$$

Et il existe des fonctions a_j $(j = 1, \ldots, r)$ et b_j $(j = 1, \ldots, \ell)$ analytiques et inversibles (à valeurs non nulles) sur $]-1, +1[^n$ et des α^j $(j = 1, \ldots, r)$, β^j $(j = 1, \ldots, \ell)$ appartenant à $\mathbb{N}^n$ tel que

- $\forall j = 1, \ldots, r$ et $\forall w \in]-1, +1[^n \quad \tilde{Q}_j \circ \pi(w) = a_j(w) w^{\alpha^j}$;
- $\forall j = 1, \ldots, \ell$ et $\forall w \in]-1, +1[^n \quad \tilde{G}_j \circ \pi(w) = b_j(w) w^{\beta^j}$.

Ce qui permet de voir facilement, que $\tilde{B}'$ est une réunion fini d'ensembles de la forme (à permutation des coordonnées près):

$$]-1, 0[^{k_1} \times]0, 1[^{k_2} \quad \textit{où} \quad k_1 + k_2 = n.$$

Ce qui via le changement de variable triviale suivant

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \longmapsto w = \left(-\frac{1}{x_1}, \ldots, -\frac{1}{x_{k_1}}, \frac{1}{x_{k_1+1}}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right),$$

nous permet de se ramener au quadrant $]1,+\infty[^n$ et on conclut exactement comme dans la démonstration du Théorème 5 de [3]. $\square$

4. Démonstration des Théorèmes 1 et 3, construction d'une formule sommatoire

4.1. DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES 1 ET 3

4.1.1. *Un résultat intermédiaire*

Commençons d'abord par établir le résultat suivant

PROPOSITION 1. *Soient A un semi-algébrique ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $P,\varphi \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$. On pose pour tout $m=(m_1,\dots,m_n)\in\mathbb{Z}^n$.*
$I_m=\prod_{j=1}^n [m_j-\frac{1}{2}, m_j+\frac{1}{2}]$, on désigne par $\mathrm{Vol}(I_m\cap A)$ le volume de $(I_m\cap A)$. Considérons les hypothèses suivantes

1. $\forall m\in A\cap\mathbb{Z}^n P(m)\neq 0$ *et* $P(x)\to+\infty$ *quand* $\|x\|\to+\infty, x\in A$;
2. $d(A,Z(P))>0$ *où* $Z(P)=\{z\in\mathbb{C}^n \mid P(z)=0\}$;
3. $d(A,Z(\varphi))>0$ *où* $Z(\varphi)=\{z\in\mathbb{C}^n \mid \varphi(z)=0\}$;
4. $\exists c>0$ *tel que* $\forall m\in A\cap\mathbb{Z}^n$, $\mathrm{Vol}(I_m\cap A)\geqslant c$.

Alors sous l'hypothèse (1)*, la série de Dirichlet,*

$$s\mapsto Z(P,A,\varphi;s)=\sum_{m\in A\cap\mathbb{Z}^n}\frac{\varphi(m)}{P^s(m)}$$

possède un demi plan de convergence et d'holomorphie de la forme $\{\Re(s)>\gamma\}$ avec une abscisse de convergence qu'on notera

$$\sigma_0=\sigma_0(P,A,\varphi).$$

Si en plus les hypothèses (2), (3) *et* (4) *sont vérifiées, alors $\sigma_0=\sigma_0'$ où $\sigma_0'=\sigma_0'(P,A,\varphi)$ est l'abscisse de convergence de l'intégrale*

$$Y_P(A;s)=\int_A \varphi(x)P^{-s}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. L'existence, sous l'hypothèse (1) d'un demi-plan de convergence et d'holomorphie ainsi que d'une abscisse de convergence $\sigma_0=\sigma_0(P,A,\varphi)$ découle de façon évidente du Lemme 2. Donc pour terminer la démonstration de la proposition 1 il suffit de montrer que sous les hypothèses (1), (2), (3) et (4) on a, $\sigma_0=\sigma_0'$.

Or pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ et pour tout $x, y \in I_m \cap A$ on a par la formule de Taylor

$$0 < \frac{P(y)}{P(x)} = \frac{P(x+y-x)}{P(x)} = \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leqslant \deg(P)}} \frac{\partial^\alpha P(x)}{P(x)} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!}.$$

Et comme $y - x \in [-1, +1]^n$ et $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \quad \alpha! \geqslant 1$ alors:

$$0 < \frac{P(y)}{P(x)} \leqslant \sum_{\substack{\alpha \in \mathbb{N}^n \\ |\alpha| \leqslant \deg(P)}} \left| \frac{\partial^\alpha P(x)}{P(x)} \right|.$$

Ce qui implique, d'après le Lemme 4, qu'il existe $R > 0$ tel que, pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ et pour tout $x, y \in I_m \cap A$ on a: $0 < \frac{P(y)}{P(x)} \leqslant R$.

On en déduit qu'il existe $R > 0$ tel que pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ et pour tout $x \in I_m \cap A$ on a: $\frac{1}{R}\, P(m) \leqslant P(x) \leqslant R\, P(m)$.

D'où pour tout $\sigma \geqslant 0$, pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ et pour tout $x \in I_m \cap A$ on a:

$$R^{-\sigma}\, P^{-\sigma}(m) \leqslant P^{-\sigma}(x) \leqslant R^\sigma\, P^{-\sigma}(m).$$

De la même façon, il existe $M > 0$ tel que pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ on a: $\frac{1}{M}\, \varphi(m) \leqslant \varphi(x) \leqslant M\, \varphi(m)$. On en déduit que pour tout $\sigma \geqslant 0$ et pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ on a

$$\begin{aligned} & M^{-1} R^{-\sigma} \operatorname{vol}(I_m \cap A)\, \varphi(m) P^{-\sigma}(m) \\ & \quad \leqslant \int_{I_m \cap A} \varphi(x) P^{-\sigma}(x)\, \mathrm{d}x \leqslant M R^\sigma \operatorname{vol}(I_m \cap A) \varphi(m) P^{-\sigma}(m). \end{aligned}$$

Et comme l'hypothèse (3) implique qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$, $\operatorname{Vol}(I_m \cap A) \geqslant c$.

Alors, pour tout $\sigma \geqslant 0$ et pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ on a

$$\begin{aligned} M R^\sigma P^{-\sigma}(m) \; & \geqslant \int_{I_m \cap A} \varphi(x) P^{-\sigma}(x)\, \mathrm{d}x \\ & \geqslant c R^{-\sigma} M^{-1}\, P^{-\sigma}(m) (\text{car } \operatorname{Vol}(I_m \cap A) \leqslant 1). \end{aligned}$$

Ce qui permet de voir facilement que $\sigma_0 = \sigma_0'$. □

4.1.2. *Démonstration du Théorème 3*

Pour démontrer le Théorème 3, il suffit de montrer que ses hypothèses impliquent celles de la Proposition 1. Il est clair que l'hypothèse (1) est vraie. De plus le Lemme 1 permet de supposer que l'hypothèse (2) est aussi vérifiée. Quant a l'hypothèse (3), elle est aussi vérifée puisque on ait dant le cas où $\varphi \equiv 1$. Il ne reste donc que l'hypothèse (4) à vérifier.

On note $r = \mathrm{d}(\partial A, \mathbb{Z}^n)$, par hypothèse $r > 0$. Et alors il est clair que pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$, $I_m \cap A \supset B(m, \frac{r}{2})$ où $B(m, \frac{r}{2})$ est la boule de $\mathbb{R}^n$ de centre m et de rayon $\frac{r}{2}$. On en déduit que pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ $\mathrm{Vol}(I_m \cap A) \geqslant (\frac{r}{2})^n$. □

4.1.3. *Démonstration du Théorème 1*

Pour la preuve, comme dans 4.1.2, il suffit de vérifier l'hypothèse (4) de la Proposition 1: Posons

$$A = A(Q, a) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | x_1 > a \text{ et } x_2 > Q(x_1)\},$$

où $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \mathbb{Z}$ et Q est une fonction continue algébrique et qui possède un développement en série de Puiseux à l'infini de la forme:

$$Q(t) = K_1 t^{d_1} + K_2 t^{d_2} + \cdots \quad \text{quand } t \to +\infty,$$

où $d_1 > d_2 > \cdots$ est une suite décroissante de rationels et $K_1 \neq 0$. Il s'ensuit qu'il existe $t_0 \geqslant a$ tel que la fonction $t \mapsto Q(t)$ est monotone sur $]t_0, +\infty[$ et on peut même supposer, sans restreindre la généralité du problème, qu'elle y est croissante (le cas décroissant se traîte de la même façon).

Soit maintenant $m = (m_1, m_2) \in A \cap \mathbb{Z}^2$ avec $m_1 > t_0 + \frac{1}{2}$. On rappelle que $I_m = [m_1 - \frac{1}{2}, m_1 + \frac{1}{2}] \times [m_2 - \frac{1}{2}, m_2 + \frac{1}{2}]$ et on pose $I_m^0 = [m_1 - \frac{1}{2}, m_1] \times [m_2, m_2 + \frac{1}{2}]$, on a alors $I_m^0 \subset I_m \cap A$. En effet, si $x = (x_1, x_2) \in I_m^0$ alors comme $m \in A$ on a: $x_2 \geqslant m_2 > Q(m_1)$. De plus on a $t_0 < x_1 \leqslant m_1$ comme Q est croissante sur l'intervalle $]t_0, +\infty[$ alors $Q(x_1) \leqslant Q(m_1)$. Donc $x_2 > Q(x_1)$ et par suite $x \in A \cap I_m$.

En conclusion on a, pour tout $m = (m_1, m_2) \in A \cap \mathbb{Z}^2$ avec $m_1 > t_0 + \frac{1}{2}$, $I_m^0 \subset A \cap I_m$. On en déduit que.

Pour tout $m = (m_1, m_2) \in A \cap \mathbb{Z}^2$ avec $m_1 > t_0 + \frac{1}{2}$ on a $\mathrm{Vol}(I_m \cap A) \geqslant \frac{1}{4}$. Maintenant si on pose $\ell_0 = 2 + \sup\{Q(t) | t \in [a, t_0 + 1]\}$, il est clair, que pour tout $m = (m_1, m_2) \in A \cap \mathbb{Z}^2$ vérifiant $m_2 > \ell_0$ et $m_1 \leqslant t_0 + \frac{1}{2}$ on a, $\mathrm{Vol}(I_m \cap A) = \mathrm{Vol}(I_m) = 1$ (car $I_m \cap A = I_m$).

De plus, l'ensemble $K = \{m \in A \cap \mathbb{Z}^2 | m_1 \leqslant t_0 + 1 \text{ et } m_2 \leqslant \ell_0 + 1\}$ est fini et pour tout $m \in K$ on a $\mathrm{Vol}(I_m \cap A) > 0$. Par suite, $c' = \inf \{\mathrm{Vol}(I_m \cap A) | m \in K\} > 0$. En conclusion si on pose $c = \inf(c', \frac{1}{4})$ alors, $c > 0$ et pour tout $m \in A \cap \mathbb{Z}^n$ on a $\mathrm{Vol}(I_m \cap A) \geqslant c$. Ce qui montre que les hypothèses de la Proposition 1 sont vérifiées. □

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

4.2. Formule sommatoire

Nous considérons dans cette partie un semi-algébrique ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ qui vérifie $\exists c, \gamma > 0$ tels que $\forall x \in \partial A$, $d(x, \mathbb{Z}^n) \geqslant c(1 + \|x\|)^{-\gamma}$. Nous considérons aussi $P \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ qui vérifie:

$$P(x) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|x\| \to +\infty, x \in A. \tag{1}$$

$$\delta = d(A, Z(P)) > 0. \tag{2}$$

On sait alors, d'après le Lemme 2, qu'il existe $\beta, k > 0$ tels que:

$$\forall x \in A \quad P(x) \geqslant k(1 + \|x\|)^{\beta}. \tag{$*$IV.2}$$

De plus, d'après le Lemme 4, le point (2) montre qu'il existe $R > 0$ tel que $\forall x \in A$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\partial^\alpha P(x)| \leqslant RP(x)$. On a alors $\forall x \in A$ et $\forall z \in \mathbb{C}^n$ vérifiant $\|z\| < \inf(1, \frac{1}{2R\mu^n})$ (où μ est le degré de P):

$$\begin{aligned}
|P(x+z) - P(x)| &= \left| \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant \mu \\ \alpha \neq 0}} \frac{\partial^\alpha P(x)}{\alpha!} z^\alpha \right| \\
&\leqslant \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant \mu \\ \alpha \neq 0}} |\partial^\alpha P(x)| \|z\| (\text{car } \alpha! \geqslant 1) \\
&\leqslant R\mu^n P(x) \|z\| \leqslant \tfrac{1}{2} P(x).
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Re} P(x+z) \geqslant P(x) - |P(x+z) - P(x)| \geqslant \tfrac{1}{2} P(x),$$

ce qui permet de voir facilement d'après ($*$IV.2) que: $\exists \varepsilon_0, \beta, c, c' > 0$ ne dépendant que de P et A, tels que sur l'ensemble:

$$\left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^n | x \in \overline{A} \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sh}^2(\pi y_j) < \varepsilon_0^2 \right\}$$

on a:

$$\operatorname{Re} P(z) = \operatorname{Re} P(x + iy) \geqslant c(1 + \|x\|)^\beta \geqslant c'(1 + \|z\|)^\beta \tag{$*$IV.3}$$

et ceci va nous permettre de justifier l'utilisation de la conséquence suivante de Bochner–Martinelli:

THÉORÈME ([1], p. 34, Corollaire 2.10). *Soit U un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Soit $f_1, \dots, f_n$ n fonctions holomorphes dans un voisinage de $\overline{U}$. On pose $f = (f_1, \dots, f_n)$ et $Z(U, f) = \{z \in U | f_1(z) = \dots = f_n(z) = 0\}$.*

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

Et soient $s_1, \ldots, s_n$ n fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de ∂U. On pose $s = (s_1, \ldots, s_n)$ et on suppose que

$$\forall z \in \partial U, \quad \langle s(z), f(z) \rangle = \sum_{i=1}^{n} s_i(z) f_i(z) \neq 0.$$

Alors, $Z(U, f)$ est discret dans U (donc un ensemble fini) et quelle que soit l'application $h: \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue, holomorphe sur U, on a

$$\sum_{\alpha \in Z(U,f)} h(\alpha) = \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \times \int_{\partial U} h(z) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k(z)\, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}f}{\langle s(z), f(z) \rangle^n} \qquad (\bullet)$$

où pour chaque $k \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{d}s_{[k]} = \mathrm{d}s_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\mathrm{d}s_k} \wedge \cdots \wedge ds_n$.

Ceci étant, on pose pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et $N \in \mathbb{N}^*$

$$U_{\varepsilon,N} = \left\{ x + iy \in \mathbb{C}^n \,|\, x \in A, \sum_{i=1}^{n} |x_i| < \sqrt{2}N \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) < \varepsilon^2 \right\}.$$

On a $U_{\varepsilon,N}$ est un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à frontière $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On pose pour $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ et $j \in \{1, \ldots, n\}$ et s fixé $\in \mathbb{C}$

$$h(z) = P^{-s}(z), \quad f_j(z) = \sin(\pi z_j) \quad \text{et} \quad s_j(z) = \sin(\pi \overline{z}_j).$$

On a d'après ($*$IV.3) et pour s fixé vérifiant $\sigma = \mathrm{Re}(s) \gg 0$: $h: \overline{U}_{\varepsilon,N} \to \mathbb{C}$ continue et holomorphe sur $U_{\varepsilon,N}$.

De plus. $\partial U_{\varepsilon,N} = F^1_{\varepsilon,N} \cup F^2_{\varepsilon,N} \cup F^3_{\varepsilon,N}$ où

$$F^1_{\varepsilon,N} = \left\{ x + iy \in \mathbb{C}^n \,|\, x \in \partial A, \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sqrt{2}N \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) \leqslant \varepsilon^2 \right\},$$

$$F^2_{\varepsilon,N} = \left\{ x + iy \in \mathbb{C}^n \,|\, x \in \overline{A}, \sum_{i=1}^{n} |x_i| = \sqrt{2}N \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) \leqslant \varepsilon^2 \right\}$$

et

$$F^3_{\varepsilon,N} = \left\{ x + iy \in \mathbb{C}^n \,|\, x \in \overline{A}, \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leqslant \sqrt{2}N \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) = \varepsilon^2 \right\}.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

Ces trois ensembles sont (à des ensembles de mesures nulles près) deux à deux disjoints. De plus, il est facile de voir que $\mathbb{Z}^n \cap \partial U_{\varepsilon,N} = \emptyset$. Or

$$\forall z = x + iy \in \partial U_{\varepsilon,N} \quad \langle s(z), f(z)\rangle = \sum_{i=1}^{n} |\sin(\pi z_j)|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi x_j) + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sh}^2(\pi y_j),$$

d'où $\langle s(z), f(z)\rangle = 0$ ssi $z \in \mathbb{Z}^n$, d'où $\forall z \in \partial U_{\varepsilon,N}$, $\langle s(z), f(z)\rangle \neq 0$.

De plus,

$$Z(U_{\varepsilon,N}, f) = \{z \in U_{\varepsilon,N} | f(z) = 0\} = \left\{ m \in \mathbb{Z}^n \cap A | \sum_{i=1}^{n} |m_i| < \sqrt{2}N \right\}.$$

Donc pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 0$ on a, d'après $(\bullet)$

$$\sum_{\substack{m \in A \cap \mathbb{Z}^n \\ \sum_{i=1}^{n} |m_i| < \sqrt{2}N}} P^{-s}(m)$$
$$= \frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}(n-1)!}{(2i\pi)^n} \int_{\partial U_{\varepsilon,N}} \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k(z)\, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}f}{\langle s(z), f(z)\rangle^n} \qquad (\bullet\bullet)$$
$$= \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \sum_{j=1}^{3} \int_{F^j_{\varepsilon,N}} P^{-s}(z) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k(z)\, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}f}{\langle s(z), f(z)\rangle^n}.$$

De plus on a le lemme suivant:

LEMME 5. *Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}^n$ on a:*

(1) *Si $z \in \cup_{j=1}^{3} F^j_{\varepsilon,N}$ alors:*

$$\langle s(z), f(z)\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi x_j) + \sum_{j=1}^{n} \operatorname{sh}^2(\pi y_j);$$

(2) *Si $z \in F^3_{\varepsilon,N}$ alors:*

$$\langle s(z), f(z)\rangle \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi y_j) = \varepsilon^2;$$

(3) *Si $z \in F^1_{\varepsilon,N}$ alors:*

$$\langle s(z), f(z)\rangle \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi x_j) \gg \mathrm{d}(x, \mathbb{Z}^n) \gg (1 + \|x\|)^{-\gamma};$$

(4) *Si* $z \in F^2_{\varepsilon,N}$ *alors:*

$$\langle s(z), f(z)\rangle \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi x_j) \gg \frac{1}{(1+\|x\|)^2}.$$

Démonstration. Les points (1), (2) et (3) sont clairs. Nous allons donc nous concentrer sur la démonstration du point (4).

On pose pour tout $t \in \mathbb{R} \quad \mathrm{d}(t) = \mathrm{d}(t, \mathbb{Z}) \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

On a alors, pour tout $z = x + iy \in F^2_{\varepsilon,N}$:

$$\langle s(z), f(z)\rangle \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi x_j) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |\sin(\pi x_j)|\right)^2.$$

Et comme la fonction $t \mapsto \sin(\pi t)$ sur $[0, \frac{1}{2}]$ est concave, il est clair que:

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad |\sin(\pi t)| = |\sin(\pi d(t))| \geqslant 2|\mathrm{d}(t)|.$$

On en déduit que, pour tout $z = x + iy \in F^2_{\varepsilon,N}$

$$\begin{aligned}\langle s(z), f(z)\rangle \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi x_j) &\geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |\sin(\pi x_j)|\right)^2 \\ &\geqslant \frac{4}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |d(x_j)|\right)^2.\end{aligned}$$

Or on sait que $\forall j = 1, \dots, n$, $\exists m_j \in \mathbb{Z}$ tel que $x_j = m_j + d(x_j)$. De plus $\forall j = 1, \dots, n$, $\exists \varepsilon_j \in \{-1, +1\}$ tel que $|x_j| = \varepsilon_j x_j$. Donc comme sur $F^2_{\varepsilon,N}$ on a $\sqrt{2}N = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$. On obtient

$$\begin{aligned}\sqrt{2}N &= \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j(m_j + \mathrm{d}(x_j)) = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j m_j + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j\, \mathrm{d}(x_j) \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} |d(x_j)| \geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j d(x_j)\right| = \left|\sqrt{2}N - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j m_j\right| \\ &\geqslant |\sqrt{2}N - a| \quad \text{où} \quad a = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j m_j \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

On pose $u = N(\sqrt{2}N - a)$. Si $a \leqslant 0$ ou $|u| \geqslant 1$, on a évidemment

$$|\sqrt{2}N - a| \geqslant \frac{1}{N}.$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

On suppose maintenant $a > 0$ et $|u| < 1$. On a alors

$$1 \leqslant a \leqslant \sqrt{2}N + |a - \sqrt{2}N| = \sqrt{2}N + \frac{|u|}{N} < \sqrt{2}N + \frac{1}{N} \leqslant 2\sqrt{2}N,$$

d'où

$$|u| = N|\sqrt{2}N - a| = N\frac{|2N^2 - a^2|}{\sqrt{2}N + a} \geqslant \frac{N|2N^2 - a^2|}{3\sqrt{2}N}$$
$$\Rightarrow |u| \geqslant \frac{1}{3\sqrt{2}}|2N^2 - a^2| \geqslant \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad (\text{car } 2N^2 - a^2 \in \mathbb{Z} \text{ et } \neq 0 \text{ car } \sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$$

d'où $|\sqrt{2}N - a| = \frac{|u|}{N} \geqslant \frac{1}{3\sqrt{2}N}$.

En conclusion, on a: $|\sqrt{2}N - a| \geqslant \frac{1}{3\sqrt{2}N}$, d'où, $\sum_{j=1}^{n} |d(x_j)| \geqslant \frac{1}{3\sqrt{2}N}$. Et par suite sur $F^2_{\varepsilon,N}$

$$\begin{aligned}\langle s(z), f(z)\rangle &\geqslant \frac{4}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} |d(x_j)|\right)^2 \geqslant \frac{2}{9nN^2}\\ &\gg \frac{1}{1 + \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right)^2} \geqslant \frac{1}{(1 + \|x\|)^2}.\end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration du Lemme 5.

En conclusion, *on a :* $\exists c = c(\varepsilon) > 0$, *tel que:*

$$\forall z \in \partial U_{\varepsilon,N} = F^1_{\varepsilon,N} \cup F^2_{\varepsilon,N} \cup F^3_{\varepsilon,N} \quad \langle s(z), f(z)\rangle \geqslant c(1 + \|z\|)^{-(\gamma+2)}.$$

Comme en plus pour $\sigma = \Re(s) \geqslant 0$ et $\forall z \in \partial U_{\varepsilon,N} \quad |P(z)^{-s}| \ll (1 + \|x\|)^{-\beta\sigma}$ pour un $\beta > 0$, on voit bien que pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) \gg 0$, si $N \to +\infty$ par valeur entière (●●) implique

$$\begin{aligned}Z(P, A; s) &= \sum_{m \in A \cap \mathbb{Z}^n} P^{-s}(m)\\ &= \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{U_\varepsilon} P^{-s}(z) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k(z)\, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}f}{\langle s(z), f(z)\rangle^n}\\ &\quad + \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \int_{L_\varepsilon} P^{-s}(z) \frac{\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} s_k(z)\, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}f}{\langle s(z), f(z)\rangle^n}.\end{aligned}$$

où

$$U_\varepsilon = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^n | x \in A \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) = \varepsilon^2 \right\}$$

et

$$L_\varepsilon = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^n | x \in \partial A \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) \leqslant \varepsilon^2 \right\}.$$

On pose:

$$K(z) = \frac{(n-1)!(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(2i\pi)^n} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} s_k(z)\, \mathrm{d}s_{[k]} \wedge \mathrm{d}f}{\langle s(z), f(z)\rangle^n}$$

D'où, d'après les définitions des s_j et des f_j, on vérifie facilement qu'il existe des polynômes universels H_k et H'_k $k = 1, \dots, n$ de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_{4n}]$ tels que si on pose, $\forall k \in \{1, \dots, n\}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}
\widetilde{H}_k(x,y) &= H_k(\cos(\pi x_1), \dots, \cos(\pi x_n), \sin(\pi x_1), \dots, \sin(\pi x_n), \\
&\qquad \mathrm{ch}(\pi y_1), \dots, \mathrm{ch}(\pi y_n), \\
&\qquad \mathrm{sh}(\pi y_1), \dots, \mathrm{sh}(\pi y_n)), \\
\widetilde{H}'_k(x,y) &= H'_k(\cos(\pi x_1), \dots, \cos(\pi x_n), \sin(\pi x_1), \dots, \sin(\pi x_n), \\
&\qquad \mathrm{ch}(\pi y_1), \dots, \mathrm{ch}(\pi y_n), \\
&\qquad \mathrm{sh}(\pi y_1), \dots, \mathrm{sh}(\pi y_n)),
\end{aligned}$$

on a:

- pour $z = x + iy \in U_\varepsilon$

$$K(z) = K_1(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{H}_k(x,y)\, \mathrm{d}x \wedge \left(\bigwedge_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n \mathrm{d}y_j \right)}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \varepsilon^2 \right]^n}$$

et

- pour $z = x + iy \in L_\varepsilon$

$$K(z) = K_2(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{H}'_k(x,y) \left(\bigwedge_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^n \mathrm{d}x_j \right) \wedge \mathrm{d}y}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j) \right]^n}$$

et avec ces notations on obtient alors la proposition suivante:

PROPOSITION 2 (Formule sommatoire). *Il existe* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(P,A) \in]0,1[$ *et* $\alpha = \alpha(P,A) > 0$ *tel que: pour* $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \alpha$ *on a uniformément en* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$*:*

$$Z(P,A;s) = Z_1(P,A;s) + Z_2(P,A;s) \tag{$\bullet\bullet\bullet$}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

où

$$Z_1(P, A; s) = \int_{U_\varepsilon} P^{-s}(z)K(z) = \int_{U_\varepsilon} P^{-s}(z)K_1(x, y)$$

et

$$Z_2(P, A; s) = \int_{L_\varepsilon} P^{-s}(z)K(z) = \int_{L_\varepsilon} P^{-s}(z)K_2(x, y)$$

avec

$$K_1(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{H}_k(x, y)\,\mathrm{d}x \wedge \left(\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \mathrm{d}y_j\right)}{\left[\sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi x_j) + \varepsilon^2\right]^n}$$

et

$$K_2(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\widetilde{H}'_k(x, y)\left(\bigwedge_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} \mathrm{d}x_j\right) \wedge \mathrm{d}y}{\left[\sum_{j=1}^{n} \sin^2(\pi x_j) + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{sh}^2(\pi y_j)\right]^n}.$$

Remarque. Dans la suite de ce travail, nous n'avons pas besoin des expressions explicites des $\widetilde{H}_k$ et $\widetilde{H}'_k$, mais il est évident qu'on peut les calculer facilement à partir des formules des pages précédentes. Il va de soi que ceci peut s'avérer utile si l'on veut rendre effectifs les résultats de ce papier.

5. Etude du prolongement méromorphe de $s \mapsto Z_1(P, A; s)$

Le but de cette partie est de démontrer le lemme suivant.

LEMME 6. *Soit A un semi-algébrique ouvert connexe qui vérifie: $\exists c$, $\beta > 0$ tel que: $\forall x \in \partial A$ $d(x, \mathbb{Z}^n) \geqslant c(1 + \|x\|)^{-\beta}$. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ qui vérifie:*

(1) $P(x) \to +\infty$ *quand* $\|x\| \to +\infty, x \in A$;
(2) $d(A, Z(P)) > 0$.

Alors: $\exists \varepsilon_0 = \varepsilon_0(P, A) \in]0, 1[$ fixé tel que $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$,

$$s \mapsto Z_1(P, A; s) = \int_{U_\varepsilon} P^{-s}(z)K(z),$$

possède un demi-plan de convergence et d'holomorphie. Nous noterons $\eta_0 = \eta_0(P, A)$ son abscisse de convergence (qui ne dépend pas de ε).

De plus, $s \mapsto Z_1(P, A; s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordre au plus n et contenus dans un ensemble de la forme: $\mathcal{S} = \eta_0 - \frac{1}{M}\mathbb{N}$ où $M = M(P, A) \in \mathbb{N}^*$. En outre il existe $D = D(P, A) > 0$ et $k = k(P, A) > 0$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

tel que $\forall\varepsilon' > 0$, $\forall N > 0$, $\forall\delta > 0$, *il existe* $C = C(N, \varepsilon', \delta, P, A) > 0$ *tel que le prolongement méromorphe* $\widetilde{Z}_1(P, A; s)$ *de* $Z_1(P, A; s)$ *vérifie*

$$|\widetilde{Z}_1(P, A; s)| \leqslant C\varepsilon^{-4(DN+2)n}(1 + |\tau|^{D(\eta_0-\sigma)+\varepsilon'})e^{k\varepsilon|\tau|}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ *vérifiant* $\sigma \geqslant \eta_0 - N$, $d(s, \mathcal{S}) \geqslant \delta$ *et uniformément en* $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$.

Démonstration. D'après la Proposition 2 (formule sommatoire), il est facile de voir qu'il suffit de montrer que

$$s \mapsto Z_1^*(P, A; s) = \int_{U_\varepsilon} P^{-s}(z) \frac{R(x)G(y)\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{n-1}}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \varepsilon^2\right]^n},$$

Vérifie les conclusions du Lemme 6 où

$$R(x) \text{ est un monôme en } (\cos(\pi x_1), \ldots, \cos(\pi x_n), \sin(\pi x_1), \ldots, \sin(\pi x_n))$$

et

$$G(y) \text{ est un monôme en } (\mathrm{ch}\,(\pi y_1), \ldots, \mathrm{ch}(\pi y_n), \mathrm{sh}(\pi y_1), \ldots, \mathrm{sh}(\pi y_n)).$$

Le Lemme 2 et les calculs qui ont précédé la Proposition 2 montrent qu'il existe $\varepsilon_0 = \varepsilon(P, A) > 0$, $c' = c'(P, A) > 0$ et $\beta' = \beta'(P, A) > 0$ tels que uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ on a, $\forall z \in U'_\varepsilon$ $|P^{-s}(z)| \leqslant c'(1 + \|z\|)^{-\beta'\Re(s)}$.

Ce qui permet de démontrer l'existence d'un demi-plan de convergence et d'holomorphie et d'une abscisse de convergence $\eta_0 = \eta_0(P, A)$.

Nous noterons μ le degré total de P et nous définissons $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in \mathbb{N}^n$ par $\alpha_1 = 0$ et $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q\} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \,|\, |\alpha| \leqslant \mu\}$ les α_j deux à deux distincts.

Soit $z = x + iy \in U_\varepsilon$. On a

$$P(x + iy) = \sum_{|\alpha| \leqslant \mu} \partial^\alpha P(x) \frac{(iy)^\alpha}{\alpha!} = \sum_{j=1}^q \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \partial^{\alpha_j} P(x) y^{\alpha_j}.$$

Or:

$$\left| \sum_{j=2}^q \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \partial^{\alpha_j} P(x) y^{\alpha_j} \right| \ll P(x)\|y\| \ll P(x)\varepsilon,$$

car d'après le Lemme 4, $\forall j$ $x \mapsto \frac{\partial^{\alpha_i} P(x)}{P(x)}$ borné sur A. Donc quitte à diminuer $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(P, A) \in]0, 1[$, on peut supposer que:

$$\forall z = x + iy \in U_\varepsilon \quad \left| \sum_{j=2}^q \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} \partial^{\alpha_j} P(x) y^{\alpha_j} \right| \leqslant \tfrac{1}{2} P(x),$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

ce qui permet de voir que $\forall s \in \mathbb{C}$, $\forall z = x + iy \in U_\varepsilon$

$$\begin{aligned} P(x+iy)^{-s} &= \left[P(x) + \sum_{j=2}^{q} \partial^{\alpha_j} P(x) \frac{i^{|\alpha_j|}}{\alpha_j!} y^{\alpha_j}\right]^{-s} \\ &= P(x)^{-s} \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \binom{-s}{u} (H(x))^u \tilde{y}^u, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} H(x) &= \left(1, \frac{\partial^{\alpha_2} P(x)}{P(x)}, \ldots, \frac{\partial^{\alpha_q} P(x)}{P(x)}\right), \\ \tilde{y} &= \left(1, \frac{i^{|\alpha_2|}}{\alpha_2!} y^{\alpha_2}, \ldots, \frac{i^{|\alpha_q|}}{\alpha_q!} y^{\alpha_q}\right), \\ \binom{-s}{u} &= \frac{-s(-s-1)\cdots(-s-|u|-1)}{u!} (\text{avec}\, u! = u_1! \cdots u_q!) \end{aligned}$$

et la convergence est uniforme sur tout compact en s. Donc pour $\sigma > \eta_0$

$$\begin{aligned} &Z_1^*(P, A; s) \\ &\quad = \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \binom{-s}{u} \int_{U_\varepsilon} P(x)^{-s} (H(x))^u \tilde{y}^u \frac{R(x) G(y)\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{n-1}}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \varepsilon^2\right]^n} \\ &\quad = \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \binom{-s}{u} G_u(\varepsilon) \int_A P^{-s}(x) (H(x))^u R(x) \frac{\mathrm{d}x}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \varepsilon^2\right]^n} \end{aligned}$$

où

$$G_u(\varepsilon) = \int_{\left\{\sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j) = \varepsilon^2\right\}} G(y) \tilde{y}^u\, \mathrm{d}y_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{n-1}.$$

En particulier on a:

$$|G_u(\varepsilon)| \ll \varepsilon^{|u|+n-1} \ll \varepsilon^{|u|},$$

uniformément en $u \in \mathbb{N}^q$ et $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$. Mais par définition de $R(x)$, et en utilisant la théorie de Fourier à plusieurs variables, on a: $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$\frac{R(x)}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \varepsilon^2\right]^n} = \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} C_h^n(\varepsilon)\, \mathrm{e}^{\pi i \langle h, x\rangle},$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

avec convergence uniforme sur $\mathbb{R}^n$, donc sur A et

$$\forall h \in \mathbb{Z}^n \quad C_h^n(\varepsilon) = \frac{1}{2^n} \int_{[-1,1]^n} \frac{R(x)\,\mathrm{e}^{-\pi i\langle h,x\rangle}\,\mathrm{d}x}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \varepsilon^2\right]^n}.$$

On obtient donc: uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ et pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \eta_0$

$$\begin{aligned} Z_1^*(P, A; s) &= \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\ u_1=0}} \binom{-s}{u} G_u(\varepsilon) C_h^n(\varepsilon) \int_A P^{-s}(x) H(x)^u\,\mathrm{e}^{\pi i\langle h,x\rangle}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\ u_1=0}} \binom{-s}{u} G_u(\varepsilon) C_h^n(\varepsilon) Y_P(A, h, u; s). \end{aligned}$$

Avec les notations de Section 3.2 (Théorème 5), on notera $\forall h \in \mathbb{Z}^n$, $\forall u \in \mathbb{N}^q$ $s \mapsto \widetilde{Y}_P(A, h, u; s)$ le prolongement méromorphe de $s \mapsto Y_P(A, h, u; s)$ qui existe d'après le Théorème 5.

Soit $N > 0$ fixé et $\delta > 0$ fixé aussi. D'après le Théorème 5, si $\mathcal{S} = \eta_0 - \frac{1}{M}\mathbb{N}$ est l'ensemble des candidats pôles commun aux $\widetilde{Y}_P$, on a: $\exists K > 1$ tel que $\forall \varepsilon' > 0$. On a: uniformément en $s = \sigma + i\tau$ vérifiant $\sigma > \eta_0 - N$ et $\mathrm{d}(s, \mathcal{S}) \geqslant \delta$

$$\begin{aligned} \widetilde{Y}_P(A, h, u; s) &\ll_{N,\varepsilon',\delta} (1 + |\tau|^{D'(\eta_0-\sigma)+\varepsilon'})(1 + \|h\|^{D'(\eta_0-\sigma)+\varepsilon'}) \times K^{|u|} \\ &\ll_{N,\varepsilon',\delta} (1 + |\tau|^{D'(\eta_0-\sigma)+\varepsilon'})(1 + \|h\|^{2D'N}) K^{|u|}. \end{aligned}$$

D'où pour $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma > \eta_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) > \delta$ on a

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\ u_1=0}} \left| \binom{-s}{u} G_u(\varepsilon) C_h^n(\varepsilon) \widetilde{Y}_P(A, h, u; s) \right| \\ &\ll_{N,\varepsilon',\delta} \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\ u_1=0}} \left| \binom{-s}{u} \right| |G_u(\varepsilon)| |C_h^n(\varepsilon)| (1 + \|h\|^{2D'N}) \\ &\qquad \times K^{|u|} (1 + |\tau|^{D'(\eta_0-\sigma)+\varepsilon'}). \end{aligned}$$

Or on sait que $|G_u(\varepsilon)| \ll \varepsilon^{|u|}$ et des intégrations par parties montrent que

$$C_h^n(\varepsilon) \ll_{n,N,\delta} \frac{\varepsilon^{-2n-4(D'N+1)n}}{\prod_{j=1}^n (1 + |h_j|)^{2D'N+2}}$$

d'où

$$\mathcal{R} \ll_{N,\varepsilon',\delta} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\ u_1=0}} \left| \binom{-s}{u} \right| K^{|u|} \varepsilon^{|u|-2n-4(D'N+1)n} \times (1 + |\tau|^{D'(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'})$$

$$\Rightarrow \mathcal{R} \ll_{N,\delta,\varepsilon'} \left(\sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q \\ u_1=0}} \left| \binom{-s}{u} \right| (K\varepsilon)^{|u|} \right) \varepsilon^{-4(D'N+2)n} (1+|\tau|^{D'(\sigma_0-\sigma)+\varepsilon'}).$$

Or

$$\begin{aligned} \left| \binom{-s}{u} \right| &\leqslant \frac{|s|(|s|+1)\dots(|s|+|u|-1)}{u!} \\ &\ll_N \frac{|\tau|(|\tau|+1)\dots(|\tau|+|u|-1)}{u!}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q \\ u_1=0}} \left| \binom{-s}{u} \right| (K\varepsilon)^{|u|} &\ll_N \sum_{u\in\mathbb{N}^q} \frac{|\tau|(|\tau|+1)\dots(|\tau|+|u|-1)}{u!} (K\varepsilon)^{|u|} \\ &\ll_N \sum_{u\in\mathbb{N}^q} \frac{|\tau|(|\tau|+1)\dots(|\tau|+|u|-1)}{u!} (K\varepsilon,\dots,K\varepsilon)^{u} \\ &= (1-K\varepsilon-\dots-K\varepsilon)^{-|\tau|} = (1-nK\varepsilon)^{-|\tau|}. \end{aligned}$$

Donc:

$$\mathcal{R} \ll_{N,\varepsilon',\delta} \varepsilon^{-4(D'N+2)n} (1-nK\varepsilon)^{-|\tau|} (1+|\tau|^{D'(\eta_0-\sigma)+\varepsilon'})$$

et quitte à diminuer $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(P,A) \in]0,1[$, il est facile de voir que nous pouvons supposer que $\forall \varepsilon \in]0,\varepsilon_0[\ (1-nK\varepsilon)^{-|\tau|} \leqslant \mathrm{e}^{2nK\varepsilon|\tau|}$. Donc

$$\mathcal{R} \ll_{N,\varepsilon',\delta} \varepsilon^{-4(D'N+2)n} (1+|\tau|^{D'(\eta_0-\sigma)+\varepsilon'})\, \mathrm{e}^{2nK\varepsilon|\tau|}.$$

Ceci permet de voir que

$$s \mapsto \widetilde{Z}_1^*(P,A;s) = \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} \sum_{u\in\mathbb{N}^q} \binom{-s}{u} G_u(\varepsilon) C_h^n(\varepsilon) \widetilde{Y}_P(A,h,u;s),$$

existe en tant que fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ à pôles dans $\mathcal{S}$ et qu'elle constitue le prolongement méromorphe de $Z_1^*(P,A;s)$ recherché. □

6. Démonstration du Théorème 4

Dans cette partie, A désigne un semi-algébrique ouvert qui vérifie $\mathrm{d}(\partial A, \mathbb{Z}^n) > 0$ $(*2)$ et $P \in \mathbb{R}[X_1,\dots,X_n]$ un polynôme qui vérifie:

- $P(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to +\infty$;
- $d(A \cap \mathbb{Z}^n, Z(P)) > 0$.

Alors, d'après le Lemme 1, on peut supposer que A est connexe et qu'il vérifie

$$\mathrm{d}(A, Z(P)) > 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{d}(\partial A, \mathbb{Z}^n) > 0. \tag{b$'$}$$

On pose alors: $\delta = \frac{1}{100} \inf(\mathrm{d}(A, Z(P)), \mathrm{d}(\partial A, \mathbb{Z}^n), 1) > 0$.

Soit $\sigma_0 = \sigma_0(P, A)$ l'abscisse de convergence de $s \mapsto Z(P, A; s)$ qui existe d'après le théorème 3. On a $\forall s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$

$$Z(P, A; s) = Z_1(P, A; s) + Z_2(P, A; s). \qquad \text{(Proposition 2)}$$

Dans le Lemme 6, nous avons traîté le cas de $s \mapsto Z_1(P, A; s)$ sous une hypothèse $(*1)$ plus générale que $(*2)$. Nous allons ici faire la même étude de $s \mapsto Z_2(P, A; s)$, mais cette fois-ci sous l'hypothèse $(*2)$ et bien sûr sous (a) et (b), donc sous (a) et (b$'$).

Mais comme dans le cas de $s \mapsto Z_1(P, A; s)$, pour étudier $s \mapsto Z_2(P, A; s)$, il suffit d'étudier $s \mapsto Z_2^*(P, A; s)$ où

$$\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0] \quad Z_2^*(P, A; s) = \int_{L_\varepsilon} P^{-s}(z) \frac{R'(x)G'(x)(\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n-1} \wedge \mathrm{d}y}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j)\right]^n},$$

et $R'(x)$ est un monôme en $(\cos(\pi x_1), \ldots, \cos(\pi x_n), \sin(\pi x_1), \ldots, \sin(\pi x_n))$ et $G'(y)$ est un monôme en $(\mathrm{ch}(\pi y_1), \ldots, \mathrm{ch}(\pi y_n), \mathrm{sh}(\pi y_1), \ldots, \mathrm{sh}(\pi y_n))$.

Mais pour tout $z = x + iy \in L_\varepsilon$ on a, $x \in \partial A$ et $\sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j) \leqslant \varepsilon^2$. Donc en utilisant les mêmes notations que dans Section 5, on obtient en développant $P^{-s}(z)$ de la même façon que dans la démonstration du Lemme 6

$$Z_2^*(P, A; s) = \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \binom{-s}{u} \int_{\partial A} P^{-s}(x) H(x)^u R'(x) T(x, u, \varepsilon)\, \mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n-1},$$

où

$$T(x, u, \varepsilon) = \int_{\{\sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j) \leqslant \varepsilon^2\}} \frac{\tilde{y}^u \, \mathrm{d}y}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j)\right]^n}.$$

Or la condition $\mathrm{d}(\partial A, \mathbb{Z}^n) \geqslant 2\delta > \delta > 0$ implique que, quitte à diminuer δ, on peut supposer que: $\forall x \in \partial A$ $\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) \geqslant \delta^2$ et quitte à diminuer $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(P, A) \in]0, 1[$, on peut supposer que $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}\delta$. On obtient donc que pour

$\sigma = \mathrm{Re}(s) \gg 0$ et $\forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[, \forall u \in \mathbb{N}^q$:

$$
\begin{aligned}
T(x,u,\varepsilon) &= \int_{\{\sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j) \leqslant \varepsilon^2\}} \frac{\tilde{y}^u \,\mathrm{d}y}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j) + \sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j)\right]^n} \\
&= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{\binom{-n}{\ell} G_{u,\ell}(\varepsilon)}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j)\right]^{n+\ell}},
\end{aligned}
$$

où

$$
G_{u,\ell}(\varepsilon) = \int_{\sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j) \leqslant \varepsilon^2} \tilde{y}^u \left(\sum_{j=1}^n \mathrm{sh}^2(\pi y_j)\right)^\ell \mathrm{d}y.
$$

En particulier on a: $G_{u,\ell}(\varepsilon) \ll \varepsilon^{|u|+2\ell+n}$ uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, $u \in \mathbb{N}$ et $\ell \in \mathbb{N}$.

On obtient donc pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) \gg 0$ et uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

$$
\begin{aligned}
Z_2^*(P,A;s) &= \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{-n}{\ell}\binom{-s}{u} G_{u,\ell}(\varepsilon) \\
&\quad \times \int_{\partial A} P^{-s}(x) \frac{H(x)^u R'(x)\,\mathrm{d}x_1 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x_{n-1}}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j)\right]^{n+\ell}}. \qquad (**2)
\end{aligned}
$$

On pose $V_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, \mathbb{Z}^n) > 2\delta\}$. C'est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et on a: $\partial A \subset V_\delta$ et $\overline{V}_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, \mathbb{Z}^n) \geqslant 2\delta\}$.

Comme $\mathcal{K} = \{x \in [-\frac{5}{8}, +\frac{5}{8}]^n | \|x\| \geqslant 2\delta\}$ est un compact inclu dans l'ouvert $W_\delta = \left\{x \in]-\frac{3}{4}, +\frac{3}{4}[^n | \|x\| > \delta\right\}$ alors il est clair, qu'il existe une fonction φ définie sur $\mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^\infty$, et qui vérifie

1. $\varphi \equiv 1$ sur $\mathcal{K}$;
2. $\forall x \in W_\delta \quad \varphi(x) \in [0,1]$;
3. $\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash W_\delta \quad \varphi = 0$

On définit maintenant la fonction $\tilde{\varphi}$ sur $\mathbb{R}^n$ par les deux relations suivantes

$$
\forall u \in [-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}[^n \quad \tilde{\varphi}(u) = \varphi(u); \qquad (1)
$$

$$
\forall m \in \mathbb{Z}^n, \forall u \in [-\tfrac{1}{2}, +\tfrac{1}{2}[^n \quad \tilde{\varphi}(m+u) = \varphi(u). \qquad (2)
$$

On pose enfin pour tout $\ell \in \mathbb{N}$:

$$
\forall x \in \mathbb{R}^n \backslash \mathbb{Z}^n \quad \phi_{n+\ell}(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j)\right]^{n+\ell}} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{Z}^n \quad \phi_{n+\ell}(x) = 0.
$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

On a alors le lemme suivant:

LEMME 7. *Les fonctions $\tilde{\varphi}$ et $\phi_{n+\ell}$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$ et elles vérifient*

1. $\tilde{\varphi} \equiv 0$ *sur* $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, \mathbb{Z}^n) \leqslant \delta\}$;
2. $\tilde{\varphi} \equiv 1$ *sur* $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, \mathbb{Z}^n) \geqslant 2\delta\}$;
3. $\phi_{n+\ell}$ *est* 1*-périodique par rapport à chaque variable et possède donc un développement en séries de Fourier de la forme:*
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \phi_{n+\ell}(x) = \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} \mathrm{d}_h^{n+\ell}\, \mathrm{e}^{2\pi i \langle h, x\rangle}$$
où
$$\mathrm{d}_h^{n+\ell} = \int_{[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n} \phi_{n+\ell}(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle h, x\rangle}\, \mathrm{d}x = \int_{[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n} \frac{\varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle h, x\rangle}\, \mathrm{d}x}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j)\right]^{n+\ell}}$$
vérifie pour tout $N \in \mathbb{N}$, tout $h \in \mathbb{Z}^n$ et uniformément en ℓ:
$$\mathrm{d}_h^{n+\ell} \ll_{n,N} \frac{\ell^{nN} \delta^{-2(n+\ell+nN)}}{\prod_{j=1}^n (1 + |h_j|)^N} \tag{**3}$$

Démonstration. Comme $\varphi \equiv 0$ sur $\{[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[^n | \|x\| \leqslant \delta\}$ et $\varphi \equiv 1$ sur $\{[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}[^n | \|x\| \geqslant 2\delta\}$ alors il est clair par périodicité que: $\tilde{\varphi} \equiv 0$ sur $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, \mathbb{Z}^n) \leqslant \delta\}$ et $\tilde{\varphi} \equiv 1$ sur $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, \mathbb{Z}^n) \geqslant 2\delta\}$ et par suite, $\tilde{\varphi}$ est localement constante au voisinage de tout point de la frontière de $[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n$. On en déduit donc facilement par périodicité que $\tilde{\varphi}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$. Et comme
$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n \quad \phi_{n+\ell}(x) = \frac{\tilde{\varphi}(x)}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j)\right]^{n+\ell}}$$
et que $\tilde{\varphi} \equiv 0$ sur $\{x \in \mathbb{R}^n | d(x, \mathbb{Z}^n) \leqslant \delta\}$, alors il est clair que $\phi_{n+\ell}$ est aussi $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Pour terminer la démonstration du lemme il nous reste donc à vérifier l'inégalité (**3):
Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $h \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$ il existe alors i_0 tel que.

$|h_{i_0}| = \sup\{|h_i| | i = 1, \ldots, n\} \geqslant 1$ et quitte à faire une permutation des coordonnées on peut évidement supposer que $i_0 = 1$, on a en particulier $|h_1| \geqslant 1$.

Ceci étant, si on note pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ et $x = (x_1, x')$ on a alors:
$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_h^{n+\ell} &= \int_{[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n} \frac{\varphi(x)\, \mathrm{e}^{-2\pi i \langle h, x\rangle}\, \mathrm{d}x}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j)\right]^{n+\ell}} \\
&= \int_{[-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^{n-1}} \left(\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{+1}{2}} \frac{\varphi(x_1, x')\, \mathrm{e}^{-2\pi i h_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j)\right]^{n+\ell}} \right) \mathrm{e}^{-2\pi i \langle h', x'\rangle}\, \mathrm{d}x'. \qquad (**4)
\end{aligned}$$

On pose maintenant:

$$\mathcal{G} = \left( ]\tfrac{3}{8}, \tfrac{5}{8}[\times (] - \tfrac{5}{8}, +\tfrac{5}{8}[)^{n-1} \right) \cup \left( ]\tfrac{-5}{8}, \tfrac{-3}{8}[\times (] - \tfrac{5}{8}, +\tfrac{5}{8}[)^{n-1} \right).$$

Alors pour tout $x \in \mathcal{G}$, $d(x, \mathbb{Z}^n) > 2\delta$ et par suite pour tout $x \in \mathcal{G}$ $\varphi(x) = 1$. On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $x' \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^{n-1}$

$$\frac{\partial^k \varphi(-\frac{1}{2}, x')}{\partial x_1^k} = \frac{\partial^k \varphi(+\frac{1}{2}, x')}{\partial x_1^k}.$$

Et ceci plus des intégration par parties évidentes montrent que pour tout $x' \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^{n-1}$ fixé pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe des polynômes $H_{j,j'}, R_{j,j'}$ $(j, j' \in \mathbb{N}$ vérifiant $j + j' \leqslant nN)$ les degrés des $R_{j,j'}$ n'excédant pas nN tel que,

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{+1}{2}} \frac{\varphi(x_1, x')\, \mathrm{e}^{-2\pi i h_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1}{\left[\sum_{j=1}^n \sin^2(\pi x_j)\right]^{n+\ell}} \\ &\quad = \sum_{\substack{j,j' \in \mathbb{N} \\ j+j' \leqslant nN}} \frac{H_{j,j'}(\ell)}{(2\pi i h_1)^{nN}} \\ &\qquad \times \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{\partial^j \varphi(x_1,x')}{\partial x_1{}^j}\, \mathrm{e}^{-2\pi i h_1 x_1} R_{j,j'}(\sin(2\pi x_1), \cos(2\pi x_1)) \mathrm{d}x_1}{\left[\sum_{t=1}^n \sin^2(\pi x_t)\right]^{n+\ell+j'}}. \end{aligned} \tag{$**5$}$$

Or il est clair, d'après ce qui précède que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $x = (x_1, x') \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n$ on a

$$\frac{\partial^j \varphi(x_1, x')}{\partial x_1^j} = 0 \quad \text{si} \quad \|x\| \leqslant \delta.$$

On en déduit que pour tout $j \in \mathbb{N}$ et pour tout $x = (x_1, x') \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]^n$ on a

$$\text{Si} \quad \frac{\partial^j \varphi(x_1, x')}{\partial x_1^j} \neq 0 \quad \text{alors} \quad \sum_{t=1}^n \sin^2(\pi x_t) \gg \mathrm{d}(x, \mathbb{Z}^n)^2 \gg \|x\|^2 \geqslant \delta^2.$$

Et ceci en plus de $(**5)$ implique que

$$\mathcal{M} = \left| \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{+1}{2}} \frac{\varphi(x_1, x') \mathrm{e}^{-2\pi i h_1 x_1}\, \mathrm{d}x_1}{\left[\sum_{t=1}^n \sin^2(\pi x_t)\right]^{n+\ell}} \right| \quad \text{vérifie:}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M} \ll &\sum_{\substack{j,j' \in \mathbb{N} \\ j+j' \leqslant nN}} \frac{|H_{j,j'}(\ell)|}{|h_1|^{nN}} \delta^{-2(n+\ell+j')} \\ &\times \int_{\frac{-1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^j \varphi(x_1, x')}{\partial x_1^j} \right| \left| R_{j,j'}(\sin(2\pi x_1), \cos(2\pi x_1)) \right| \, \mathrm{d}x_1 \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

$$\ll_{N,n} \frac{\ell^{nN}\delta^{-2(n+\ell+nN)}}{|h_1|^{nN}} \quad (\text{car } \deg(H_{j,j'}) \leqslant nN)$$

$$\ll_{N,n} \frac{\ell^{nN}\delta^{-2(n+\ell+nN)}}{\prod_{j=1}^{n}(1+|h_j|)^N}$$

(car on a supposé que $|h_1| = \sup\{|h_j|| j = 1, \ldots, n\}$).

Maintenant si on injecte cette dernière relation dans $(**4)$ on obtient:

$$\mathrm{d}_h^{n+\ell} \ll_{N,n} \frac{\ell^{nN}\delta^{-2(n+\ell+nN)}}{\prod_{j=1}^{n}(1+|h_j|)^N}.$$

Ce qui termine la démonstration du lemme.

Ceci étant revenons maintenant à notre formule $(**2)$. D'après ce qui précède on a: pour $\sigma = \Re(s) \gg 0$ et uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$,

$$Z_2^*(P, A; s) = \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\ u_1=0}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{-n}{\ell}\binom{-s}{u} G_{u,\ell}(\varepsilon) d_h^{n+\ell}$$
$$\times \int_{\partial A} P^{-s}(x)(H(x))^u R'(x)\, \mathrm{e}^{2\pi i\langle h,x\rangle}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

D'après la définition de $R'(x)$, il est clair qu'il existe des constantes $r \in \mathbb{N}^*$, $k^1, \ldots, k^r \in \mathbb{Z}^n$ et $c_1, \ldots, c_r \in \mathbb{C}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad R'(x) = \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu\, \mathrm{e}^{\pi i\langle k^\nu, x\rangle}.$$

On en déduit que, pour $\sigma = \Re(s) \gg 0$ et uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$,

$$Z_2^*(P, A; s)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\ u_1=0}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{-n}{\ell}\binom{-s}{u} G_{u,\ell}(\varepsilon)\, \mathrm{d}_h^{n+\ell} Y_P(\partial A, 2h+k^\nu, u; s),$$

où, avec les notations du Théorème 5, pour tout $h \in \mathbb{Z}^n$ et tout $u \in \mathbb{N}^q$:

$$Y_P(\partial A, h, u; s) = \int_{\partial A} P^{-s}(x)(H(x))^u\, \mathrm{e}^{\pi i\langle h,x\rangle}\,\mathrm{d}x_1\ldots\mathrm{d}x_{n-1}.$$

Nous noterons $\forall h \in \mathbb{Z}^n$, $\forall u \in \mathbb{N}^q$, $s \mapsto \widetilde{Y}_P(\partial A, h, u; s)$ le prolongement méromorphe de $s \mapsto Y_P(\partial A, h, u; s)$ donné par le Théorème 5 et $\mathcal{S}' = \eta_0{}' - \frac{1}{M'}\mathbb{N}$ l'ensemble des candidats-pôles commun de ces prolongements.

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

Quitte à diminuer ε_0, on peut supposer que $0 < \varepsilon_0 < \frac{1}{2}\delta$.

Soient $N > 0, \varepsilon' > 0$ et $\mu > 0$. On a alors, d'après le Théorème 5: uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geqslant {\eta_0}' - N$ et $\mathrm{d}(s, \mathcal{S}') \geqslant \mu$:

$$\widetilde{Y}_P(\partial A, h, u; s) \ll_{N,\mu} (1 + |\tau|^{D''({\eta_0}' - \sigma) + \varepsilon'})(1 + \|h\|^{D''({\eta_0}' - \sigma) + \varepsilon'})K^{|u|},$$

où $D'' = D''(P, A) > 0$ et $K = K(P, A) \geqslant 1$ sont deux constantes qui ne dépendent que de P et A.

Ceci étant, soit maintenant $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mu > 0$ alors en utilisant en plus de ce qui précéde la relation suivante facile à vérifier:

$$\forall u \in \mathbb{N}^q \quad \text{et} \quad \forall \ell \in \mathbb{N} \quad G_{u,\ell}(\varepsilon) \ll \varepsilon^{|u| + 2\ell + n}$$

et la relation $(**3)$, que nous avons déjà etablie (Lemme 7):

$$d_h^{n+\ell} \ll_{n,N} \frac{\delta^{-2n-2\ell-2nM}\ell^{nM}}{\prod_{j=1}^{n}(1 + |h_j|)^M},$$

avec $M = 2[D'']N + 2N + 2$.

On obtient uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geqslant {\eta_0}' - N$ et $d(s, \mathcal{S}') \geqslant \mu$ et uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}' &\overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{r} |c_\nu| \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left| \binom{-n}{\ell} \binom{-s}{u} \right| \\
&\qquad \times G_{u,\ell}(\varepsilon)\, \mathrm{d}_h^{n+\ell} \left| \widetilde{Y}_P(\partial A, 2h + k^\nu, u; s) \right| \\
&\ll_{N,\mu} \sum_{\nu=1}^{r} |c_\nu| \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left| \binom{-n}{\ell} \right| \left| \binom{-s}{u} \right| \\
&\qquad \times \varepsilon^{|u|+n+2\ell} |d_h^{n+\ell}| (1 + \|2h + k^\nu\|^{2D''N}) K^{|u|} \\
&\qquad \times (1 + |\tau|^{2D''N}) \\
&\ll_{N,\mu} \sum_{h \in \mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left| \binom{-n}{\ell} \right| \left| \binom{-s}{u} \right| \\
&\qquad \times \varepsilon^{|u|+n+2\ell} |d_h^{n+\ell}| (1 + \|h\|^{2D''N}) K^{|u|} \\
&\qquad \times (1 + |\tau|^{2D''N}) \\
&\ll_{N,\mu} \sum_{\substack{u \in \mathbb{N}^q \\ u_1 = 0}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \left| \binom{-n}{\ell} \right| \left| \binom{-s}{u} \right|
\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

$$\times\varepsilon^{|u|+2\ell}\delta^{-2(n+\ell)-2nM}\ell^{nM}(1+|\tau|^{2D''N})K^{|u|}$$

$$\ll_{N,\mu}\ \delta^{-2n-2nM}\sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\u_1=0}}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left|\binom{-s}{u}\right|\left|\binom{-n}{\ell}\right|$$

$$\times\varepsilon^{|u|+2\ell}K^{|u|}\delta^{-2\ell}\ell^{nM}(1+|\tau|^{2D''N})$$

$$\ll_{N,\mu}\ \delta^{-2n-2M}\left(\sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\u_1=0}}\left|\binom{-s}{u}\right|(K\varepsilon)^{|u|}\right)$$

$$\times\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left|\binom{-n}{\ell}\right|\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{2\ell}\ell^{nM}\right)(1+|\tau|^{2D''N}).$$

Quitte à diminuer ε_0' on peut supposer que $0<\varepsilon_0'<\inf\left(\frac{1}{2nK},\frac{1}{2\delta}\right)$, on a alors $\forall\varepsilon\in\,]0,\varepsilon_0'[$:

$$\sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\u_1=0}}\left|\binom{-s}{u}\right|(K\varepsilon)^{|u|}\ =\ (1-nK\varepsilon)^{-|s|}\ll_N(1-nK\varepsilon)^{-|\tau|}\ll_N\ \mathrm{e}^{2nK\varepsilon|\tau|}$$

$$(\text{car}\,0<nK\varepsilon<\tfrac{1}{2})$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left|\binom{-n}{\ell}\right|\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{2\ell}\ell^{nM} &\leqslant \sum_{\ell=0}^{+\infty}\left|\binom{-n}{\ell}\right|\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^{2\ell}\left(\prod_{j=1}^{nM}\ell+j\right)\\ &= \frac{\mathrm{d}^{nM+1}}{\mathrm{d}t^{nM+1}}\left(\sum_{\ell=0}^{+\infty}\left|\binom{-n}{\ell}\right|t^{\ell}\right)\Bigg|_{t=\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}}\\ &= \frac{\mathrm{d}^{nM+1}}{\mathrm{d}t^{nM+1}}(1-t)^{-n}\Bigg|_{t=\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}}\\ &= \left(\prod_{j=0}^{nM}(n+j)\right)(1-t)^{-n-nM-1}\Bigg|_{t=\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}}\\ &= \left(\prod_{j=0}^{nM}(n+j)\right)\left(1-\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)^2\right)^{-n-nM-1}\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

$$\ll_{n,N} 1 \left(\text{car } 0 < \frac{\varepsilon}{\delta} < \frac{1}{2}\right).$$

Donc:

$$\mathcal{R}' \ll_{N,\mu} (1 + |\tau|^{2D''N})\, \mathrm{e}^{2nK\varepsilon|\tau|},$$

ce qui permet de voir que

$$s \mapsto \widetilde{Z}_2^*(P, A; s)$$
$$= \sum_{\nu=1}^{r} c_\nu \sum_{h\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{u\in\mathbb{N}^q\\ u_1=0}} \sum_{\ell=0}^{+\infty} \binom{-n}{\ell}\binom{-s}{u} G_{u,\ell}(\varepsilon) d_h^{n+\ell} \widetilde{Y}_P(\partial A, 2h + k^\nu, u; s),$$

est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ à pôles d'ordre au plus n et contenus dans $\mathcal{S} = \eta_0{}' - \frac{1}{M'}\mathbb{N}$, qu'elle prolonge méromorphiquement $s \mapsto Z_2^*(P, A; s)$ et qu'on a: $\forall N > 0$, $\forall \mu > 0$, et uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0'[$ et en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geqslant \eta_0{}' - N$ et $d(s, \mathcal{S}') \geqslant \mu$:

$$\widetilde{Z}_2^*(P, A; s) \ll_{N,\mu} (1 + |\tau|^{2D''N})\, \mathrm{e}^{2nK\varepsilon|\tau|}.$$

En conclusion, d'après ce qui précède et l'étude déjà faite du terme $Z_1(P, A; s)$ (Lemme 6), on obtient que: $s \mapsto Z(P, A; s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ noté $s \mapsto \widetilde{Z}(P, A; s)$ dont les pôles sont d'ordre au plus n, contenus dans un ensemble de la forme $\mathcal{S} = \sigma_0 - \frac{1}{M}\mathbb{N}$ où $\sigma_0 = \sigma_0(P, A)$ est l'abscisse de convergence de $s \mapsto Z(P, A; s)$ et $M = M(P, A) \in \mathbb{N}^*$.

De plus, il existe des constantes $B, k \geqslant 1$, $B' \in \mathbb{R}_+$ ne dépendant que de P et A tels que: $\forall N > 0$, $\forall \mu > 0$, on a uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$ et en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geqslant \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geqslant \mu$:

$$\widetilde{Z}(P, A; s) \ll_{N,\mu} (1 + |\tau|^{BN+B'})\, \mathrm{e}^{k\varepsilon|\tau|} \varepsilon^{-BN}.$$

Maintenant vu l'uniformité en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0{}'[$, on peut choisir dans la relation précédente $\varepsilon = \frac{1}{\frac{2}{\varepsilon_0} + (1+|\tau|)} \in]0, \varepsilon_0'[$. On obtient alors, $\widetilde{Z}(P, A; s) \ll_{N,\mu} (1 + |\tau|^{BN+B'})$ et ceci $\forall N$ tel que $\sigma \geqslant \sigma_0 - N$, donc pour $N = [\sigma_0 - \sigma] + 1$, on obtient $\widetilde{Z}(P, A; s) \ll_{N,\mu} (1 + |\tau|^{-B\sigma + B''})$ où $B = B(P, A) > 0$ et $B'' = B''(P, A) \in \mathbb{R}_+$.

La même méthode que celle que nous avons utilisée dans ([3], p. 478) (utilisation d'une conséquence de théorème classique de Phragmen–Lindelöf) montre alors que: $\forall N > 0, \forall \varepsilon', \mu > 0$ et uniformément en $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$ vérifiant $\sigma \geqslant \sigma_0 - N$ et $d(s, \mathcal{S}) \geqslant \mu'$:

$$\widetilde{Z}(P, A; s) \ll_{N,\varepsilon',\mu} (1 + |\tau|^{B(\sigma_0 - \sigma) + \varepsilon'}).$$

Pour terminer la démonstration du Théorème 4, il nous reste à prouver que l'abscisse de convergence σ_0 est un pôle, mais ceci est une conséquence d'un

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

résultat classique de Landau (voir par exemple [10], p. 125) sur les séries de Dirichlets à coefficients positifs. Ce qui termine la démonstration du Théorème 4.

7. Démonstration des Théorèmes 2, 2 bis et des Corollaires 1 et 1 bis

7.1. Quelques lemmes

LEMME 8. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{Z}$ fixés. Soit $t \mapsto Q(t)$ une fonction continue semi-algébrique possédant un développement en série de Puiseux en $+\infty$ de degré $d \in \mathbb{Q}$ et on suppose que $d > 0$ et $\forall m \in \mathbb{Z}, m \geqslant b$, on a: $Q(m) \notin \mathbb{Z}$.*

On pose alors

$$\xi(Q,\alpha;s) = \sum_{m=b}^{+\infty} \sum_{n>Q(m)} \frac{1}{m^{\alpha s} n^s} \quad (s \in \mathbb{C}).$$

Alors il existe $\mu > 0$ tel que $s \mapsto \xi(Q,\alpha;s)$ converge absolument et est holomorphe dans le demi-plan $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \mu\}$. Nous noterons $\sigma_0' = \sigma_0'(\alpha,d)$ l'abscisse de convergence de cette série. On a alors $\sigma_0' = \sup\left(1, \frac{1+d}{\alpha+d}\right)$ et σ_0' est un pôle d'ordre 1 ou 2 (1 si $\alpha \neq 1$ et 2 si $\alpha = 1$). En outre, il existe $\beta = \beta(\alpha,d) > 0$ tel que $s \mapsto \xi(Q,\alpha;s)$ se prolonge méromorphiquement au demi-plan $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \sigma_0' - \beta\}$ avec σ_0' comme seul pôle dans ce demi-plan. En plus, il existe $D = D(\alpha,d) > 0$ tel que le prolongement méromorphe $\tilde{\xi}(Q,\alpha;s)$ de $\xi(Q,\alpha;s)$ vérifie: $\forall \varepsilon', \delta > 0$

$$\tilde{\xi}(Q,\alpha;s) \ll_{\alpha,\varepsilon',\delta,Q} 1 + |\tau|^{D(\sigma_0'-\sigma)+\varepsilon}$$

uniformément en $s = \sigma + i\tau$ vérifiant $\sigma > {\sigma'}_0 - \beta$ et $|s - \sigma_0'| \geqslant \delta$.

LEMME 9. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et $b \in \mathbb{Z}$ et $t \mapsto Q(t) = \sum_{j=0}^d a_j t^j + o(1)$ quand $t \to +\infty$ où $d \in \mathbb{N}^*$ et $\forall j = 1, \ldots, d-1$, $a_j \in \mathbb{Z}, a_d \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$. Alors*

$$s \mapsto \xi(Q,\alpha;s) = \sum_{m=b}^{+\infty} \sum_{n>Q(m)} \frac{1}{m^{\alpha s} n^s} \quad (s \in \mathbb{C})$$

possède un demi-plan de convergence et d'holomorphie $\{s \in \mathbb{C} | \mathrm{Re}(s) > \mu\}$. On note σ_0' son abscisse de convergence. On a $\sigma_0' = \sup(1, \frac{1+d}{\alpha+d})$ et σ_0' est un pôle d'ordre 1 ou 2 (1 si $\alpha \neq 1$ et 2 si $\alpha = 1$). En outre $s \mapsto \xi(Q,\alpha;s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordre au plus 2 et contenus dans un ensemble de la forme $\mathcal{S} = \sigma_0' - \frac{1}{M}\mathbb{N}$ où $M = M(\alpha,Q) \in \mathbb{N}^*$. En plus, il existe $D = D(\alpha,Q) > 0$ tel que le prolongement méromorphe $\tilde{\xi}(Q,\alpha;s)$ de $\xi(Q,\alpha;s)$ vérifie: $\forall \varepsilon', \delta > 0$ et $\forall N > 0$

$$\tilde{\xi}(Q,\alpha;s) \ll_{\alpha,\varepsilon',\delta,Q,N} 1 + |\tau|^{D(\sigma_0'-\sigma)+\varepsilon'}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

uniformément en $s=\sigma+i\tau\in\mathbb{C}$ *vérifiant* $\sigma>\sigma_0-N$ *et* $d(s,\mathcal{S})\geqslant\delta$.

LEMME 10. *Soient* $P\in\mathbb{R}[X_1,X_2]$ *et* Q *une fonction continue semi-algébrique et possédant un développement en série de Puiseux au voisinage de l'infini de degré* $d\in\mathbb{Q}_+^*$. *On pose* $P(x)=\sum_{\alpha\in\,\mathrm{supp}(P)}a_\alpha x^\alpha$ *et* $P^*(x)=\sum_{\alpha\in\mathcal{E}(P)}x^\alpha$ *(voir Notations). Et on suppose que:*

- $P(x)\to+\infty$ *quand* $\|x\|\to+\infty$, $x\in A(Q,a)$
  où $A(Q,a)=\{x\in\mathbb{R}^2|x_1>a$ et $x_2>Q(x_1)\}$.
- P non dégénéré sur $S=\{(x_1,Q(x_1))|x_1>a\}$.

On pose $\mu=\sup\{\alpha_1+d\alpha_2|\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)\in\mathrm{supp}\,(P)\}$ *et* $\beta=(\mu-d,1)$. *Et soit* $L=\sum_{\substack{\alpha\in\,\mathrm{supp}\,(P)\\ \alpha_1+d\alpha_2=\mu}}a_\alpha K^{\alpha_2-1}$ *où* K *est le coefficient dominant de* Q (i.e. $Q(t)\sim Kt^d$ *quand* $t\to+\infty$).

Alors $L>0$ *et il existe* $\delta>0$ *et* $\lambda=\lambda(P,A,\delta)>0$ *tel que si on pose* $S_\delta=\{z=x+iy\in\mathbb{C}^2|x\in S$ *et* $\|y\|<\delta\}\subset\mathbb{C}^2$, *alors* $\forall N\in\mathbb{N}^*$ *et* $\forall s\in\mathbb{C}$

$$P(z)^{-s}=L^{-s}\sum_{\ell=0}^{N-1}\binom{-s}{\ell}z^{-(s+\ell)\beta}H(z)^\ell+O_{\delta,P,A,N}((|s|+1)^N|z|^{-\lambda N})$$

quand $|z|\to+\infty$, $z\in S_\delta$ *où* $H\in\mathbb{C}\,[z_1,z_2]$ *ne dépend que de* P *et* Q.

Démonstration du Lemme 8. On écrit pour $\Re(s)\gg 0$:

$$\xi(Q,\alpha;s)=\sum_{m=b}^{+\infty}\sum_{n>Q(m)}\frac{1}{m^{\alpha s}}\frac{1}{n^s}=\sum_{m>b-1}\sum_{n>[Q(m)]}\frac{1}{m^{\alpha s}}\frac{1}{n^s}.\quad(***1)$$

Ensuite par la formule d'Euler–Maclaurin (voir par exemple [10], p. 5–6), on obtient pour $\sigma=\Re(s)\gg 0$

$$\begin{aligned}\sum_{n>[Q(m)]}\frac{1}{n^s}&=\int_{[Q(m)]}^{+\infty}t^{-s}\,\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\frac{1}{[Q(m)]^s}-s\int_{[Q(m)]}^{+\infty}B_1(t)t^{-s-1}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{s-1}\frac{1}{[Q(m)]^{s-1}}-\frac{1}{2}\frac{1}{[Q(m)]^s}+O\left((1+|s|)\frac{1}{Q(m)^{\sigma+1}}\right),\end{aligned}$$

mais $d=\deg Q\in\mathbb{Q}_+^*$, donc il existe $\delta\in\,]0,d[$ tel que $Q(m)=Km^d+O(m^{d-\delta})$ où $K>0$ le coefficient dominant de Q.

Donc $[Q(m)]=Q(m)+O(1)=Km^d+O(m^{d-\delta})$, et par suite $\forall\lambda\in\mathbb{C}$

$$\begin{aligned}[][Q(m)]^{-\lambda}&=K^{-\lambda}m^{-d\lambda}[1+O(m^{-\delta})]^{-\lambda}\\&=K^{-\lambda}m^{-d\lambda}+O((|\lambda|+1)K^{-\Re(\lambda)}m^{-d\Re(\lambda)-\delta}).\end{aligned}$$

En utilisant cette formule pour $\lambda = -s-1$ et pour $\lambda = -s$, il est clair qu'il existe $\delta \in]0, \lambda[$ tel que pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) \gg 0$

$$\sum_{n>[Q(m)]} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{s-1}\frac{1}{K^{s-1}} m^{-d(s-1)} + O\left((|s|+1)A^{-\sigma}\frac{1}{m^{d(\sigma-1)+\delta}}\right),$$

et en injectant ceci dans $(***1)$, on obtient le résultat. Quant aux majorations du prolongement méromorphe elles découlent de celles classiques de la fonction zêta de Riemann. $\square$

Démonstration du Lemme 9. Dans ce cas on a $Q(m) = a_d m^d + \cdots + a_1 m + a_0 + o(1)$, $d \in \mathbb{N}^*$, $a_d \in \mathbb{N}^*$, $a_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ et $\forall j = 1, \ldots, d-1$ $a_j \in \mathbb{Z}$. On pose

$$H(X) = \sum_{j=1}^{d} a_j X^d + [a_0] \in \mathbb{Z}[X].$$

Alors: Il existe $m_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $m_0 > b$ et:

$$\forall m \in \mathbb{N} \text{ vérifiant } m > m_0 \quad [Q(m)] = H(m). \tag{$***2$}$$

Maintenant pour $N \in \mathbb{N}^*$ fixé, si on utilise la formule d'Euler–Maclaurin, déjà cité ci-dessus, à l'ordre N, on obtient pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) \gg 0$ et $m > m_0$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n>[Q(m)]} \frac{1}{n^s} \\
&\quad = \int_{[Q(m)]}^{+\infty} t^{-s}\,\mathrm{d}t + \sum_{r=0}^{N-1} \frac{B_{r+1}}{(r+1)!}\frac{s(s+1)\cdots(s+r-1)}{[Q(m)]^{s+r}} + O_N\left(\frac{(|s|+1)^N}{[Q(m)]^{\sigma+N}}\right) \\
&\quad = \frac{1}{s-1}\frac{1}{H(m)^{s-1}} + \sum_{r=0}^{N-1} \frac{B_{r+1}}{(r+1)!}\frac{s(s+1)\cdots(s+r-1)}{H(m)^{s+r}} + O_N\left(\frac{(|s|+1)^N}{m^{d(\sigma+N)}}\right)
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\xi(Q,\alpha;s) \;=\; &\sum_{m=b}^{m_0} \sum_{n>Q(m)} \frac{1}{m^{\alpha s} n^s} + \sum_{m=m_0+1}^{+\infty} \frac{1}{s-1}\frac{1}{m^{\alpha s} H(m)^{s-1}} \\
&+ \sum_{r=0}^{N-1} \frac{B_{r+1}}{(r+1)!} s(s+1)\cdots(s+r-1) \sum_{m=m_0+1}^{+\infty} \frac{1}{m^{\alpha s} H(m)^{s+r}} \\
&+ O_N\left((|s|+1)^N \zeta\left((\alpha+d)\sigma + dN\right)\right)
\end{aligned}$$

et ceci en plus du fait que H est un polynôme permet de se ramener aux propriétés de la fonction zêta de Riemann. Ce qui permet d'obtenir le résultat.

Démonstration du Lemme 10. Il est facile de voir que comme $S = \{(x_1, Q(x_1)) | x_1 > a\}$ et que $Q(x_1) = Kx_1^d + O(x_1^{d-\gamma})$ pour un $\gamma \in]0, d[$, alors il existe $\delta > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que si on pose $S_\delta = \{z \in \mathbb{C}^2 | x \in S \text{ et } \|y\| < \delta\}$, on a:

$$\forall z = x + iy \in S_\delta \quad \text{et} \quad \forall \alpha \in \mathbb{Q}_+^2$$

$$z^\alpha = K^{\alpha_2} x_1^{\alpha_1 + d\alpha_2} + O(x_1^{\alpha_1 + d\alpha_2 - \varepsilon}). \tag{$***3$}$$

On pose

$$B = \sum_{\substack{\alpha \in \operatorname{supp}(P) \\ \alpha_1 + d\alpha_2 = \mu}} a_\alpha K^{\alpha_2},$$

où $\mu = \sup\{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 | \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \operatorname{supp}(P)\}$.

On a alors $B \neq 0$. En effet si $B = 0$, alors $(***3)$ impliquerait que $P(x) = \sum_{\alpha \in \operatorname{supp}(P)} a_\alpha x^\alpha \ll x_1^{\mu - \varepsilon}$ sur S.

Or $P^*(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{E}(P)} x^\alpha \asymp x_1^{\mu'}$ sur S où $\mu' = \sup\{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 | \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathcal{E}(P)\}$. Et par hypothèse on a $P(x) \asymp P^*(x)$ sur S. Donc

$$\mu' \leqslant \mu - \varepsilon \text{ pour un } \varepsilon > 0. \tag{$***4$}$$

Mais un résultat standard de la théorie d'optimisation des fonctions linéaires sur des polyèdres implique que $\mu = \mu'$. D'où la contradiction.

On en déduit donc que $B \neq 0$ et comme on a $P(x) \asymp Bx_1^\mu$ quand $x_1 \to +\infty$, $x \in S$, alors $B > 0$. Et par suite $L = K^{-1}B > 0$.

Ceci étant, on a, pour $z \in S_\delta$:

$$\begin{aligned} P(z) &= \sum_{\alpha \in \operatorname{supp}(P)} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 = \mu} a_\alpha z^\alpha + \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 < \mu} a_\alpha z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 = \mu} (a_\alpha K^{\alpha_2}) K^{-\alpha_2} z^\alpha + \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 < \mu} a_\alpha z^\alpha \\ &= \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 = \mu} (a_\alpha K^{\alpha_2}) K^{-1} z^\beta + \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 = \mu} (a_\alpha K^{\alpha_2}) [K^{-\alpha_2} z^\alpha - K^{-1} z^\beta] \\ &\quad + \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 < \mu} a_\alpha z^\alpha \quad \text{où} \quad \beta = (\mu - d, 1) \in \mathbb{Q}_+^2 \\ &= L z^\beta + \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 = \mu} (a_\alpha K^{\alpha_2}) [K^{-\alpha_2} z^\alpha - K^{-1} z^\beta] + \sum_{\alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 < \mu} a_\alpha z^\alpha. \end{aligned}$$

Or d'après $(***3)$, il existe $\lambda > 0$ tel que sur S_δ

$$\begin{cases} \dfrac{1}{z^\beta} [K^{-\alpha_2} z^\alpha - K^{-1} z^\beta] \ll |z|^{-\lambda}, & \text{si } \alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 = \mu \\ \dfrac{z^\alpha}{z^\beta} \ll |z|^{-\lambda}, & \text{si } \alpha_1 + \mathrm{d}\alpha_2 < \mu. \end{cases}$$

En conclusion, il existe $R \in \mathbb{R}[X_1, X_2]$ tel que

$$P(z) = Lz^{\beta} + R(z) \quad \text{avec} \quad \frac{R(z)}{z^{\beta}} \ll |z|^{-\lambda} \quad \text{sur} \quad S_{\delta},$$

et il suffit d'écrire $P(z)^{-s} = L^{-s}z^{-s\beta}[1 + \frac{R(z)}{z^{\beta}}]^{-s}$ et d'utiliser la formule de Taylor pour conclure.

7.2. Démonstration des Théorèmes 2 et 2 bis

D'après la Proposition 2, on a pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) \gg 0$ et uniformément en $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$:

$$Z(P, A; s) = Z_1(P, A; s) + Z_2(P, A; s),$$

où

$$Z_1(P, A; s) = \int_{U_{\varepsilon}} P^{-s}(z)K(z) \quad \text{et} \quad Z_2(P, A; s) = \int_{L_{\varepsilon}} P^{-s}(z)K(z).$$

Le Lemme 6 permet de voir que $s \mapsto Z_1(P, A; s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbb{C}$ vérifiant les conclusions du Théorème 2 bis (donc du Théorème 2 aussi). Il reste donc à étudier $s \mapsto Z_2(P, A; s)$.

Or:

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon} &= \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^2 | x \in \partial A \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{2} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) < \varepsilon^2 \right\} \\ &= L_{\varepsilon}^1 \cup L_{\varepsilon}^2 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon}^1 = \Bigg\{ & z = x + iy \in \mathbb{C}^2 | x \in \mathbb{R}^2, x_1 = a, x_2 \geqslant Q(x_1) \quad \text{et} \\ & \sum_{j=1}^{2} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) < \varepsilon^2 \Bigg\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon}^2 &= \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^2 | x_1 > a, x_2 = Q(x_1) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{2} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) < \varepsilon^2 \right\} \\ &= \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}^2 | x \in S \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{2} \mathrm{sh}^2(\pi y_j) < \varepsilon^2 \right\} \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

où

$$S = \{(x_1, Q(x_1)) | x_1 > a\}.$$

Et comme $d(L_\varepsilon^1, \mathbb{Z}^2) > 0$ (car $a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$), alors $s \mapsto Z_2^1(P, A; s) = \int_{L_\varepsilon^1} P^{-s}(z) K(z)$ se traîte de la même faon que $s \mapsto Z_1(P, A; s)$ et vérifie la conclusion du Théorème 2 bis (donc du Théorème 2 aussi). De plus on a pour $\sigma = \mathrm{Re}(s) \gg 0$

$$Z(P, A; s) = Z_1(P, A; s) + Z_2^1(P, A; s) + Z_2^2(P, A; s) \qquad (****)$$

où

$$Z_2^2(P, A; s) = \int_{L_\varepsilon^2} P^{-s}(z) K(z).$$

Il reste donc à traîter le terme $s \mapsto Z_2^2(P, A; s)$. Mais quitte à diminuer ε_0, on peut supposer que $L_\varepsilon^2 \subset S_\delta$ où S_δ est défini dans le Lemme 10, ce même lemme permet de voir qu'il suffit d'étudier $s \mapsto Z_2^2(P, A; s)$ dans le cas où P est un monôme de la forme $P(z) = z^\beta, \quad \beta \in \mathbb{Q}_+^{*2}$. Or dans le cas de $P(z) = z^\beta$, on a pour $\sigma = \Re(s) \gg 0$ et d'après $(****)$

$$Z_2^2(z^\beta, A; s) = Z(z^\beta, A; s) - Z_1(z^\beta, A; s) - Z_2^1(z^\beta, A; s).$$

$s \mapsto Z_1(z^\beta, A; s)$ et $s \mapsto Z_2^1(z^\beta, A; s)$ vérifient évidemment les conclusions du Théorème 2 bis (donc du Théorème 2 aussi). Il suffit donc d'étudier (avec les notations des Lemmes 8 et 9)

$$\begin{aligned} s \mapsto Z(z^\beta, A; s) &= \sum_{m \in A} m^{-\beta s} \\ &= \sum_{\substack{m=(m_1,m_2)\in\mathbb{Z}^2 \\ m_1 > a \text{ et } m_2 > Q(m_1)}} \frac{1}{m_1^{\beta_1 s} m_2^{\beta_2 s}} \\ &= \sum_{m > a} \sum_{n > Q(m)} \frac{1}{m^{\beta_1 s} m_2^{\beta_2 s}} = \xi\left(Q, \frac{\beta_1}{\beta_2}, \beta_2 s\right). \end{aligned}$$

Et les Lemmes 8 et 9 permettent de conclure, le Lemme 8 pour le Théorème 2 et le Lemme 9 pour le Théorème 2 bis. □

7.3. Démonstration des corollaires 1, 1 bis et 2

Les Corollaires 1, 1 bis et 2 découlent des théorèmes précédents. En effet le dévelopement asymptotique de $N_P(A, t)$ quand $t \to +\infty$ s'obtient, en utilisant

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

les propriétés analytiques de la série de Dirichlet associée $s \mapsto Z(P,A;s)$, par une méthode standard due à Landau [5]. Néanmoins, Landau suppose que la série de Dirichlet $s \mapsto Z(P,A;s)$ vérifie une équation fonctionnelle, mais il est clair d'après son argument, comme l'a remarqué B. Lichtin dans ([7], p. 353), que cette hypothèse n'est pas nécéssaire pour obtenir le développement de $N_P(A,t)$. Pour plus de détails sur cette méthode classique on peut consulter l'article original de Landau [5] ou celui de Lichtin [7] où d'autres reférences sont données. $\square$

8. Remarques finales

Il est clair d'après ce qui précède que tous les résultats, sauf le Lemme 8, conduisent à un prolongement méromorphe de la série: $s \mapsto Z(P,A;s)$ à tout le plan complexe. L'obstruction vient donc du lemme 8 et la démonstration de ce lemme montre que cette obstruction est liée au comportement de la fonction $m \mapsto \{Q(m)\}$ quand $m \to +\infty$. Plus précisément, si on a un développement limité

$$\{Q(m)\} = H(m) + 0(m^{-N}) \text{ quand } m \to +\infty.$$

où H est une fonction algébrique (donc possédant un développement en série de Puiseux à l'infini) et où $N \in \mathbb{Q}_+$, alors il existe un prolongement méromorphe de la série $Z(P,A;s)$ à un demi plan de la forme $\{\Re(s) > \sigma_0 - \beta(N)\}$ où $\beta(N) > 0$ vérifie $\beta(N) \to +\infty$ quand $N \to +\infty$.

La réciproque est aussi vraie. C'est ainsi, comme sous les hypothèses générales du Théorème 2, on n'a que $\{Q(m)\} = O(1)$, il est clair qu'on ne peut pas prolonger la série au delà d'une bande. Par contre dans le cas du Théorème 2 bis, les hypothèses impliquent que, pour m assez grand, $\{Q(m)\} = \{a_0\} = \{a_0\} + 0(m^{-N})$ pour tout $N \geqslant 0$. Ce qui, par conséquent, permet de comprendre la raison pour laquelle dans ce cas on a un prolongement à tout le plan complexe.

En conclusion, il resort de ce qui précède une connection entre notre problème et les études classiques d'approximations diophantiennes y compris les résultats plus récents de Huxley, Sargos et al sur les points entiers au voisinage d'une courbe et cette connection donne un nouveau point de vue pour approcher ces derniers problèmes.

Avant de terminer, je voudrai signaler que tous les résultats que nous avons donné sont aussi valables pour la série

$$s \mapsto Z(P,A,\varphi;s) = \sum_{m \in A \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\varphi(m)}{P^s(m)},$$

où P et A vérifient les mêmes hypothèses qu'avant et $\varphi \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ vérifie $d\,(A, Z(\varphi)) > 0$.

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

Les seules modifications à faire concernent les Lemmes 8 et 9 où il faut considérer, à la place de la série $\xi(Q,\alpha;s)$, la série

$$s \mapsto \xi(Q,G,\alpha;s) = \sum_{m=b}^{+\infty} \sum_{n>Q(m)} \frac{G(m,n)}{m^{\alpha s} n^s},$$

où $G \in \mathbb{R}[X_1,X_2]$. On obtient les mêmes énoncés à l'exception de l'expression de l'abscisse de convergence de $\xi(Q,G,\alpha;s)$. Expression dont on ne s'en sert pas dans la suite. Plus précisement.

Dans le cas du Lemme 9, il suffit d'écrire G comme somme de monômes et de traîter chaque terme comme avant pour conclure.

Dans le cas du Lemme 8, il faut supposer en plus que

$$\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ vérifiant } x_1 \geqslant b \quad \text{et} \quad x_2 > Q(x_1), \quad G(x_1,x_2) > 0.$$

Ceci étant, on pose alors pour tout $\lambda \geqslant 1$

$$\xi_\lambda(Q,G,\alpha;s) = \sum_{m=b}^{+\infty} \sum_{n>Q^\lambda(m)} \frac{G(m,n)}{m^{\alpha s} n^s},$$

et on note $\mu_0(\lambda)$ son abscisse de convergence, qui est aussi dans le cas où la série se prolonge son plus grand pôle. On notera aussi $\mu_0 = \mu_0(1)$ l'abscisse de convergence de la série $\xi(Q,G,\alpha;s)$. Il est clair alors, d'après nos hypothèses que pour tout $\lambda \geqslant 1$, $\mu_0(\lambda) \leqslant \mu_0$.

On pose aussi,

$$G(X_1,X_2) = \sum_{\gamma \in \text{ supp }(G)} c_\gamma {X_1}^{\gamma_1} {X_2}^{\gamma_2},$$

$$R(s) = \prod_{\gamma \in \text{ supp }(G)} (s-\gamma_2-1) \quad \text{et} \quad \eta = \sup\{\gamma_1 + d\gamma_2 | (\gamma_1,\gamma_2) \in \text{ supp}(G)\}.$$

Alors, en écrivant G comme somme de monômes et en traîtant chaque terme comme nous l'avons fait dans le Lemme 8, on montre facilement qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour $\Re(s) \gg 0$ on a:

$$\xi(Q,G,\alpha;s)$$
$$= K^{-s+1} \left(\sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in \text{ supp}(G) \\ \gamma_1+d\gamma_2=\eta}} \frac{c_\gamma K^{\gamma_2}}{s-\gamma_2-1} \right) \zeta((\alpha+d)s-\eta-d) + \frac{H_\delta(s)}{R(s)}, \quad (1)$$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

où K et d sont définis dans l'énoncé du Lemme 8 (i.e $Q(x) \sim Kx^d$ quand $x \to +\infty$), ζ est la fonction zeta de Riemann et $s \mapsto H_\delta(s)$ est une fonction holomorphe dans un demi-plan de la forme $\left\{\Re(s) = \frac{1+\mathrm{d}+\eta}{\mathrm{d}+\alpha} - \delta\right\}$.

Dans un premier temps on va montrer que: $\mu_0 \geqslant \frac{1+\mathrm{d}+\eta}{\mathrm{d}+\alpha}$.

Comme on sait que $\mu_0(\lambda) \leqslant \mu_0$ on va commencer par étudier les $\mu_0(\lambda)$ pour tout $\lambda \geqslant 1$.

Un calcul analogue à celui qui a conduit à l'equation (1), montre que pour tout $\lambda \geqslant 1$ on a:

$$\xi_\lambda(Q, G, \alpha; s)$$
$$= {K'}^{-s+1} \left(\sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in \operatorname{supp}(G) \\ \gamma_1+d'\gamma_2=\eta'}} \frac{c_\gamma {K'}^{\gamma_2}}{s-\gamma_2-1} \right) \zeta\left((\alpha+d')s-\eta'-d'\right) + \frac{H_\delta(s)}{R(s)}, \quad (2)$$

où $d' = d'(\lambda) = \lambda d$, $K' = K'(\lambda) = K^\lambda$ et $\eta' = \eta'(\lambda) = \sup\{\gamma_1 + d'\gamma_2 | (\gamma_1, \gamma_2) \in \operatorname{supp}(G)\}$.

Soit maintenant $\lambda \geqslant 1$ tel que $d' = \lambda d \notin \mathbb{Q}(\alpha)$. On distingue alors deux cas:
1[er] *cas:* On suppose qu'il existe $\gamma^0 \in \operatorname{supp}(G)$ tel que $\gamma_1^0 + d'\gamma_2^0 = \eta'$ et

$$1 + \gamma_2^0 = \frac{1+d'+\eta'}{\alpha+d'}.$$

Il est clair, d'après l'equation (2), que la fonction $s \mapsto \xi_\lambda(Q, G, \alpha; s)$ est méromorphe dans le demi-plan $\{\Re(s) > s_0' - \delta\}$ où $s_0' = s_0'(\lambda) = \frac{1+\mathrm{d}'+\eta'}{\alpha+\mathrm{d}'}$. De plus les $1+\gamma_2$, $(\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \operatorname{supp}(G) \backslash \{{s_0}'\})$ et s_0' sont les seuls candidats pôles dans ce demi-plan et il sont tous au plus simples sauf s_0' qui est d'ordre au plus 2. Mais il est facile de voir que s_0' est effectivement un pôle d'ordre deux. En effet, comme $d' \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ alors il n'y a qu'un et un seul $\gamma^0 \in \operatorname{supp}(G)$ tel que $\gamma_1^0 + d'\gamma_2^0 = \eta'$. Il en découle que la partie principale d'ordre deux en s_0' est

$$\frac{c_{\gamma^0} {K'}^{-s_0'+1+\gamma_2^0}}{(\alpha+d')(s-\gamma_2^0-1)^2}.$$

Ce qui permet de voir que dans ce cas on a bien $\mu_0(\lambda) \geqslant s_0' = \dfrac{1+d'+\eta'}{\alpha+d'}$.

2[éme] *cas:* On suppose que pour tout $\gamma \in \operatorname{supp}(G)$ vérifiant $\gamma_1 + d'\gamma_2 = \eta'$ on a $s_0' = \frac{1+\mathrm{d}'+\eta'}{\alpha+\mathrm{d}'} \neq 1 + \gamma_2$.

On a alors: $s_0' = \frac{1+\mathrm{d}'+\eta'}{\alpha+\mathrm{d}'} \neq 1 + \gamma_2$ pour tout $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \operatorname{supp}(G)$. En effet, sinon alors il existerai $\gamma^1 = (\gamma_1^1, \gamma_2^1) \in \operatorname{supp}(G)$ tel que $s_0' =$

https://doi.org/10.1023/A:1000433009678 Published online by Cambridge University Press

$\frac{1+d'+\eta'}{\alpha+d'} = 1+\gamma_2^1$. De plus par definition de η' on sait qu'il existe $\gamma^0 = (\gamma_1^0, \gamma_2^0) \in \operatorname{supp}(G)$ vérifiant $\gamma_1^0 + d'\gamma_2^0 = \eta'$. On en déduit donc que

$$1+\gamma_2^1 = \frac{1+d'+\eta'}{\alpha+d'} = \frac{1+\gamma_1^0+d'(1+\gamma_2^0)}{\alpha+d'}.$$

Et par suite, $d'(\gamma_2^0-\gamma_2^1) = \alpha(1+\gamma_2^1)-(1+\gamma_1^0)$.

Mais comme on a supposé que $d' \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ alors ceci implique que $\gamma_2^1 = \gamma_2^0$. On obtient donc que, $\gamma^0 \in \operatorname{supp}(G)$ et vérifie $\gamma_1^0 + d'\gamma_2^0 = \eta'$ et $s_0' = 1+\gamma_2^0$. Ce qui contredit les hypothèses de ce deuxième cas.

On a donc démontré que dans ce deuxième cas, on a: $s_0' = \frac{1+d'+\eta'}{\alpha+d'} \neq 1+\gamma_2$ pour tout $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2) \in \operatorname{supp}(G)$. On en déduit que pour vérifier que s_0' est effectivement un pôle de $\xi_\lambda(Q,G,\alpha;s)$ il suffit d'après la formule (2) de montrer que

$$\mathcal{J} = \sum_{\substack{\gamma=(\gamma_1,\gamma_2)\in\operatorname{supp}(G)\\ \gamma_1+d'\gamma_2=\eta'}} \frac{c_\gamma {K'}^{\gamma_2}}{s_0'-\gamma_2-1} \neq 0.$$

Or comme $d' \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ alors il est clair que pour tout $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2)$ et $\gamma' = ({\gamma_1}', {\gamma_2}') \in \mathbb{Z}^2$ on a: $\gamma_1 + d'\gamma_2 = \gamma_1' + d'\gamma_2' \Longrightarrow \gamma = \gamma'$.

Ce qui implique, d'après la definition de η', qu'il existe un unique $\gamma^0 = (\gamma_1^0,\gamma_2^0) \in \operatorname{supp}(G)$ vérifiant $\gamma_1^0 + d'\gamma_2^0 = \eta'$. Et par suite on a: $\mathcal{J} = \frac{c_{\gamma^0}(K')^{\gamma_2^0}}{s_0'-\gamma_2^0-1}$. De plus comme $\gamma^0 \in \operatorname{supp}(G)$ alors $c_\gamma^0 \neq 0$ et il est clair alors que $\mathcal{J} \neq 0$. On en déduit que s_0' est effectivement un pôle de $\xi_\lambda(Q,G,\alpha;s)$. Et par suite, $\mu_0(\lambda) \geqslant s_0'$.

En conclusion de l'étude des deux cas on a démontré que $\mu_0(\lambda) \geqslant s_0' = \frac{1+d'+\eta'}{\alpha+d'}$ pour tout $\lambda \geqslant 1$ vérifiant $d' = \lambda d \neq \mathbb{Q}(\alpha)$.

Et comme $\mu_0 \geqslant \mu_0(\lambda)$, alors pour tout $\lambda \geqslant 1$ vérifiant $d' = \lambda d \notin \mathbb{Q}(\alpha)$ on a

$$\mu_0 \geqslant \frac{1+d'+\eta'}{\alpha+d'} = \frac{1+d'(\lambda)+\eta'(\lambda)}{\alpha+d'(\lambda)}.$$

De plus, il est facile de vérifier que l'on peut trouver une suite $(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ d'élements de $[1,+\infty[$ vérifiant:

1. $\lambda_n \to 1$ quand $n \to +\infty$;
2. $\forall n \geqslant 0, \quad d'(\lambda_n) = \lambda_n d \notin \mathbb{Q}(\alpha)$;
3. $\eta'(\lambda_n) \to \eta$ quand $n \longrightarrow +\infty$.

Le dernier point vient du fait que si $\gamma \in \operatorname{supp}(G)$ vérifie $\gamma_1 + d\gamma_2 < \eta$ alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma_1 + d\gamma_2 \leqslant \eta - \varepsilon$ et par suite pour tout λ vérifiant $1 \leqslant \lambda \leqslant \varepsilon/2d(1+\gamma_2)$, $d' = d\lambda$ vérifie

$$\gamma_1 + d'\gamma_2 = \gamma_1 + d\gamma_2 + (d'-d)\gamma_2 = \gamma_1 + d\gamma_2 + d(\lambda-1)\gamma_2 \leqslant \eta - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Et comme supp(G) est fini on peut choisir ε indépendant de $\gamma \in$ supp(G) vérifiant $\gamma_1 + d\gamma_2 < \eta$. On note en suite $\mathcal{B} = \{\gamma \in \text{supp}(G) | \gamma_1 + d\gamma_2 = \eta\}$, alors comme cet ensemble est fini, il est clair qu'il existe $\varrho > 0$ tel que pour tout $\lambda \in [1, 1+\varrho[$ et pour tout $\gamma \in \mathcal{B}$, $d' = \lambda d$ vérifie:

$$\gamma_1 + d'\gamma_2 \geqslant \eta - \frac{\varepsilon}{3} > \sup\{\gamma_1 + d'\gamma_2 | \gamma \in \text{supp}(G) \backslash \mathcal{B}\}.$$

Il en découle que pour tout $\lambda \in [1, 1+\varrho[$ il existe $\gamma^0 \in \mathcal{B}$ tel que $d' = \lambda d$ vérifie: $\sup\{\gamma_1 + d'\gamma_2 | \gamma \in \text{supp}(G)\} = \gamma_1^0 + d'\gamma_2^0$. Et ceci plus un argument de continuité permet de vérifier facilement le 3$^{\text{éme}}$ point énoncé plus haut.

Ceci étant, les trois points précédents, impliquent par passage à la limite que: $\mu_0 \geqslant \frac{1+d+\eta}{\alpha+d}$. Et ceci plus l'équation (1) implique que la série $s \mapsto \xi(Q, G, \alpha; s)$ possède un demi plan de convergence $\{\Re(s) > \mu_0\}$, qu'elle se prolonge méromorphiquement dans un demi-plan de la forme $\{\Re(s) > \mu_0 - \delta\}$ où $\delta > 0$ et que μ_0 est effectivement un pôle. Ce qui permet de conclure.

Remerciements

Je tiens à remercier D. Barlet, B. Lichtin et I. Lieb pour leurs nombreux conseils qui ont enrichi ce travail. Je remercie également le referee de cet article pour ses multiples remarques.

Références

1. Berenstein, C. A., Gay, R., Vidras, A. and Yger, A.: Residue currents and Bezout identities. *Progress in Mathematics* 114, Birkhauser Verlag (1993).
2. Bochnak, I., Coste, M. and Roy, M.-F.: Géométrie algébrique réelle. *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge* 12, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1987).
3. Essouabri, D.: Singularités des séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables et application à la théorie analytique des nombres. *Annales de l'institut Fourier* 47(2) (1997), p. 429–484.
4. Essouabri, D.: *Un théorème de K. Mahler revisité.* Preprint du Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn (Germany), MPI 96–164.
5. Landau, E.: *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewiss en Bereichen.* (Zweite Abhandlung), Kgl. Ges. d. Wiss. Nachrichten. Math-Phys. Klasse, (Göttingen) 2 (1915), 209–243.
6. Lichtin, B.: *Volumes and Lattice Points, Proof of a Conjecture of L. Ehrenpreis* Singularités. London Mathematical Society Note No. 201, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
7. Lichtin, B.: On the moderate growth of generalized Dirichlet series for hypoelliptic polynomials, *Compositio Math.* 80 (1991), 337–354.
8. Mahler, K.: Zur Fortsetzbarkeit gewisser Dirichletscher Reihen. *Matthematishe Annalen.* 102 (1930).
9. Sargos, P.: *Séries de Dirichlet associées à des polynômes de plusieurs variables.* Thése d'Etat Univ. Bordeaux I (1987).
10. Tenenbaum, G.: *Introduction à la Théorie Analytique et Probabiliste des Nombres.* Cours spécialisés, collection SMF, No. 1 (1995).