Can. J. Math. Vol. **46** (2), 1994 pp. 253–273

EQUIVALENCES D'HOMOTOPIE ET CROCHET DE WHITEHEAD

G. DIDIERJEAN AND A. LEGRAND

RÉSUMÉ. L'homotopie de l'espace des équivalences homotopie fibrées, est limite d'une suite spectrale dont on calcule ici la première différentielle. On montre, sous des hypothèses assez générales et dans le cas où le fibré admet une section, que cette différentielle est la somme des trois opérations suivantes:

- une opération produit tensoriel d'une opération cohomologique type carré de Steenrod avec une opération homotopique de Hopf
- une opération définie par le "Brace-product" du fibré
- une opération définie par les crochets de Whitehead de la fibre

La différentielle de la suite spectrale associée à l'homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie d'un espace s'obtient en prenant la base réduite à un point. Ce calcul prolonge certains résultats de [KA 69], [CO-HA].

ABSTRACT. WE compute the first differential of a spectral sequence which converges to the homotopy of the fiberwise self homotopy equivalences space of a bundle. With sufficiently general hypotheses and when the bundle is equiped with a cross section, we show that this differential is the sum of three operations

- an operation tensor product of a cohomology operation like Steenrod square with an Hopf homotopy operation
- an operation associated to the Brace product of the bundle
- an operation associated to the Whitehead bracket of the fibre

Taking a one point set base space we obtain the differential of the spectral sequence related to the homotopy of the self homotopy equivalences space of a space. This extends some results of [KA 69], [CO-HA].

Introduction. On désigne par $E(X)$ le monoïde des équivalences d'homotopie d'un espace X que nous supposerons simplement connexe. Rappelons que l'homotopie de $E(X)$ est limite d'une suite spectrale introduite par W. Shih (*cf.* [SH 64], [SC 73], [DI 85] ou proposition 4.1) qui, si X est une variété compacte $(n-1)$-connexe de dimension $2n$, dégénère en la suite exacte de P. J. Kahn, [KA 69],

$$H^n\big(X, \pi_{n+1}(X)\big) \xrightarrow{d_n} \pi_{2n}(X) \longrightarrow \pi_0\big(E(X)\big) \longrightarrow \operatorname{Aut} H_n(X) \xrightarrow{d_n}$$

Lorsque X est une variété simplement connexe de dimension 4, T. D. Cochran et N. Habbegger, [CO-HA], montrent que cette suite exacte est scindée, qu'elle s'écrit:

$$H_2(X,\mathbf{Z}) \otimes \pi_3(X) \xrightarrow{d_2} \pi_4(X) \longrightarrow \pi_0\big(E(X)\big) \leftrightarrows \operatorname{Aut}\big(H_2(X), \pm\cap\big) \longrightarrow 0,$$

Reçu par les éditeurs le 17 juillet 1992.
Classification (AMS) par sujet : 55P10; 55T99.
Mots clés: homotopy equivalence, spectral sequence, Postnikov tower.

$\mathrm{Aut}\big(H_2(X), \pm\cap\big)$ désignant le sous groupe de $\mathrm{Aut}\, H_2(X)$ laissant invariant au signe près la forme d'intersection et que l'application d_2 vérifie

$$d_2(\alpha \otimes \beta) = w_2(\alpha)(\beta \circ \Sigma\theta) + [\alpha, \beta]$$

où w_2 est la deuxième classe de Stiefel-Whitney, $\theta \in \pi_3(S^2)$ l'invariant de Hopf et $[\ ,\ ]$ le produit de Whitehead de X. En plus de la réponse à la difficile question de l'existence du scindage, qui semble être spécifique à la dimension 4, le résutat de T. D. Cochran et N. Habbegger donne l'expression de la différentielle d_2 de la suite spectrale des équivalences dans le cas d'une variété simplement connexe de dimension 4.

Notre objectif est de montrer que cette expression de d_2 est valable pour une classe beaucoup plus large d'espaces. La construction de la suite spectrale de W. Shih fait apparaître que d_2 est de forme différente suivant qu'on calcule $\pi_*\big(E(X)\big)$, $* > 0$ ou $\pi_0\big(E(X)\big)$. Pour $* > 0$, les calculs de $\pi_*\big(E(X)\big)$ développés par l'un des auteurs, [DI 92], font naturellement intervenir l'homotopie de l'espace $E^\sharp_B(X)$ des équivalences *fibrées* de fibrés $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ induisant l'identité sur les groupes d'homotopie de F. Ceci via une suite spectrale non abélienne, limitée au degré total $p + q \leq 1$, qui généralise celle de W. Shih, ([DI 85], ou théorème 3.1) et qui s'écrit, si X est simplement connexe et F connexe:

(i) pour $p + q < 0$ et $p \geq 0$ $E_2^{p,q} = H^p\big(X, \pi_{-q}(F)\big)$

(ii) pour $p + q = 0$ et $p \geq 1$ $E_2^{p,q} = H^{p+1}\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big)$

(iii) pour $p + q = 1$ $E_2^{p,q} = H^p\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big)$

où $X^{(p)}$ désigne le p-ème système de Postnikov fibré de $X \longrightarrow B$.

Notre résultat principal est le calcul de la différentielle de cette suite spectrale en fonction des produits de Whitehead et de l'opération de Hopf. Rappelons que, lorsque le fibré $F \xrightarrow{i} X \longrightarrow B$ admet une section s, le produit de Whitehead de X induit le "Brace-product", [JA 70],

$$\{\ ,\ \}\colon \pi_q(B) \otimes \pi_p(F) \longrightarrow \pi_{p+q-1}(F).$$

Il résulte alors immédiatement du corollaire 3.3 que, sous certaines hypothèses de projectivité pour l'homologie de X, $d_2^{p-i}\colon H^{p-i}\big(X, \pi_p(X)\big) \longrightarrow H^{p+2-i}\big(X, \pi_{p+1}(X)\big)$ vérifie:

$$d_2^{p-i}(\alpha^* \otimes \beta) = \mathrm{SQ}_2(\alpha^*) \otimes \beta \circ \Sigma^i\eta + \bigcup\big(\alpha^* \otimes (\{-, \beta\} + [-, \beta])\big)$$

où $\cup\colon H^p(X) \otimes \mathrm{Hom}\big(H_2(X), \pi_{q+1}(X)\big) \longrightarrow H^{p+2}\big((X) \otimes \pi_{q+1}(X)\big)$ est le morphisme naturel et la somme des morphisme $\{-, \beta\} + [-, \beta]$ correspond à la décomposition $H_2(X) = H_2(B) \oplus H_2(F)$ déterminée par la section s.

Ce résultat s'obtient en deux étapes.

Première étape: on calcule la différentielle en fonction des invariants de Postnikov fibrés de X sous les seules hypothèses que F est connexe et X est 1-connexe. Pour $i \geq 0$, on montre (théoreme 3.2):

$$d_2^{p-i} = \Sigma^i \eta_{p+1}(F) + \eta^2_{p+1} \smile$$

où $\Sigma^i\eta_{p+1}(F)$ désigne la i-ème suspension de la $(p+1)$-ème opération cohomologique d'Eilenberg $\eta_{p+1}(F) \in H^{p+2}\big(\pi_p(F), p, \pi_{p+1}(F)\big)$ induite par le $(p+1)$-ème invariant de Postnikov de F (définition 1.1)

$\eta^2_{p+1}\colon \pi_2(X) \otimes \pi_p(F) \longrightarrow \pi_{p+1}(F)$ est un produit (*cf.* paragraphe 1, formule (1)) qui s'identifie à une classe dans $H^2\Big(X, \mathrm{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big)$ déterminée par deux étages successifs $X^{(p+2)} \longrightarrow X^{(p)}$ de la tour de Postnikov fibrée de X.

Losque B est réduit à un point, cette première expression de d_2 s'interprête de la manière suivante (corollaire 3.4 et remarque 3.5): le monoïde $\mathrm{Hom}(X,X)$ a deux composantes connexes remarquables, celle de l'application constante et celle de l'application identité, cette dernière étant la composante connexe de l'identité de $E(X)$. Remarquons que si X admet une structure de H-espace, ces deux composantes ont même type d'homotopie. Les groupes d'homotopie de ces composantes sont respectivement limite de suites spectrales (réf. *ibid.* pour la suite spectrale associée à $\pi_*\big(E(X)\big)$ et [FE 56], [SH 63], [BO 72], [SC 73], [LE 82] pour celle correspondant à $\pi_*\big(\mathrm{Hom}(X,X)\big)$) qui ont même termes initiaux:

$$E_2^{p,q} = H^p\big(X, \pi_q(X)\big), \quad p+q < 0.$$

Par contre, la différentielle de la suite spectrale associée aux groupes d'homotopie de la composante de l'application constante vérifie, [SH 64], $d_2^{p-i} = \Sigma^i\eta_{p+1}(F)$. C'est-à-dire que la différentielle de la suite spectrale des équivalences s'obtient en ajoutant à la différentielle précédente le cup-produit $\eta^2_{p+1} \smile$ déterminée par le crochet de Whitehead de X.

Deuxième étape: on exprime les invariants précédents à l'aide de produits de Whitehead et de l'opération de Hopf.

D'une part, on étend au cadre fibré (théorème 1.2) le résultat P. Meyer, [ME 60], donnant les produits de Whitehead d'un espace en fonction de ses invariants de Postnikov. On en déduit que le produit η^2_{p+1} est la somme du "Brace-product" et du crochet de Whitehead de la fibre F (corollaire 1.3).

D'autre part, les opérations d'Eilenberg d'un espace simplement connexe X s'obtiennent en fonction des suspensions de l'application de Hopf $\theta \in \pi_3(S^2)$, et de l'opération SQ_2, générateur de $H^2(\mathbf{Z}, \mathbf{Z}_2)$ par le diagramme commutatif (proposition 6.1):

$$\begin{array}{ccc}
H^{p-j}(X) \otimes \pi_p(X) & \xrightarrow{\mathrm{SQ}_2 \otimes \Sigma^{p-2}\theta} & H^{p+2-j}(X, \mathbf{Z}_2) \otimes \mathrm{Hom}\big(\mathbf{Z}_2, \pi_{p+1}(X)\big) \\
\Phi\big\downarrow & & \Psi\big\downarrow \\
H^{p-j}\big(X, \pi_p(X)\big) & \xrightarrow{\Sigma^j\eta_{p+1}(X)} & H^{p+2-j}\big(X, \pi_{p+1}(X)\big)
\end{array}$$

Ici $p > 2$, pour $p = 2$, on a un diagramme similaire.

Ce qui précède ne détermine pas la différentielle en degré 0 de la suite spectrale associée à $\pi_*(E(X))$. Ce calcul, qui est l'objet du paragraphe 4, utilise le rapport suivant entre décomposition de Postnikov de X et décomposition cellulaire (proposition 4.5): soit $X = D^d \cup_a M$ un CW-complexe simplement connexe obtenu par l'attachement d'une d-cellule sur un CW-complexe M de dimension au plus $d-2$. Alors

1. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_0\big(E(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(X^{d-1})\big) \cong \pi_0\big(E(M)\big).$$

2. Si la classe d'attachement $a \in \pi_{d-1}(M)$ est sans torsion, on a

$$\pi_0\big(E(X)\big) \cong \pi_0\big(E(X^{d+1})\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(X^d)\big) \cong \pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a} \longrightarrow 0$$

où $\pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$ est le sous-groupe de $\pi_0\big(E(M)\big)$ laissant $a \in \pi_{d-1}(M)$ invariant au signe près.

En fait, pour X variété simplement connexe de dimension 4, $\pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$ s'identifie à $\mathrm{Aut}\big(H_2(X), \pm\cap\big)$ (lemme 5.4).

Dans le dernier paragraphe on étend une partie de ces résultats à la première différentielle non nulle.

L'organisation de l'article est la suivante .

1. **Relations entre crochet de Whitehead et tour de Postnikov fibrée.** P. Meyer a calculé le produit de Whitehead d'un espace en fonction de ses invariants de Postnikov ([ME 60], théorème (3.3) voir également M. Arkowitz [AR 71] ou le théorème 1.4 ci-dessous). D'autre part I. M. James, [JA 70], a introduit le "Brace product" d'un fibré $F \longrightarrow X \longrightarrow B$, muni d'une section s:

$$\pi_q(B) \otimes \pi_p(F) \longrightarrow \pi_{p+q-1}(F)$$

Dans ce paragraphe on relie ce produit aux invariants de Postnikov fibré de X.

On se place dans le cadre simplicial et les ensembles simpliciaux de Kan et les fibrés de Kan seront respectivement appelés espaces et fibrés. Soit $p\colon X \longrightarrow B$ un fibré de fibre F et d'espace total X. On suppose X 1-connexe et F connexe. On notera $X^{(p)}$ le p-ième système de Postnikov fibré de X, [MA 67], avec la convention suivante sur l'exposant p: la fibre du fibré $X^{(p+1)} \longrightarrow X^{(p)}$ est un espace d'Eilenberg-Mac Lane de type $K\big(\pi_p(F), p\big)$. Comme X est 1-connexe, ce fibré est principal et classifié par une application $X^{(p)} \longrightarrow K\big(\pi_p(F), p{+}1\big)$. La classe $\xi_p \in H^{p+1}\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big)$ de cette application est le *p-ième invariant de Postnikov fibré*. On obtient la décomposition d'un espace simplement connexe en prenant la base B réduit à un point. Pour ne pas confondre avec le cas fibré nous réserverons la notation X^p à la décomposition de Postnikov de X en tant qu'espace. Pour $p \leq q$, on désigne par X_p^q la fibre du fibré $X^q \longrightarrow X^p$. En particulier $\pi_i(X_p^q) = \pi_i(X)$ si $p \leq i < q$ et 0 sinon.

https://doi.org/10.4153/CJM-1994-011-4 Published online by Cambridge University Press

DÉFINITION 1.1. Pour $p > 1$, on appelera $(p+1)$-ème opération d'Eilenberg de l'espace X l'opération cohomologique

$$\eta_{p+1}(X) \in H^{p+2}\big(\pi_p(X), p, \pi_{p+1}(X)\big)$$

induite par la restriction à $K\big(\pi_p(X), p\big) \simeq X_p^{p+1}$ du $(p+1)$-ème invariant de Postnikov de X.

La $(p+1)$-ème opération d'Eilenberg de l'espace X est une opération cohomologique stable dès que $p > 2$. Elle classifie le fibré

$$K\big(\pi_{p+1}(X), p+1\big) \longrightarrow X_p^{p+2} \longrightarrow K\big(\pi_p(X), p\big).$$

Considérons maintenant un fibré X de base B, de fibre F, X étant 1-connexe et F connexe. Une décomposition en tour de Postnikov fibrée détermine deux opérations. Tout d'abord, la $(p+1)$-ième opération d'Eilenberg de la fibre F

$$\eta_{p+1}(F) \in H^2\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big).$$

Ensuite, deux étages successifs $X^{(p+2)} \longrightarrow X^{(p)}$ de la tour de Postnikov fibrée définissent un invariant de la structure du fibré,

$$\eta_{p+1}^2 \in H^2\Big(X, \operatorname{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big)$$

de la manière suivante: comme $\pi_1(X) = 0$, le fibré $X^{(p+1)} \longrightarrow X^{(p)}$ est principal, de fibre $K\big(\pi_p(F), p\big)$. Il est donc associé à une opération $\mu \colon X^{(p+1)} \times K\big(\pi_p(F), p\big) \longrightarrow X^{(p+1)}$. Le composé de cette opération et de l'application $X^{(p+1)} \longrightarrow K\big(\pi_{p+1}(F), p+2\big)$ classifiant le fibré $X^{(p+2)} \longrightarrow X^{(p+1)}$ détermine une classe $\eta \in H^{p+2}\Big(X^{(p+1)} \times K\big(\pi_p(F), p\big), \pi_{p+1}(F)\Big)$. Ce groupe se décompose canoniquement en une somme directe

$$\begin{aligned} H^{p+2}\Big(X^{(p+1)} \times K\big(\pi_p(F), p\big), \pi_{p+1}(F)\Big) = {} & H^{p+2}\big(X^{(p+1)}, \pi_{p+1}(F)\big) \\ & \oplus H^2\Big(X^{(p+1)}, \operatorname{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big) \\ & \oplus H^{p+2}\big(\pi_p(F), p, \pi_{p+1}(F)\big) \end{aligned}$$

et donc η a trois composantes, $\eta = \eta^{p+2} + \eta^2 + \eta^0$. Par fonctorialité, η^0 s'identifie à $\eta_{p+1}(F)$, η^{p+2} à ξ_{p+1} la classe du $(p+1)$-ème invariant de Postnikov du fibré $X \longrightarrow B$ et η^2 à η_{p+1}^2. Enfin par l'isomorphisme naturel

$$H^2\Big(X, \operatorname{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big) \simeq \operatorname{Hom}\big(\pi_2(X) \otimes \pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)$$

la classe η_{p+1}^2 détermine un produit, encore noté η_{p+1}^2:

$$\eta_{p+1}^2 \colon \pi_2(X) \otimes \pi_p(F) \longrightarrow \pi_{p+1}(F) \tag{1}$$

On notera $\eta_{p+1}^2 \colon \pi_2(X) \otimes \pi_p(X) \longrightarrow \pi_{p+1}(X)$ le produit correspondant à l'espace X (B réduit à un point).

Le rapport de η_{p+1}^2 avec le crochet de Whitehead est donné dans le théorème ci-dessous dont la preuve sera donnée à la fin de ce paragraphe. On désigne par [,] le crochet de Whitehead de l'espace X.

THÉORÈME 1.2. *Soit $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ un fibré de fibre F connexe et d'espace total X 1-connexe. Le produit $\eta^2_{p+1}\colon \pi_2(X) \otimes \pi_p(F) \longrightarrow \pi_{p+1}(F)$ est relié au produit de Whitehead de X par la relation:*

$$i_* \circ \eta^2_{p+1}(\alpha \otimes \beta) = [\alpha, i_*(\beta)]$$

où $\alpha \in \pi_2(X)$ et $\beta \in \pi_p(F)$ et i l'inclusion de F dans X.

Rappelons la définition du "Brace product" d'un fibré $F \xrightarrow{i} X \longrightarrow B$ muni d'une section s, [JA 70]. Le "Brace product"

$$\pi_q(B) \otimes \pi_p(F) \longrightarrow \pi_{p+q-1}(F)$$

associe à $\alpha \in \pi_q(B)$, $\beta \in \pi_p(F)$ l'élément $\gamma \in \pi_{p+q-1}(F)$ tel que

$$i_*(\gamma) = [s_*(\alpha), i_*(\beta)].$$

COROLLAIRE 1.3. *Si le fibré $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ admet une section, par l'isomorphisme $\pi_2(B) \oplus \pi_2(F) \simeq \pi_2(X)$ induit par cette section, le produit η^2_{p+1} est la somme du "Brace-product" et du crochet de Whitehead de la fibre F.*

Rappelons le résultat de Meyer. D'après Ganea, pour $q < 2p$, X^q_p est un espace de lacets.

THÉORÈME 1.4 [ME 60], [AR 71]. *Soient X un espace simplement connexe et $p \leq q$. Alors*

1. La fibration $X^{p+q-1}_p \longrightarrow X^q_p$ est de type principale et associée à une opération

$$\mu\colon X^{p+q-1}_q \times X^{p+q-1}_p \longrightarrow X^{p+q-1}_p.$$

2. Le produit de Pontrjagin généralisé induit par μ,

$$P\colon \pi_q \otimes \pi_p \cong H_q(X^{p+q-1}_q) \otimes H_p(X^{p+q-1}_p) \longrightarrow H_{p+q}(X^{p+q-1}_p),$$

la transgression,

$$H(\xi)\colon H_{p+q}(X^{p+q-1}_p) \longrightarrow H_{p+q}\Big(K\big(\pi_{p+q-1}(X), p+q\big)\Big) \cong \pi_{p+q-1}(X),$$

du fibré $K\big(\pi_{p+q-1}(X), p+q-1\big) \longrightarrow X^{p+q}_p \longrightarrow X^{p+q-1}_p$ et le produit de Whitehead de X sont reliés par la relation:

$$[\,,\,] = H(\xi) \circ P.$$

La transgression $H(\xi)$ du fibré $K\big(\pi_{p+q-1}(X), p+q-1\big) \longrightarrow X^{p+q}_p \longrightarrow X^{p+q-1}_p$ est reliée au $(p+q-1)$-ème invariant de Postnikov

$$\xi_{p+q-1} \in H^{p+q}\big(X^{p+q-1}_p; \pi_{p+q-1}(X)\big) \cong \Big[X^{p+q-1}_p, K\big(\pi_{p+q-1}(X), p+q\big)\Big]$$

par la relation

$$H(\xi) = H_{p+q}(\xi_{p+q-1}) \colon H_{p+q}(X_p^{p+q-1}) \longrightarrow H_{p+q}\Big(K\big(\pi_{p+q-1}(X), p+q\big)\Big) \cong \pi_{p+q-1}(X).$$

PREUVE DU THÉORÈME 1.2. La classe η_{p+1}^2 s'identifie au composé des applications:

$$H_2(X^{(p+1)}) \otimes H_p\Big(K\big(\pi_p(F), p\big)\Big) \xrightarrow{\mu_*} H_{p+2}(X^{(p+1)}) \xrightarrow{H_{p+2}(\xi)} H_{p+2}\Big(K\big(\pi_{p+1}(F), p+2\big)\Big).$$

où μ_* est le produit de Pontrjagin de l'opération $\mu \colon X^{(p+1)} \times K\big(\pi_p(F), p\big) \longrightarrow X^{(p+1)}$ associée au fibré principal $X^{(p+1)} \longrightarrow X^{(p)}$ et $H_{p+2}(\xi)$ est induit par une application classifiante ξ du fibré $X^{(p+2)} \longrightarrow X^{(p+1)}$. Il s'identifie au morphisme de transgression de ce fibré.

Rappelons que X^p désigne la tour de Postnikov, non fibrée de X. L'oubli de la structure fibrée donne une application $X^{(p+1)} \longrightarrow X^{p+1}$. Le fibré $X^{p+1} \longrightarrow X^p$ étant principal, il est associé à une opération $\nu \colon X^{p+1} \times K\big(\pi_p(F), p\big) \longrightarrow X^{p+1}$.

Notons

$$K_p^F = K\big(\pi_p(F), p\big); \quad \bar{W}K_{p+1}^F = K\big(\pi_{p+1}(F), p+2\big)$$
$$K_p^X = K\big(\pi_p(X), p\big); \quad \bar{W}K_{p+1}^X = K\big(\pi_{p+1}(X), p+2\big)$$

On a alors le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\pi_2(X) \otimes \pi_p(F) \arrow[rr] \arrow[d, "h"] & & \pi_{p+1}(F) \arrow[d, "\cong"] \\
H_2(X^{(p+1)}) \otimes H_p(K_p^F) \arrow[r, "\mu_*"] \arrow[d] & H_{p+2}(X^{(p+1)}) \arrow[r, "H_{p+2}(\xi)"] & H_{p+2}(\bar{W}K_{p+1}^F) \arrow[d] \\
H_2(X^{p+1}) \otimes H_p(K_p^X) \arrow[r, "\nu_*"] & H_{p+2}(X^{p+1}) \arrow[r, "H_{p+2}(\xi_1)"] & H_{p+2}(\bar{W}K_{p+1}^X) \\
\pi_2(X) \otimes \pi_p(X) \arrow[rr] \arrow[u, "h_1"] & & \pi_{p+1}(X) \arrow[u, "\cong"]
\end{tikzcd}$$

La deuxième ligne définit η_{p+1}^2. Dans la troisième, le premier morphisme est le produit de Pontrjagin induit par ν et ξ_1 est une application classifiante du fibré $X^{p+1} \longrightarrow X^p$; les isomorphismes verticaux h et h_1 sont déduits des isomorphismes de Hurewicz. D'après le résultat de Meyer, rappelé en théorème 1.4, la troisième ligne du diagramme est le crochet de Whitehead de X. Le théorème résulte alors de la commutativité de ce diagramme.

REMARQUE 1.5. De la suite exacte d'homotopie du fibré, $F \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} B$ pour $\alpha \in \pi_q(X)$ et $\beta \in \pi_p(F)$, on déduit la relation:

$$p_*[\alpha, i_*(\beta)] = [p_*(\alpha), p_* \circ i_*(\beta)] = 0.$$

Dans le cas où le fibré admet une section, il existe un élément $\gamma \in \pi_{p+q-1}(F)$, uniquement déterminé, tel que $i_*(\gamma) = [\alpha, i_*(\beta)]$. Sinon il résulte du théorème 1.2 que, pour $q = 2$, γ peut être choisi fonctoriellement. En effet, il suffit de poser:

$$\gamma = H_{p+2}(\xi) \circ \mu_* \circ h(\alpha \otimes \beta) = H_{p+2}(\xi_1) \circ h_1\big(\alpha \otimes i_*(\beta)\big) = [\alpha, i_*(\beta)].$$

Terminons ce paragraphe en montrant que, pour un fibré associé à un fibré principal, le "Brace-product" est déterminé par les obstructions de Steenrod. Soit une opération $\varphi\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}(F)$ d'un groupe 1-connexe G sur un espace pointé F. Cette opération détermine, pour tout $p \geq 0$, une application

$$G \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Aut}(F) \longrightarrow E(F) \longrightarrow E(F_p^{p+2}).$$

On en déduit un morphisme $\eta(\varphi)\colon \pi_1(G) \longrightarrow \pi_1\big(E(F_p^{p+2})\big)$ Comme F_p^{p+2} est réduit à deux étages

$$\pi_1\big(E(F_p^{p+2})\big) = \pi_1\big(E^\sharp(F_p^{p+2})\big) \cong \mathrm{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big),$$

(*cf.* [SH 64] ou lemme 2.1), $\eta(\varphi)$ détermine une classe, notée de la même manière, $\eta(\varphi) \in H^2\Big(BG, \mathrm{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big)$ qui s'identifie au "Brace-product" du fibré $EG \times_G X$ classifiant de l'opération φ. Plus généralement, [SA 90],

PROPOSITION 1.6. *Le "Brace-product" du fibré $P \times_G F$ associé à un fibré principal $G \longrightarrow P \longrightarrow B$, par une opération du groupe 1-connexe G sur un espace pointé F est l'image de la première obstruction $c_2(P) \in H^2\big(B, \pi_1(G)\big)$ du fibré principal P par le changement de coefficients $\eta(\varphi)\colon \pi_1(G) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)$.*

2. **Le fibré des équivalences d'une tour de Postnikov.** On désigne par $E_B^\sharp(X)$ (resp. $E^\sharp(X)$) le monoïde simplicial des équivalences d'homotopie au dessus de l'identité de la base B d'un fibré $F \to X \to B$, qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopie de F (resp. le monoïde simplicial des équivalences d'homotopie d'un espace X qui induisent l'identité sur les groupes d'homotopie). On suppose que l'espace X est simplement connexe. La fibration, [DI 85],

$$E^\sharp_{X^{(p+1)}}(X^{(p+2)}) \longrightarrow E^\sharp(X^{(p+2)}) \longrightarrow E^\sharp(X^{(p+1)}) \tag{2}$$

décrit la variation de $E(X^{(*)})$ lorsqu'on monte d'un étage dans la tour de Postnikov fibrée. Nous allons classifier cette fibration. Commençons par rappeler, ([DI 85], proposition 3.1, p. 39):

LEMME 2.1. *Soit un fibré $K(\pi, n) \to Y \to B$, $n \geq 1$, avec Y 1-connexe et π abélien. Le monoïde $E_B^\sharp(Y)$ est isomorphe au groupe simplicial abélien $\mathrm{Hom}\big(B, K(\pi, n)\big)$.*

D'après ce lemme la fibre $E^\sharp_{X^{(p+1)}}(X^{(p+2)})$ de (2) est équivalente au groupe simplicial abélien $\mathrm{Hom}(X^{(p+1)}, K\big(\pi_{p+1}(F), p+1)\big)$. Notons $WG \to \bar{W}G$ le fibré classifiant universel associé à un groupe simplicial G, [MA 67]. La suite de groupes simpliciaux abéliens

$$\begin{aligned} &\mathrm{Hom}\Big(X^{(p+1)}, K\big(\pi_{p+1}(F), p+1\big)\Big) \to \mathrm{Hom}\Big(X^{(p+1)}, WK\big(\pi_{p+1}(F), p+1\big)\Big) \\ &\qquad\qquad \to \mathrm{Hom}\Big(X^{(p+1)}, \bar{W}K\big(\pi_{p+1}(F), p+1\big)\Big) \end{aligned} \tag{3}$$

est un fibré universel pour ce groupe. Le théorème de classification est alors

THÉORÈME 2.2. *La fibration (2) est une fibration principale image réciproque du fibré universel (3) par l'application* $\bar{\eta}\colon E(X^{(p+1)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(X^{(p+1)}, \bar{W}K\big(\pi_{p+1}(F), p+1\big)\big)$ *définie sur les 0-simplexes par* $f \mapsto \bar{\xi}f - \bar{\xi}$ *où* $\bar{\xi}\colon X^{(p+1)} \longrightarrow \bar{W}K\big(\pi_{p+1}(F), p+1\big)$ *est une application classifiante du fibré principal* $X^{(p+2)} \longrightarrow X^{(p+1)}$.

Pour montrer le théorème nous utiliserons le lemme suivant où $K' \times_\tau Y$ désigne le produit tordu principal, dans le sens de [MA 67], d'un espace d'Eilenberg-Mac Lane K' par un espace Y sur une fonction tordante $\tau\colon Y \longrightarrow K'$.

LEMME 2.3. *Soit* Y *un espace 1-connexe pointé par* y_0. *Soit* $h\colon K' \times_\tau Y \longrightarrow K' \times_\tau Y$ *un morphisme de fibrés et* $g\colon Y \longrightarrow Y$ *le morphisme induit. Si* g *vérifie* $g(y_0) = y_0$ *et* h *induit l'identité sur* $\pi_{p+1}(K')$. *Alors* h *vérifie,* $h(x, y) = \big(x + a(y), g(y)\big)$ *où* a *est une application de* Y *dans* K'.

PREUVE DU LEMME 2.3. L'opération de K' sur lui-même par translation induit naturellement une opération de $K' \times K'$ sur $\mathrm{Hom}(K', K')$. Cette opération respecte l'isomorphisme des groupes simpliciaux:

$$\mathrm{Hom}(K', K') \simeq K' \times \mathrm{Hom}\big(\pi_{p+1}(F), \pi_{p+1}(F)\big)$$

en identifiant K' aux translations et $\mathrm{Hom}\big(\pi_{p+1}(F), \pi_{p+1}(F)\big)$ aux morphismes induits en homotopie par $f\colon K' \longrightarrow K'$. Les applications de $K' \times_\tau Y$ dans lui-même au dessus de g s'identifient aux sections du produit tordu $\mathcal{S} = \mathrm{Hom}(K', K') \times_{\tau\times\tau g} Y \longrightarrow Y$ où $K' \times_{\tau g} Y$ est induit de $K' \times_\tau Y$ par g, ([LE 82], proposition 1.3, p. 14). Notons s_h la section déterminée par h. Comme on a supposé $\pi_{p+1}(h|_{K'}) = 1$, s_h est à valeurs dans la composante de l'identité des fibres de $\mathcal{S}$. La réunion de ces composantes définissent un sous-fibré $\mathcal{S}'$ de $\mathcal{S}$ car Y est simplement connexe. La section s_h est à valeurs dans $\mathcal{S}'$. On définit l'application $a\colon Y \longrightarrow K'$ par $s_h(y) = \Big(\big(a(y), 1|_{\pi_{p+1}(F)}\big), y\Big)$. On a alors, pour (k', y) dans $K' \times_\tau Y$, $h(k', y) = s_h(y).k' = \big(k' + a(y), y\big)$.

PREUVE DU THÉORÈME 2.2. On peut supposer le fibré $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ minimal quitte à le remplacer par un sous-fibré qui est un rétracte par déformation, [MA 67]. Dans ce cas (2) est une suite exacte de groupes simpliciaux, c'est donc une fibration principale. Notons K' l'espace $K\big(\pi_{p+1}(F), p+1\big)$. Nous allons relever $\bar{\eta}$ en une application

$$\eta\colon E^\sharp_{X^{(p)}}(X^{(p+2)}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X^{(p+1)}, WK').$$

Il suffit de définir cette application sur les 0-simplexes. En effet un n-simplexe de $E^\sharp(X^{(p+2)})$ est donné par une application de $\Delta[n] \times X^{(p+2)}$ dans $\Delta[n] \times X^{(p+2)}$; c'est donc un 0-simplexe de $E^\sharp(\Delta[n] \times X^{(p+2)})$. D'après le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc} X^{(p+2)} & \xrightarrow{h} & X^{(p+2)} & \xrightarrow{\xi} & WK' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ X^{(p+1)} & \xrightarrow{f} & X^{(p+1)} & \xrightarrow{\bar{\xi}} & \bar{W}K' \end{array}$$

l'application qui à h associe $\eta(h) = \xi h - \xi$ définira le relèvement cherché de $\bar{\eta}$ si $\xi h - \xi$, à priori défini dans $X^{(p+2)}$, se factorise par $X^{(p+1)}$. Appliquons le lemme 2.3 à la fibration $X^{(p+2)} \longrightarrow X^{(p+1)}$. On identifie $X^{(p+2)}$ au produit tordu $K' \times_\tau X^{(p+1)}$ et, pour $x \in X^{(p+1)}$, on déduit que $(\xi h - \xi)(k', x) = \big(a(x), (\bar{\xi} f - \bar{\xi})(x)\big)$ est indépendant de k' élément de K', ce qui montre le théorème.

Le second résultat de ce paragraphe est le calcul des opérateurs bord de la suite exacte d'homotopie de la fibration

$$E^{\sharp}_{X^{(p+1)}}(X^{(p+2)}) \longrightarrow E^{\sharp}_{X^{(p)}}(X^{(p+2)}) \longrightarrow E^{\sharp}_{X^{(p)}}(X^{(p+1)}) \tag{4}$$

Rappelons que $\eta_{p+1}(F) \in H^{p+2}\big(\pi_p(F), p, \pi_{p+1}(F)\big)$ est l'opération cohomologique d'Eilenberg (définition 1.1) et que $\eta^2_{p+1} \in H^2\Big(X, \mathrm{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big)$ est le produit associé aux invariants de Postnikov fibrés (*cf.* 1, (1)).

PROPOSITION 2.4. *Pour $i \leq 0$, les opérateurs bord*

$$\delta_i \colon H^{p-i}\big(X; \pi_p(F)\big) \longrightarrow H^{p-i+2}\big(X^{(p+1)}; \pi_{p+1}(F)\big)$$

de la suite exacte d'homotopie de la fibration principale (4) *vérifient les relations:*

$$\delta_i = \Sigma^i \eta_{p+1}(F) \circ + \eta^2_{p+1} \cup.$$

où $\Sigma^i \eta_{p+1}(F)$ désigne la i-ème suspension de l'opération cohomologique $\eta_{p+1}(F)$.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.4. On reprend les notations de la démonstration précédente. On a un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_i\Big(E^{\sharp}_{X^{(p)}}(X^{(p+1)})\Big) & \xrightarrow{\pi_i(\bar{\eta})} & \pi_i\big(\mathrm{Hom}(X^{(p+1)}, \bar{W}K')\big) \\
\downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
H^{p-i}\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big) & \xrightarrow{\pi_i(\bar{\eta})} & H^{p-i+2}\big(X^{(p+1)}, \pi_{p+1}(F)\big)
\end{array}$$

Le complexe de chaînes de $X^{(p)}$ étant un quotient de celui de X la projection $X \longrightarrow X^{(p)}$ induit, pour $i > 0$ et pour tout groupe de coefficients A, des isomorphismes

$$H_{p-i}(X) \cong H_{p-i}(X^{(p)}); \quad H^{p-i}(X^{(p)}, A) \cong H^{p-i}(X, A).$$

Pour une fibration principale, l'opérateur bord, en degré i, de la suite exacte d'homotopie est déterminé par la "i-ème suspension" de la classe d'une application classifiante. Ceci s'explicite ici par le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
\pi_i\Big(E^{\sharp}_{X^{(p)}}(X^{(p+1)})\Big) & \longrightarrow & \pi_{i-1}\Big(E^{\sharp}_{X^{(p+1)}}(X^{(p+2)})\Big) \\
\downarrow \pi_i(\bar{\eta}) & & \downarrow \cong \\
\pi_i\big(\mathrm{Hom}(X^{(p+1)}, \bar{W}K')\big) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{i-1}\big(\mathrm{Hom}(X^{(p+1)}, K')\big)
\end{array}$$

Calculons les morphismes $\pi_i(\bar{\eta})$. Soit c un élément de $H_p\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big)$, il est représenté par une application $\varphi \colon X^{(p)} \longrightarrow K\big(\pi_p(F), p\big)$. Cette application définit une application

$f\colon X^{(p+1)} \longrightarrow X^{(p+1)}$, au dessus de l'identité de $X^{(p)}$, par $f(y,x) = \big(y + \varphi(x), x\big)$ où (y,x) est élément de $X^{(p+1)} = K\big(\pi_p(F), p\big) \times_\tau X^{(p)}$. Si on note $\bar{c}$ le composé de φ avec la projection $p\colon X^{(p+1)} \longrightarrow X^{(p)}$, l'application $\bar{\xi}f$ est le composé:

$$X^{(p+1)} \xrightarrow{\bar{c}\times 1} K\big(\pi_p(F), p\big) \times X^{(p+1)} \xrightarrow{\mu} X^{(p+1)} \xrightarrow{\bar{\xi}} K\big(\pi_{p+1}(F), p+2\big)$$

L'application $\bar{\xi}\mu$ définit une section du fibré trivial:

$$\mathrm{Hom}\Big(K\big(\pi_p(F), p\big), K\big(\pi_{p+1}(F), p+2\big)\Big) \times X^{(p+1)} \longrightarrow X^{(p+1)}$$

et l'application $\bar{c} \times 1$ une section du fibré trivial $K\big(\pi_p(F), p\big) \times X^{(p+1)}$. Le théorème résulte alors de la construction de η_{p+1} et de η^2_{p+1} et de la construction de l'opération cup-produit donnée dans ([LE 82], proposition III-5, p. 59).

3. **Différentielle de la suite spectrale des équivalences fibrées.** Federer, [FE 56], Shih, [SC 73] ont construit une suite spectrale convergeant vers l'homotopie de l'espace des équivalences d'un espace X. Cette construction a été étendue au cas des équivalences d'un fibré dans [DI 85]. Dans ce paragraphe on calcule la différentielle de cette suite spectrale en fonction des opérations d'Eilenberg et du crochet de Whitehead de la fibre et du Brace-product. Donnons brièvement la construction de cette suite spectrale. Les suites exactes d'homotopie des fibrations associées à une décomposition de Postnikov fibrée du fibré $X \longrightarrow B$,

$$E^\sharp_{X^{(q)}}(X^{(r)}) \longrightarrow E^\sharp_{X^{(p)}}(X^{(r)}) \longrightarrow E^\sharp_{X^{(p)}}(X^{(q)})$$

où $p \leq q \leq r$, définissent un couple exact "non abélien limité" et de la même manière que dans [DI 85], on montre:

THÉORÈME 3.1. *Soit $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ un fibré avec X 1-connexe et F connexe. On associe à l'espace $E^\sharp_B(X)$ des équivalences fibrées induisant l'identité sur les groupes d'homotopie de F, une suite spectrale non abélienne limitée de degré total $p+q \leq 1$ et dont les termes initiaux vérifient:*

(i) pour $p+q < 0$ et $p \geq 0$ $E_2^{p,q} = H^p\big(X, \pi_{-q}(F)\big)$

(ii) pour $p+q = 0$ et $p \geq 1$ $E_2^{p,q} = H^p\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big)$

(iii) pour $p+q = 1$ $E_2^{p,q} = H^{p+1}\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big)$

Lorsque X est de dimension finie ou si les groupes d'homotopie de la fibre sont nuls à partir d'un certain rang, cette suite spectrale converge, pour $p+q \leq 0$, vers le bigradué associé aux groupes $\pi_{-(p+q)}\big(E^\sharp_B(X)\big)$.

La différentielle de cette suite spectrale vérifie:

THÉORÈME 3.2. *Soit $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ un fibré, l'espace total X étant 1-connexe et la fibre F connexe. Pour $i \geq 0$, la différentielle*

$$d_2^{p-i}\colon H^{p-i}\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big) \longrightarrow H^{p+2-i}\big(X^{(p+1)}, \pi_{p+1}(F)\big)$$

de la suite spectrale du théorème 3.1 vérifie:

$$d_2^{p-i} = \Sigma^i \eta_{p+1}(F) + \eta_{p+1}^2 \smile$$

où $\Sigma^i \eta_{p+1}(F)$ *désigne la i-ème suspension de l'opération cohomologique d'Eilenberg* $\eta_{p+1}(F) \in H^{p+2}\big(\pi_p(F), p, \pi_{p+1}(F)\big)$ *et* $\eta_{p+1}^2 \in H^2\Big(X, \mathrm{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big)$ *est la classe introduite au paragraphe 1.*

PREUVE. On déduit le théorème 3.2 de la proposition 2.4 en remarquant que modulo les isomorphismes:

$$\pi_i\big(E^\sharp_{X^{(p)}}(X^{(p+1)})\big) \simeq \pi_i\Big(\mathrm{Hom}\Big(X^{(p)}, K\big(\pi_p(F), p\big)\Big)\Big) \simeq H^{p-i}\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big)$$

la différentielle de la suite spectrale des équivalences fibrées est donnée, ([DI 85], corollaire 3.4):

- pour $i > 0$, par l'opérateur bord de la suite exacte d'homotopie de la fibration (2).
- pour $i = 0$, par la classe de l'application classifiante $\bar{\eta}$.

COROLLAIRE 3.3. *Si le fibré $F \longrightarrow X \longrightarrow B$ admet une section et si les espaces B et F sont* 1*-connexes, on a:*

$$d_2^{p-i} = \Sigma^i \eta_{p+1}(F) + \eta_{p+1}^2(F) \smile + b_{p+1}^2 \smile$$

où

$$\eta_{p+1}^2(F) \in H^2\Big(F, \mathrm{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big) \quad \textit{et} \quad b_{p+1}^2 \in H^2\Big(B, \mathrm{Hom}\big(\pi_p(F), \pi_{p+1}(F)\big)\Big)$$

sont respectivement définis par le crochet de Whitehead de F, $\pi_2(F) \otimes \pi_p(F) \longrightarrow \pi_{p+1}(F)$ *et le Brace-product du fibré,* $\pi_2(B) \otimes \pi_p(F) \longrightarrow \pi_{p+1}(F)$.

En prenant B réduit à un point, on a en particulier:

COROLLAIRE 3.4. *Soit X un espace 1-connexe, la différentielle d_2 de la suite spectrale convergeant vers les groupes d'homotopie* $\pi_*\big(E^\sharp(X)\big)$ *est donnée par:*

$$d_2^{p-i} = \Sigma^i \eta_{p+1}(X) + \eta_{p+1}^2(X) \smile$$

où $\eta_{p+1}^2(X) \in H^2\Big(X, \mathrm{Hom}\big(\pi_p(X), \pi_{p+1}(X)\big)\Big)$ *est définie par le crochet de Whitehead*

$$\pi_2(X) \otimes \pi_p(X) \longrightarrow \pi_{p+1}(X).$$

REMARQUE 3.5. Rappelons que d'après Federer et Shih [FE 56], [SH 63], les groupes d'homotopies $\pi_i\big(\mathrm{Hom}(X,X), *\big)$ de la composante connexe de l'application constante de l'espace $\mathrm{Hom}(X,X)$ sont, pour X de dimension finie et $i > 0$, limite d'une suite spectrale commençant en:

$$E_2^{p,q} = H^p\big(X, \pi_{-q}(X)\big), \quad p+q \leq 0,\ p \geq 0$$

et de différentielle $d_2^{p-i} = \Sigma^i \eta_{p+1}^0$. Le corollaire 3.4 montre que la différentielle de la suite spectrale des équivalences de X s'obtient en ajoutant à celle de Federer Shih un $\smile$-produit défini par le crochet de Whitehead de X.

4. **Suite spectrale associée à $\pi_0\big(E(X)\big)$.** Pour calculer les groupes $\pi_0\big(E(X)\big)$ on utilise une suite spectrale obtenue en modifiant les termes de degré total 0 et 1 de la suite spectrale du théorème 3.1. Plus précisément, [SH 63], [DI 85]:

PROPOSITION 4.1. *Soit X un espace 1-connexe. On a une suite spectrale non abélienne limitée:*

(i) pour $p+q<0$ et $p\geq 0$, $E_2^{p,q}=H^p\big(X,\pi_{-q}(F)\big)$

(ii) pour $p+q=0$ et $p\geq 1$, on a une suite exacte

$$0\longrightarrow H^p\big(X^p,\pi_p(X)\big)\longrightarrow E_2^{p,-p}\longrightarrow \operatorname{Aut}\pi_p(X)_{\xi_p}\longrightarrow 1$$

où $\operatorname{Aut}\pi_p(X)_{\xi_p}$ est le sous groupe de $\operatorname{Aut}\pi_p(X)$ laissant invariant le p-ème invariant de Postnikov ξ_p de X.

(iii) pour $p+q=1$, $E_2^{p+1,-p}=H^{p+1}\big(X^p,\pi_p(X)\big)\big/\operatorname{Aut}\pi_p(X)$.

Si X est de dimension finie ou d'homotopie finie cette suite spectrale converge vers $\pi_*\big(E(X)\big)$.

Rappelons que $\eta_{p+1}(X)$ est l'opération d'Eilenberg (définition 1.1) et que $\eta_{p+1}^2(X)\in H^2\Big(X,\operatorname{Hom}\big(\pi_p(X),\pi_{p+1}(X)\big)\Big)$ est défini par le crochet de Whitehead de X.

LEMME 4.2. *Supposons que X soit un* CW*-complexe* 1*-connexe.*

1. Si l'homomorphisme d'Hurewicz $\pi_p(X)\longrightarrow H_p(X)$ est nul, on a $E_2^{p,-p}=H^p\big(X;\pi_p(X)\big)$ et la différentielle d_2^p est induite par $\eta_{p+1}(X)+\eta_{p+1}^2(X)\smile$

2. Si $E_2^{p,-p}=\operatorname{Aut}\big(\pi_p(X)\big)_{\xi_p}$, $d_2(u)=0$, pour $u\in\operatorname{Aut}\big(\pi_p(X)\big)_{\xi_p}$, si et seulement si $u^*\big(\eta_{p+1}(X)\big)\equiv\eta_{p+1}(X)\bmod.\ \operatorname{Aut}\big(\pi_{p+1}(X)\big)$

3. Si X est $(c-1)$-connexe, $E_3^{c,-c}=\Big\{u\in\operatorname{Aut}\big(\pi_c(X)\big)\Big|u^*(\eta_{c+1})\equiv\eta_{c+1}\bmod.\ \operatorname{Aut}\big(\pi_{c+1}(X)\big)\Big\}$.

4. $E_2^{p+1,-p}=0$ dès que $p>d$ où d est la dimension de X.

PREUVE DU LEMME 4.2. Rappelons d'abord que par construction de la suite spectrale, on a $E_2^{p,-p}=\pi_0\big(E_{X^p}(X^{p+1})\big)$.

1. Résulte classiquement des constructions suivantes (*cf.* [GR-MO]). Dans une décomposition de Postnikov de l'espace X, la paire (X^p,X) est p-connexe et on a les isomorphismes:

$$\pi_p(X)\cong H_{p+1}\big((X^p,X)\big);\quad H^{p+1}\big(X^p,X;\pi_p(X)\big)\cong\operatorname{Hom}\big(\pi_p(X),\pi_p(X)\big).\tag{5}$$

qui entrent dans le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & & & \\
H^p(X^p;\pi_p) \arrow[r] & H^p(X;\pi_p) \arrow[r, "\Xi"] \arrow[d, "\psi"'] & H^{p+1}(X^p,X;\pi_p) \arrow[r] & H^{p+1}(X;\pi_p) \\
 & \operatorname{Hom}\big(H_p(X),\pi_p\big) \arrow[r, "h^*"] & \operatorname{Hom}(\pi_p,\pi_p) \arrow[u, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1994-011-4 Published online by Cambridge University Press

où π_p désigne $\pi_p(X)$, ψ est la projection de la suite exacte des coefficients universels. Le p-ème invariant de Postnikov ξ_p est l'image de l'identité sur $\pi_p(X)$ par le morphisme Ξ.

2 et 3. La suite spectrale des équivalences est une suite spectrale non abélienne limitée, c'est-à-dire qu'on s'intéresse seulement aux noyaux succesifs de la différentielle d_r: $E_2^{p,-p} \longrightarrow E_r^{p+r,-p-r+1}$, [LE 82]. Les termes $E_2^{p+1,-p}$ sont construits de manière que la suite

$$\pi_0\big(E(X^{p+1})\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(X^p)\big) \longrightarrow E_2^{p+1,-p}$$

soit exacte. La différentielle

$$d_2\colon E_2^{p-1,-p+1} = \pi_0\big(E_{X^{p-1}}(X^p)\big) \longrightarrow E_2^{p+1,-p} = H^{p+1}\big(X^p; \pi_p(X)\big) \big/ \mathrm{Aut}\big(\pi_p(X)\big)$$

associe à la classe $[f] \in \pi_0\big(E_{X^{p-1}}(X^p)\big)$ d'une équivalence $f\colon X^p \longrightarrow X^p$ l'obtruction définie de la manière suivante: soit $\xi_p \in H^{p+1}\big(X^p; \pi_p(X)\big)$ le p-ème invariant de Postnikov de X alors $d_2([f]) \in H^{p+1}\big(X^{(p)}, \pi_p(F)\big) \big/ \mathrm{Aut}\,\pi_p(X)$ est l'orbite de $f^*\xi_p$ modulo $\mathrm{Aut}\big(\pi_p(X)\big)$. En particulier $d_2([f]) = 0$ si, et seulement si, $f^*\xi_p$ et ξ_p sont dans la même orbite.

Si X est $(c-1)$-connexe, 3) en résulte immédiatement. Plus généralement, la classe de f s'identifie au morphisme u induit par f sur $\pi_p(X)$. On déduit alors 2 du diagramme commutatif ci-dessous.

$$\begin{tikzcd}
K\big(\pi_p(X), p\big) \arrow[r, "u"] \arrow[d] & K\big(\pi_p(X), p\big) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
X^{p+1} \arrow[r, "f"] & X^{p+1} \arrow[r, "\xi_{p+1}"] & K\big(\pi_{p+1}(X), p+2\big)
\end{tikzcd}$$

dans lequel la flêche oblique est l'opération d'Eilenberg η_{p+1}.

4) se déduit du théorème d'Arkowitz-Curjel rappelé ci-dessous.

THÉORÈME 4.3 ([AR-CU]). *Soit X un* CW-*complexe de dimension finie d, on a alors un isomorphisme naturel*

$$\pi_0\big(E(X)\big) \cong \pi_0\big(E(X^{d+1})\big)$$

Au niveau de la dimension, sous des hypothèses assez naturelles, on a en plus:

PROPOSITION 4.4. *Soit $X = D^d \cup_a M$ un* CW-*complexe simplement connexe obtenu par l'attachement d'une d-cellule sur un* CW-*complexe M de dimension au plus $d-2$.*

1. L'homomorphisme de Hurewicz, $\pi_d(X) \longrightarrow H_d(X)$ est nul si, et seulement si, a n'est pas de torsion.

2. Si la classe d'attachement $a \in \pi_{d-1}(M)$ est sans torsion on peut supposer $E_2^{d+1,-d} =$ 0.

PREUVE. La partie 1 résulte du diagramme commutatif suivant, où la ligne du milieu est la suite exacte d'homotopie de la paire (X, M).

$$\begin{array}{ccccc}
H_d(X) & \xrightarrow{\cong} & H_d(X,M) & & \\
{\scriptstyle h_d}\uparrow & & \cong\uparrow & & \\
\pi_d(X) & \longrightarrow & \pi_d(X,M) & \longrightarrow & \pi_{d-1}(M) \\
 & & \cong\uparrow & & a\uparrow \\
 & & \pi_d(D^d, S^{d-1}) & \xrightarrow{\cong} & \pi_{d-1}(S^{d-1}) \cong \mathbf{Z}
\end{array}$$

La partie 2 est un corollaire de la surjectivité de la deuxième suite exacte de la proposition suivante.

PROPOSITION 4.5. *Soit $X = D^d \cup_a M$ un* CW*-complexe simplement connexe obtenu par l'attachement d'une d-cellule sur un* CW*-complexe M de dimension au plus $d-2$.*

1. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \pi_0\big(E(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(X^{d-1})\big) \cong \pi_0\big(E(M)\big).$$

2. Si la classe d'attachement $a \in \pi_{d-1}(M)$ est sans torsion, on a

$$\pi_0\big(E(X)\big) \cong \pi_0\big(E(X^{d+1})\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(X^d)\big) \cong \pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a} \longrightarrow 0$$

où $\pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$ est le sous-groupe de $\pi_0\big(E(M)\big)$ laissant $a \in \pi_{d-1}(M)$ invariant au signe près.

PREUVE DE LA PROPOSITION 4.5. Les propriétés suivantes sur la tour de Postnikov de X se déduisent facilement des relations (5) et (6). On a des isomorphismes $\pi_i(X) \cong \pi_i(M)$, si $i \leq d-2$. La suite $\mathbf{Z} \cong \pi_d(X,M) \xrightarrow{a} \pi_{d-1}(M) \xrightarrow{\xi_{d-1}} \pi_{d-1}(X) \longrightarrow 0$, est exacte et si a est sans torsion, la suite $\pi_{d+1}(X,M) \longrightarrow \pi_d(M) \longrightarrow \pi_d(X) \longrightarrow 0$, est exacte. L'inclusion $M \longrightarrow X$ induit une équivalence $M^{d-1} \simeq X^{d-1}$. On a les isomorphismes naturels

$$\pi_{d-1}(M) \cong H_d(M^{d-1}, M) \cong H_d(M^{d-1}) \cong H_d(X^{d-1}). \tag{7}$$

1. L'équivalence $X^{d-1} \simeq M^{d-1}$, donne un isomorphisme

$$\pi_0\big(E(X^{d-1})\big) \cong \pi_0\big(E(M^{d-1})\big)$$

puis on applique le théorème d'Arkowitz-Curjel à M de dimension au plus $d-2$. Comme X n'a pas de cellules de dimension $d-1$, on a, d'après le lemme 4.2.1, la relation $\pi_0\big(E_{X^{d-1}}(X^d)\big) = E_2^{d-1,-d+1} = 0$. L'injectivité de

$$\pi_0\big(E(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(X^{d-1})\big) \cong \pi_0\big(E(M)\big)$$

se déduit alors de l'exactitude de la suite

$$0 = \pi_0\big(E_{X^{d-1}}(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(X^{d-1})\big)$$

2. Montrons que l'image de $\pi_0\big(E(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(M)\big)$ est contenue dans $\pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$. Une équivalence de X^d induit un automorphisme de la suite exacte

$$\mathbf{Z} \cong \pi_d(X,M) \xrightarrow{a} \pi_{d-1}(M) \xrightarrow{\xi_{d-1}} \pi_{d-1}(X) \longrightarrow 0$$

donc, puisque a est sans torsion, un automorphime du noyau $\mathbf{Z}a$ de générateur a, qui est ainsi transformé en lui-même au signe près. La surjectivité de $\pi_0\big(E(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$ résultera de la construction d'un relèvement ensembliste de $\pi_0\big(E(X)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$. On a $\pi_0\big(E(S^{d-1})\big) \cong \mathbf{Z}_2 = \{+,-\}$ où + et $-$ représentent chacun une équivalence de S^{d-1}, d'orientation convenable, et se prolongent en des applications encore notée $\pm\colon D^d \longrightarrow D^d$. On peut considérer l'application d'attachement $a\colon S^{d-1} \longrightarrow M$ comme une inclusion. Soit $f\colon M \longrightarrow M$ une équivalence laissant invariante la classe a au signe près. Alors f est homotope dans $\mathrm{Hom}(M,M)$ à une application de la paire, $g\colon (M,S^{d-1}) \longrightarrow (M,S^{d-1})$ telle que $g\circ a = \pm a$. En effet, il suffit de considérer la fibration $\mathrm{Hom}(M,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(S^{d-1},M)$ de projection $\varphi \longrightarrow \varphi\circ a$. L'homotopie $f\circ a \simeq \pm a$ est un chemin dans la base se relevant en un chemin de f à g qui vérifie alors $g\circ a \simeq \pm a$. Le signe de $\pm a$ est déterminé par $\pm a = \pi_{d-1}(f)(a)$. On étend g par l'application

$$f_1\colon X = D^d \cup_{S^{d-1}} M \xrightarrow{\pm\cup g} D^d \cup_{S^{d-1}} M = X.$$

Le morphisme $H_*(f_1)$ est un automorphisme de $H_*(X)$. C'est évidemment vrai pour $* \leq d-1$, puisqu'alors $H_*(f_1) = H_*(f)$ et f est une équivalence. D'autre part par construction $H_d(f_1) = \pm$. Donc f_1 est une équivalence sur X.

Il résulte de ceci que $\pi_0\big(E(X)\big) \cong \pi_0\big(E(X^{d+1})\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$ est une application surjective. Comme elle se factorise par $\pi_0\big(E(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$ cette dernière l'est également, d'où la surjectivité de $\pi_0\big(E(X^d)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E(M)\big)^{\pm a}$ ce qui achève de montrer la proposition.

5. **Relations entre opérations d'Eilenberg et application de Hopf. Exemple.** Exprimons les opérations d'Eilenberg d'un espace X en fonction des opérations homotopiques, suspensions de l'opération de Hopf $\theta \in \pi_3(S^2)$, et de l'opération SQ_2, générateur de $H^2(\mathbf{Z},\mathbf{Z}_2)$, qui est l'opération d'Eilenberg stable de la sphère (S^*).

PROPOSITION 5.1. *Soient X un espace simplement connexe et $\eta_{p+1}(X) \in H^2\big(\pi_p(X),\pi_{p+1}(X)\big)$ la $(p+1)$-ème opération d'Eilenberg de X. Alors, pour $p > 2$, le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} H^{p-j}(X)\otimes\pi_p(X) & \xrightarrow{\mathrm{SQ}_2\otimes\Sigma^{p-2}\theta} & H^{p+2-j}(X,\mathbf{Z}_2)\otimes\mathrm{Hom}\big(\mathbf{Z}_2,\pi_{p+1}(X)\big) \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\Psi}\big\downarrow \\ H^{p-j}\big(X,\pi_p(X)\big) & \xrightarrow{\Sigma^j\eta_{p+1}(X)} & H^{p+2-j}\big(X,\pi_{p+1}(X)\big) \end{array}$$

Pour $p=2$, on a un diagramme similaire en remplaçant la première ligne par le morphisme:

$$H^2(X)\otimes\pi_2(X) \xrightarrow{\eta_3(S^2)\otimes\theta} H^4(X,\mathbf{Z})\otimes\mathrm{Hom}\big(\mathbf{Z},\pi_3(X)\big).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1994-011-4 Published online by Cambridge University Press

C'est à dire que, pour tout $\alpha \in H^{p-j}(X)$ et $\beta \in \pi_p(X)$, on a, pour $p > 2$, la relation:

$$\Sigma^j \eta_{p+1}(X)\Phi(\alpha \otimes \beta) = \Psi\big(\mathrm{SQ}_2(\alpha) \otimes (\beta \circ \Sigma^{p-2}\theta)\big)$$

(resp. $\Phi\Sigma^j\eta_3(X)(\alpha \otimes \beta) = \Psi\big(\eta_3(S^2)(\alpha) \otimes \beta \circ \theta\big)$).

PREUVE. Montrons la proposition pour $p > 2$, le cas $p = 2$ se traitant de manière analogue. Soit $\beta \in \pi_p(X)$. Comme $\Sigma^{*-2}\theta$ est générateur de $\pi_{*+1}(S^*)$ on a la relation:

$$\beta \circ \Sigma^{*-2}\theta = \beta_*(1_{\pi_{*+1}(S^*)})$$

L'application $\beta\colon S^p \longrightarrow X$ induit le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
(S^p)^{p+2}_{p+1} \simeq K(\mathbf{Z}_2, p+1) \arrow[r, "\beta\circ\Sigma^{p-2}\theta"'] \arrow[d] & K\big(\pi_{p+1}(X), p+1\big) \simeq X^{p+2}_{p+1} \arrow[d] \\
(S^p)^{p+2} \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d] & X^{q+2}_q \arrow[d] \\
(S^p)^{p+1} \simeq K(\mathbf{Z}, p) \arrow[r, "\beta_*"'] & K\big(\pi_p(X), p\big) \simeq X^{p+1}_p
\end{tikzcd}$$

Il en résulte la compatibilité suivante entre les applications classifiantes des deux fibrés verticaux du diagramme ci-dessus:

$$\begin{tikzcd}
K(\mathbf{Z}, p) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "\eta_{p+1}(S^p)"'] & K\big(\pi_p(X), p\big) \arrow[d, "\eta_{p+1}(X)"] \\
K(\mathbf{Z}_2, p+2) \arrow[r, "\beta\circ\Sigma^{p-1}\theta"] & K\big(\pi_{p+1}(X), p+2\big)
\end{tikzcd}$$

La commutativité de ce diagramme entraîne la relation de la proposition.

EXEMPLE 5.2 (*cf.* [CO-HA]). Prenons pour X une variété de dimension 4 simplement connexe et dont le 2-ème groupe d'homologie soit de rang $r > 0$. Alors X a le type d'homotopie d'un bouquet M de r sphères de dimension 2 sur lequel on attache une cellule de dimension 4 par une application $a \in \pi_3(B)$. Rappelons:

LEMME 5.3. *L'application d'attachement a n'est pas de torsion.*

PREUVE. Comme on le voit sur le diagramme ci-dessous, la suite exacte d'homologie de la paire (X_3, X) induit une suite exacte courte scindée naturellement par la forme d'intersection $\cap$ déduite de la dualité de Poincaré.

$$\begin{tikzcd}
H_2(X) \otimes H_2(X) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "\cap"'] & H_2(X^3) \otimes H_2(X^3) \arrow[d, "P"', "\cong"] & \\
\mathbf{Z} \cong H_0(X) \cong H_4(X) \arrow[r, "a"] & H_4(X^3) \cong \pi_3(M) \arrow[r, "\eta_3"] & H_4(X^3, X) \cong \pi_3(X)
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, P est le produit de Pontrjagin de $X^3 = K(\mathbf{Z}^r, 2)$, l'application η_3 est l'invariant d'Eilenberg de X et, par conséquent, $\eta_3 \circ P$ s'identifie au produit de Whitehead (théorème 1.4). La forme d'intersection définit un relèvement du produit de Pontrjagin de $K(\mathbf{Z}^r, 2)$, c'est à dire que, modulo les isomorphismes ci-dessus, on a dans $H_4(X^3)$ la décomposition:

$$P = \cap \oplus [\,,].$$

LEMME 5.4. *Dans la suite spectrale des équivalences de X on a:*

$$E_2^{3,-3} = 0; \quad E_2^{4,-4} = \pi_4(X); \quad E_2^{5,4} = 0; \quad E_3^{2,-2} = \mathrm{Aut}\big(H_2(X), \pm\cap\big).$$

où $\mathrm{Aut}(H_2(X), \pm\cap)$ *est le groupe des automorphismes de* $H_2(X)$ *laissant invariant, au signe près, la forme d'intersection.*

PREUVE. Les trois premières égalités résultent respectivement de 4.2.1, 4.4.2 . La dernière utilise 4.2.3. Considérons les isomorphismes suivants:

$$H_2(X) \otimes H_2(X) \xrightarrow{\cong} H_4(X^3) \xrightarrow{\cong} H_4(X) \oplus \pi_3(X)$$

où le premier est induit par le produit de Pontrjagin de X^3 et le deuxième est donné par le lemme 5.2. L'invariant d'Eilenberg $\eta_3(X)$ est la projection sur le deuxième facteur. L'action de $u \in \mathrm{Aut}\big(H_2(X)\big)$ sur $\eta_3(X)$ est le composé $\eta_3(X) \circ u \otimes u$. Modulo P on peut représenter $u \otimes u$ par une matrice

$$u \otimes u = \begin{pmatrix} \alpha & v \\ \gamma & w \end{pmatrix}$$

où les coefficients s'interprêtent de manière naturelle. La condition

$$\eta_3(X) \circ u \otimes u \equiv \eta_3(X) \quad \big(\mathrm{mod.}\ \mathrm{Aut}\,\pi_3(X)\big)$$

implique $\gamma = 0$. Alors α est un inversible de $\mathbf{Z}$ ce qui signifie que u respecte, au signe près, la forme d'intersection. On en déduit la suite exacte de [CO-HA] prolongée à gauche:

PROPOSITION 5.5. *On a une longue suite exacte,*

$$\longrightarrow H^2(X,\mathbf{Z}) \otimes \pi_{n+3}(X) \xrightarrow{d_2} \pi_{n+4}(X) \longrightarrow \pi_n\big(E'(X)\big) \longrightarrow H^2(X,\mathbf{Z}) \otimes \pi_{n+2}(X) \xrightarrow{d_2} \cdots$$
$$\longrightarrow H^2(X,\mathbf{Z}) \otimes \pi_3(X) \xrightarrow{d_2} \pi_4(X) \longrightarrow \pi_0\big(E(X)\big) \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(H_2(X), \pm\cap\big) \longrightarrow 0,$$

dans laquelle $E'(X)$ *désigne l'espace des équivalences pointées et l'application* d_2 *vérifie:*

$$d_2(\alpha^* \otimes \beta) = w_2(\alpha)(\beta \circ \Sigma^{n+1}\theta) + [\alpha, \beta]$$

où $w_2 \in H^2(X, \mathbf{Z}_2)$ *est la deuxième classe de Stiefel-Whitney de X et* $\alpha = \alpha^* \cap [X]$, $[X]$ *étant la classe fondamentale de la variété X.*

PREUVE. Dans la suite spectrale associée à l'homotopie $\pi_*\big(E'(X)\big)$ des équivalences pointées on a $E_2^{0,q} = 0$. D'après 5.4 les termes de cette suite spectrale sont situés sur

https://doi.org/10.4153/CJM-1994-011-4 Published online by Cambridge University Press

deux colonnes. La suite exacte de la proposition est la suite exacte associée dans laquelle l'application $d_2\colon H^2\big(X,\pi_{n+3}(X)\big) \longrightarrow H^4\big(X,\pi_{n+4}(X)\big)$ est donnée par (théorème 3.2) $d_2(c) = \Sigma^{n+1}\eta_4(X)\circ c + \eta_4^2 \cup c$, (théorème 3.2). Via les isomorphismes

$$H^2\big(X,\pi_{n+3}(X)\big) \cong H^2(X,\mathbf{Z})\otimes \pi_{n+3}(X) \quad \text{et} \quad H^4\big(X,\pi_{n+4}(X)\big) \xrightarrow{\cap[X]} \pi_{n+4}(X)$$

et en utilisant la proposition 5.1, on obtient

$$\begin{aligned} d_2(\alpha^*\otimes\beta) &= \Big(\Psi\big(\mathrm{SQ}_2(\alpha^*)\otimes\beta\circ\Sigma^{n+1}\theta\big) + \eta_4^2 \bigcup(\alpha^*\otimes\beta)\Big)\cap[X] \\ &= \big(\mathrm{SQ}_2(\alpha^*)\cap[X]\big)\beta\circ\Sigma^{n+1}\theta + \eta_4^2\bigcap\big((\alpha^*\cap[X])\otimes\beta\big) \\ &= w_2(\alpha)(\beta\circ\Sigma^{n+1}\theta) + [\alpha,\beta]. \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

6. **Première différentielle non nulle.** Nous allons montrer, sous des hypothèses convenables de connexité, que les résultats du théorème 3.2 s'étendent à la première différentielle non nulle.

Soit un entier r tel que $0 < r \leq n$. Par analogie avec ce qui précède nous appellerons également invariant d'Eilenberg le $(n+r)$- ième invariant de Postnikov de la fibre X_{n+1}^{n+r} du fibré $X^{n+r} \longrightarrow X^{n+1}$. On note cet invariant $\eta_{n+1,n+r} \in H^{n+r+1}\big(X_{n+1}^{n+r},\pi_{n+r}(X)\big)$. On dit que X est cohomologiquement trivial en degré i si $H^i(X,G) = 0$ pour tout groupe de coefficients G.

LEMME 6.1. *Si X est cohomologiquement trivial pour les degrés compris strictement entre n et $n+r$ avec $0 < r \leq n$, la projection de X_{n+1}^{n+r} sur son premier système de Postnikov $K(\pi_{n+1}(X),n+1)$ induit un isomorphisme*

$$\pi_1\big(\mathrm{Hom}(X^{n+r},X_{n+1}^{n+r})\big) \simeq H^n\big(X,\pi_{n+1}(X)\big).$$

PREUVE. Les groupes $\pi_*\big(\mathrm{Hom}(X^{n+r},X_{n+1}^{n+r})\big)$ sont limite d'une suite spectrale de Shih, [SH 63], commençant en $E_2^{p,q} = H^p\big(X^{n+1},\pi_{-q}(X_{n+1}^{n+r})\big)$. Or sous les hypothèses du lemme cette suite spectrale vérifie:

$$E_2^{n,-(n+1)} = H^n\big(X^{n+r},\pi_{n+1}(X)\big) = E_\infty^{n,-(n+1)} = H^n\big(X,\pi_{n+1}(X)\big)$$

d'où le lemme.

L'invariant d'Eilenberg $\eta_{n+1,n+r}$ définit une opération

$$\Sigma\eta_{n+1,n+r}\colon H^n\big(X,\pi_{n+1}(X)\big) \longrightarrow H^{n+r}\big(X^{n+r},\pi_{n+r}(X)\big)$$

par la composée des applications

$$\begin{array}{ccc} H^n\big(X,\pi_{n+1}(X)\big) & \longrightarrow & \pi_1\big(\mathrm{Hom}(X^{n+r},X_{n+1}^{n+r})\big) \\ {\scriptstyle \eta_{n+1,n+r}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle l_*} \\ H^{n+r}\big(X^{n+r},\pi_{n+r}(X)\big) & \xrightarrow{\simeq} & \pi_1\Big(\mathrm{Hom}\big(X^{n+r},K\big(\pi_{n+r}(X),n+r+1\big)\big)\Big) \end{array}$$

où l_* est induit par le composé avec un représentant de l'invariant d'Eilenberg $\eta_{n+1,n+r}$. Supposons X $(n-1)$-connexe, le produit de Whitehead $\pi_n(X)\otimes\pi_p(X) \longrightarrow \pi_{p+n-1}(X)$ détermine une classe $\eta_p^n \in H^n\Big(X,\mathrm{Hom}\big(\pi_p(X),\pi_{p+n-1}(X)\big)\Big)$. La proposition suivante s'obtient alors par une démonstration analogue à celle du théorème 3.2:

PROPOSITION 6.2. *Soit X un espace (n -1)-connexe et cohomologiquement trivial pour les degrés compris strictement entre n et n+r avec* $0 < r \leq n$. *Alors la différentielle*

$$d_r \colon H^n\big(X, \pi_{n+1}(X)\big) \longrightarrow H^{n+r}\big(X^{n+r}, \pi_{n+r}(X)\big)$$

de la suite spectrale associée à l'homotopie $\pi_*\big(E^\sharp(X)\big)$ *du monoïde des équivalences induisant l'identité sur les groupes d'homotopie de X vérifie*

$$\text{si } r < n, \quad d_{r-1} = \Sigma\eta_{n+1,n+r} \quad \text{et pour} \quad r = n,\ d_{n-1} = \Sigma\eta_{n+1,2n} + \eta_n^n \smile.$$

Terminons par un exemple qui correspond au cas où la première différentielle non nulle dépend seulement du crochet de Whitehead. Pour $X = S^n \times S^n$, $n \geq 2$, la suite spectrale convergeant vers $\pi_*\big(E^\sharp(X)\big)$ donne la suite exacte

$$\mathrm{Hom}\big(\pi_n(X), \pi_{n+1}(X)\big) \xrightarrow{d_n} H^{2n}\big(X^{2n}, \pi_{2n}(X)\big) \longrightarrow \pi_0\big(E^\sharp(X)\big) \longrightarrow 0$$

la différentielle d_n étant calculée par la proposition 6.2. Le groupe $H^{2n}\big(X^{2n}, \pi_{2n}(X)\big)$ s'identifie à $\pi_{2n}(X)$ car c'est le noyau du morphisme:

$$H^{2n}\big(X, \pi_{2n}(X)\big) = \mathrm{Hom}\big(H_{2n}(X), \pi_{2n}(X)\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\pi_{2n}(X), \pi_{2n}(X)\big)$$

induit par l'homomorphisme de Hurewicz $\pi_{2n}(X) \longrightarrow H_{2n}(X)$, [DI 85]. Ce dernier est nul car $\pi_{2n}(X)$ est de torsion et $H_{2n}(X)$ est libre. D'autre part l'opération d'Eilenberg $\eta_{n+1,2n}$ associée à X se décompose en somme directe des opérations d'Eilenberg du même type associées à chaque facteur S^n. Celles-ci, à valeurs dans $H^{2n}\big((S^n)^{(2n)}, \pi_{2n}(S^n)\big)$ sous-groupe de $H^{2n}\big(S^n, \pi_{2n}(S^n)\big) = 0$ sont évidemment nulles. Donc d_n s'identifie au cup-produit par la classe définie par le crochet de Whitehead $\pi_n(S^n) \otimes \pi_{n+1}(S^n) \longrightarrow \pi_{2n}(S^n)$. On retrouve le résultat de P. J. Kahn ([KA 66], [KA 69], théorème 4 et [SA 75], théorème 2.6):

$$\pi_0\big(E^\sharp(S^n \times S^n)\big) = \pi_{2n}(S^n)/[i_n, i_{n+1}] \oplus \pi_{2n}(S^n)/([i_n, i_{n+1}])$$

où i_n (resp. i_{n+1}) est le générateur du groupe $\pi_n(S^n)$ (resp. $\pi_{n+1}(S^n)$). On a le résultat explicite, [KA 66]:

$$\pi_0\big(E^\sharp(S^n \times S^n)\big) = \begin{cases} \pi_{2n}(S^n) \oplus \pi_{2n}(S^n) & \text{si } n = 2, 6 \text{ ou } 3 \pmod 4 \\ \pi_{2n}(S^n)/\mathbf{Z} \oplus \pi_{2n}(S^n)/\mathbf{Z} & \text{sinon.} \end{cases}$$

RÉFÉRENCES

[AR 71] M. Arkowitz, *Whitehead products as images of Pontrjagin products*, Trans. Amer. Math. Soc. (2) **158**(1971), 453–463.

[AR-CU] M. Arkowitz et C. R. Curjel, *Groups of homotopy classes*, Lecture Notes in Math. **4**(1964).

[BO 72] A. K. Bousfield et D. M. Kan, *Homotopy limits completions and localisations*, Lecture Notes in Math. **304**(1972).

[CO-HA] T. D. Cochran et N. Habegger, *On the homotopy of simply connected four manifolds*, Topology (4) **29**(1990), 419–440.

https://doi.org/10.4153/CJM-1994-011-4 Published online by Cambridge University Press

[DI 85] G. Didierjean, *Homotopie de l'espace des équivalences fibrées*, Ann. Inst. Fourier (3) **35**(1985), 33–47.

[DI 92] ———, *Homotopie de l'espace des équivalences d'homotopie*, Trans. Amer. Math. Soc. (1) **330**(1992), 153–163.

[FE 56] H. Federer, *A study of function spaces by spectral sequence*, Trans. Amer. Math. Soc. **82**(1956), 340–361.

[GR-MO] P. A. Griffiths and J. W. Morgan, *Rational Homotopy Theory and Differential Forms*, Birkhauser **16**, 1981.

[JA 70] I. M. James, *On the decomposability of fibre spaces*, Lecture Notes in Math. **168**(1970), 125–134.

[KA 66] P. J. Kahn, *Self-equivalences of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc. (3) **72**(1966), 562–566.

[KA 69] ———, *Self-equivalences of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds*, Math. Ann. **180**(1969), 26–47.

[LE 82] A. Legrand, *Homotopie des espaces de sections*, Lecture Notes in Math. **941**(1982).

[MA 67] P. May, *Simplicial objects in algebraic topology*, Van Nostrand, 1967.

[ME 60] P. Meyer, *Whitehead products and Postnikov systems*, Amer. J. Math. **82**(1960), 271–280.

[SA 90] K. Saaidia, *Brace-produit et suites spectrales en homotopie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **311**(1990), 361–364.

[SA 75] N. Sawashita, *On the group of self-eqivalences of the product of spheres*, Hiroshima Math. J. **5**(1975), 69–86.

[SC 73] R. Schultz, *Decompositions of equivariant Function Spaces*, Math. Z. **131**(1973), 49–75.

[SH 63] W. Shih, *Classes d'applications d'un espace dans un groupe topologique*, Seminaire H. Cartan, (1963–1964), exp. 6.

[SH 64] W. Shih, *On the group $\mathcal{E}(X)$ of equivalences maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **492**(1964), 361–365.

[YA 86] K. Yamaguchi, *The group of Self homotopy equivalences of S^2-bundles over S^4*, Kodai Math. J. **9**(1986), 308–326.

IRMA Strasbourg
URA CNRS 1
Université Louis Pasteur
7 rue René Descartes
F–67084 Strasbourg, cédex
France

Laboratoire de Topologie et Géométrie
URA CNRS 1408
Université Paul Sabatier
118 route de Narbonne
F–31062 Toulouse, cédex
France