A. Meril
Nagoya Math. J.
Vol. 105 (1987), 129-146

PROBLÈMES D'INTERPOLATION DANS DES ESPACES D'ULTRADISTRIBUTIONS DE TYPE ROUMIEU

ALEX MERIL

Introduction

Nous avons étudié en [12] des problèmes d'interpolation dans des espaces de fonctions holomorphes sur un cône ouvert convexe de sommet l'origine dans C^n, la croissance de ces fonctions étant contrôlée à l'infini. Nous nous intéressons maintenant à un espace plus petit en imposant en outre un contrôle de croissance à l'origine dans le cas où le cône est strict.

Comme il est classique (cf. [1], [2], [11], [12], [19]) afin de résoudre nos problèmes d'interpolation, il est nécessaire d'utiliser des résultats de L^2-Estimation et de résolution du $\bar{\partial}$. Les théorèmes usuels de Hörmander ([6], [8]) ne suffisent pas car les espaces "de type L^2" qu'on doit considérer sont ici $F.S^*$ (ce sont des limites projectives avec fléches faiblement compactes d'espaces L^2 usuels). Des théorèmes de résolution du $\bar{\partial}$ dans des espaces du type $F.S^*$ existent depuis quelques années (cf. Kawai [9] et de Roever [16]). Le théorème de de Roever ([16] théorème 7.3) qui nous intéresse ici est de preuve manifestement incompléte. Récemment des preuves complètes ont été fournies par Y. Saburi [17] et l'auteur [11]. Il nous parut intéressant de présenter les divers énoncés de résolution du $\bar{\partial}$ dans ce type d'espace. L'idée de leur démonstration est simple: Comme ces espaces sont des limites projectives, on applique les résultats de L^2-Estimation et de résolution du $\bar{\partial}$ de Hörmander ([6], [8]) à chaque terme des limites projectives, on doit donc prouver qu'une limite projective de suites exactes est encore exacte, ce qu'on fait en passant au dual et en utilisant des résultats de Serre-Komatsu et de Hörmander.

Soient Γ un cône ouvert convexe de sommet l'origine de C^n, $\mathscr{A}$ une fonction convexe positivement homogène d'ordre un sur Γ et $\tilde{M}$ une fonction convexe décroissante sur $]0, +\infty[$ telle que $\tilde{M}(0) = \infty$ et $\tilde{M}(\infty) =$

Received December 30, 1985.

https://doi.org/10.1017/S0027763000000799 Published online by Cambridge University Press

0. Le couple $(\Gamma, \mathscr{A})$ détermine de manière biunivoque un convexe fermé ne contenant pas de droite réelle de $\boldsymbol{C}^n$ qu'on note $\Omega(\Gamma, \mathscr{A})$. Nous étudions l'espace des fonctions holomorphe sur Γ contrôlées en $\exp(\mathscr{A}(z))$ à l'infini et en $\operatorname{Exp}(\tilde{M}(k|z|))$ à l'origine dans le cas où Γ est strict. Cet espace de fonctions holomorphes est isomorphe par la transformation de Fourier à un espace de germes de fonctions holomorphes dans des voisinages spéciaux de $\Omega(\Gamma, \mathscr{A})$, ces fonctions holomorphes sont à croissance contrôlée à l'infini. Si $\Gamma = \boldsymbol{R}^n + iC$ où C est un cône ouvert convexe de $\boldsymbol{R}^n$, les fonctions précédentes ont pour valeur au bord des ultradistributions de type Roumieu (cf. [16]).

Nous étudions dans ces espaces des systèmes d'équation de convolution comme en [1], [2], [3], [11], [12] et [19] afin d'étendre le principe fondamental de Ehrenpreis-Palamodov à ces divers espaces dans le cas d'opérateurs plus généraux que des opérateurs aux dérivées partielles. Signalons que l'étude de système d'E.D.P. dans ces espaces est faite dans [16].

Nous caractérisons les générateurs de ces espaces de fonctions holomorphes et étudions des problèmes de prolongement de solution d'équations de convolution.

Nous tenons à remercier le professeur C.A. Berenstein pour avoir attiré notre attention sur ce problème et pour les nombreux conseils qu'il nous a prodigués. Nous remercions le professeur R. Gay pour son aide, son encouragement et ses conseils nombreux et utiles.

§0. Rappels et définitions élémentaires

Soit U un ouvert de $\boldsymbol{C}^n$, $\mathscr{H}(U)$ désigne l'anneau des fonctions holomorphes dans U. Si P est un poids, sur U (i.e. une fonction continue à valeurs réelles) alors $\mathscr{H}(U; P)$ désignera l'espace de Banach suivant:

$$\mathscr{H}(U; P) = \{f \in \mathscr{H}(U) \colon \sup_{z \in U} |f(z)| \exp(-P(z)) < +\infty\}$$

Dans toute la suite (et sauf mention explicite du contraire) un cône Γ sera toujours un cône ouvert convexe de $\boldsymbol{C}^n$ de sommet l'origine, différent de $\boldsymbol{C}^n$, et $\mathscr{A}$ sera une fonction convexe positivement homogène de degré un sur Γ, une telle fonction sera dite une fonction d'appui sur Γ. Si Γ est un cône, nous noterons $\operatorname{pr}\Gamma$ la projection de Γ sur la sphère unité S^{2n-1} de $\boldsymbol{C}^n = \boldsymbol{R}^{2n}$ (i.e. $\operatorname{pr}\Gamma = \Gamma \cap S^{2n-1}$).

Le résultat suivant est bien connu

0.1 Lemme ([15]). *A tout convexe fermé Ω, non compact de $\boldsymbol{C}^n$ ne*

https://doi.org/10.1017/S0027763000000799 Published online by Cambridge University Press

contenant aucune droite réelle, correspond un cône Γ de C^n et une fonction d'appui $\mathscr{A}$ sur Γ de telle sorte que

$$\Omega = \Omega(\Gamma, \mathscr{A}) = \{z \in C^n / -\operatorname{Im}\langle z, \xi\rangle \leq \mathscr{A}(z), \forall z \in \Gamma\}.$$

(avec $\langle z, \xi\rangle = z_1\xi_1 + \cdots + z_n\xi_n$). Réciproquement, tout cône Γ et toute fonction d'appui $\mathscr{A}$ sur Γ déterminent par la formule précédente, un convexe fermé non borné de C^n, ne contenant aucune droite réelle.

On dit, dans ce cas, que Ω et $(\Gamma, \mathscr{A})$ sont en dualité.

Si Γ est un cône et Γ' un sous-cône de Γ, on dit que Γ' est un sous-cône relativement compact de Γ et on note $\Gamma' \subset\subset \Gamma$ si $\operatorname{pr}\Gamma' \subset\subset \operatorname{pr}\Gamma$. Une famille $(\Gamma_k)_{k\geq 1}$ de sous-cônes de Γ sera dite une exhaustion de Γ, si $\Gamma_k \subset\subset \Gamma_{k+1} \subset\subset \Gamma$ et si $\Gamma = \bigcup_k \Gamma_k$.

Pour $(\Gamma, \mathscr{A})$ donné, si $(\Gamma_k)_k$ est une exhaustion de Γ, les ensembles suivants sont des voisinages "coniques" de $\Omega(\Gamma, \mathscr{A})$

$$\Omega_{k,c} = \Omega\left(\Gamma_k, \mathscr{A}(z) + \frac{1}{k}|z|\right).$$

Soit M une fonction continue, croissante sur R^+ telle que $M(0) = 0$ et $M(\infty) = \infty$. Nous supposerons de plus que M est dérivable sur $]0, +\infty[$, que M' (fonction dérivée de M) est strictement croissante, que la fonction $x \to xM'(x)$ croisse et tende vers l'infini avec x et aussi que les deux conditions suivantes sont vérifiées.

$$\int_1^{+\infty} \frac{M(x)}{x^2}\, dx < +\infty \tag{1}$$

il existe $\tau > 1$ et $K > 0$ tels que

$$2M(x) \leq M(\tau x) + K \text{ pour tout } x > 0. \tag{2}$$

Sous ces conditions, on définit la fonction conjuguée $\tilde{M}$ de M (cf. [14]) par

$$\tilde{M}(y) = \sup_{x>0}(M(x) - yx).$$

On sait (cf. [16]) que $\tilde{M}$ est une fonction convexe décroissante que $\tilde{M}(\infty) = 0$, $\tilde{M}(0) = \infty$ et que M s'obtient à partir de $\tilde{M}$ par la formule

$$M(x) = \inf_{y>0}\{\tilde{M}(y) + yx\}.$$

Exemple. Si $M(x) = x^\alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ alors $\tilde{M}(y) = \text{cte } y^{\alpha/(\alpha-1)}$. Remarquons que la condition (2) implique qu'il existe $\tau' > 1/2$ et $K > 0$ tels que

$$(3) \qquad 2\tilde{M}(\tau' y) \leq \tilde{M}(y) + K \text{ pour tout } y > 0 .$$

Dans toute la suite M sera une fonction continue croissante vérifiant toutes les propriétés précédentes et $\tilde{M}$ sera sa fonction conjuguée.

Nous allons définir les espaces $\mathrm{Exp}_\alpha [\Gamma, \mathscr{A}; \tilde{M}]$ et $\mathscr{H}_\alpha(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M)$ qui nous seront utiles pour la suite. Nous aurons

$$\mathscr{H}'_\alpha(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M) \simeq \mathrm{Exp}_\alpha [\Gamma, \mathscr{A}; \tilde{M}] .$$

Les espaces $\mathscr{H}_\alpha(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M)$ sont des espaces de germes de fonctions holomorphes au voisinage de $\Omega(\Gamma, \mathscr{A})$ à croissance controlée à l'infini. Nous prendrons $\alpha = \varepsilon$ ou c. L'indice ε voulant dire qu'on prend des ε-voisinages de Ω, l'indice c sera pour des voisinages coniques.

0.2 DÉFINITION ([16]). *Soient Γ un cône de $\mathbf{C}^n$, $\mathscr{A}$ une fonction d'appui sur Γ et $(\Gamma_k)_k$ une exhaustion de Γ. Pour $\alpha = \varepsilon$ ou c et z_0 fixé sur* $\mathrm{pr}\,\Gamma$, *les espaces suivants sont indépendants du point z_0 choisi sur* $\mathrm{pr}\,\Gamma$ *ainsi que de l'exhaustion $(\Gamma_k)_k$ de Γ:*

$$\mathrm{Exp}_\alpha [\Gamma, \mathscr{A}; \tilde{M}] = \varprojlim_{k\geq 1} \mathscr{H}\left(\Gamma^k_\alpha, \mathscr{A}^k_\alpha(z) + \frac{1}{k} z_0 + \tilde{M}(k|z|)\right)$$

et

$$\mathscr{H}_\alpha(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M) = \varinjlim_{k\geq 1} \mathscr{H}\left[\mathring{\Omega}_{k,\alpha}, -M\left(\frac{|\xi|}{k}\right)\right]$$

avec $\Gamma^k_c = \Gamma_k$, $\Gamma^k_\varepsilon = \Gamma_k \cup \{(1/k)z_0 + \Gamma\}$, $\mathscr{A}^k_c(z) = \mathscr{A}(z)$ et

$$\mathscr{A}^k_\varepsilon(z) = \mathscr{A}\left(z - \frac{1}{2k} z_0\right)$$

pour $z \in (1/k)z_0 + \Gamma$ (on prolonge $\mathscr{A}^k_\varepsilon$ en une fonction convexe sur $\bar{\Gamma}$),

$$\Omega_{k,c} = \Omega\left(\Gamma_k, \mathscr{A}(z) + \frac{1}{k}|z|\right)$$

et enfin $\Omega_{k,\varepsilon} = \Omega(\Gamma, \mathscr{A}(z) + (1/k)|z|)$.

Les espaces $\mathrm{Exp}_\alpha [\Gamma, \mathscr{A}, \tilde{M}]$ (pour $\alpha = \varepsilon$ ou c) sont du type F.N. On munit $\mathscr{H}_\alpha(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M)$ de sa topologie naturelle de limite inductive.

Remarquons que pour $z \in \Gamma$, la fonction $\xi \to \exp(i\langle z, \xi\rangle) = e_z(\xi)$ est élément de $\mathscr{H}_\alpha(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M)$, de sorte que pour $\mu \in \mathscr{H}_\alpha(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M)$ on peut

https://doi.org/10.1017/S0027763000000799 Published online by Cambridge University Press

définir la transformée de Fourier $\mathscr{F}(\mu)$ de μ par $\mathscr{F}(\mu)(z) = \langle \mu, e_z \rangle$. Il est évident que $\mathscr{F}(\mu)$ est élément de $\mathrm{Exp}_\alpha[\Gamma, \mathscr{A}; \tilde{M}]$ et on obtient le

0.3 THÉORÈME ([16]). *La transformation de Fourier établit un isomorphisme topologique entre* $\mathscr{H}'_\alpha(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M)$ *et* $\mathrm{Exp}_\alpha[\Gamma, \mathscr{A}; \tilde{M}]$ *pour* $\alpha = \varepsilon$ *ou c.*

Nous nous intéressons par la suite uniquement au cas oú $\alpha = c$, des résultats analogues peuvent s'établir dans le cas ε. Nous ne le ferons pas.

0.4 DEFINITION ET THÉORÈME ([15], [16]). *Soient* Γ *un cône de* C^n *et* $\mathscr{A}$ *une fonction d'appui sur* Γ. *Soient* $(\Gamma_k)_k$ *une exhaustion de* Γ, *on note* $\Gamma(k) = \Gamma_k \cap \{\xi \in C^n \,|\, |\xi| > 1/k\}$. *On note* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, \mathscr{A})$ *l'espace de Fréchet nucléaire suivant*

$$\mathrm{Exp}_c(\Gamma, \mathscr{A}) = \varprojlim_{k \geq 1} \mathscr{H}\left(\Gamma(k), \mathscr{A}(z) - \frac{1}{k}|z|\right).$$

Et

$$\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}) = \varinjlim_{k \geq 1} \mathscr{H}\left(\mathring{\Omega}_{k,c}, -\frac{|z|}{k}\right).$$

La transformation de Fourier établit un isomorphisme topologique entre $\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}))$ *et* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, \mathscr{A})$.

Remarques. On a $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, \mathscr{A}; \tilde{M}) \subset \mathrm{Exp}_c(\Gamma, \mathscr{A})$, cela vient du fait que $\tilde{M}$ est borné sur $[1, +\infty[$.

Si $f \in \mathrm{Exp}_c[\Gamma, \mathscr{A}; \tilde{M}]$ alors $(\partial f/\partial z_j) \in \mathrm{Exp}_c[\Gamma, \mathscr{A}; \tilde{M}]$ pour $1 \leq j \leq n$: il suffit par dualité de voir que l'espace $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, \mathscr{A}); M)$ est un module sur l'anneau des fonctions polynomiales en n variables, ce qui est évident compte tenu du fait que la fonction $x \to xM'(x)$ tend vers l'infini en croissant avec x.

Si $f \in \mathscr{H}(\Gamma)$ est tel que pour $m \in N^*$ fixé, on ait pour tout $\varepsilon > 0$, tout $k \in N^*$, il existe une constante positive $C(k, m, \varepsilon)$ tel que

$$|f(z)| \leq C(k, m, \varepsilon) \exp(\varepsilon|z| + m\tilde{M}(k|z|)) \quad \text{pour tout } z \in \Gamma_k$$

alors $f \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0; \tilde{M})$. En effet quitte à augmenter m, on peut supposer que $m = 2^p$ et l'appartenance de f à $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0; \tilde{M})$ provient du fait qu'il existe $\tau > 1/2$ et $K > 0$ tel que pour tout p on ait

$$2^p\tilde{M}(\tau^p y) \le \tilde{M}(y) + (2^p - 1)K .$$

§ 1. Fonctions moyenne-périodiques de $\mathscr{H}_c(\Gamma^*; M)$

Nous noterons Γ^* le cône dual de Γ i.e. $\Gamma^* = \Omega(\Gamma, 0)$. Remarquons que la croissance de M et la condition (3) entraîne que l'espace $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0; \tilde{M})$ est une algèbre. En effet, puisque M est croissante, quitte à augmenter τ dans l'inégalité (2), on peut supposer que τ est un entier pair ≥ 4 donc que τ' intervenant dans l'inégalité (3) est un entier ≥ 2.

Soient donc f et g deux éléments de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0; \tilde{M})$ alors pour tout p, il existe $A_p > 0$ tel que pour tout $z \in \Gamma_p$, on ait

$$|f(z)| \le A_p \exp\left(\frac{1}{p}|z| + \tilde{M}(p|z|)\right)$$

et

$$|g(z)| \le A_p \exp\left(\frac{1}{p}|z| + \tilde{M}(p|z|)\right).$$

Prenons τ' entier ≥ 2, et pour k fixé posons $p = k\tau'$ alors pour $z \in \Gamma_k$, on a

$$|f(z)g(z)| \le B_k \exp\left(\frac{1}{k}|z| + \tilde{M}(k|z|)\right)$$

avec $B_k = A_p^2 \exp(K)$.

Puisque $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0; \tilde{M})$ est une algèbre, $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*, M)$ est une algèbre de convolution, donc pour $\mu \in \mathscr{H}'_c(\Gamma^*; M)$ et $f \in \mathscr{H}_c(\Gamma^*; M)$, on peut définir l'élément $\mu * f$ de $\mathscr{H}_c(\Gamma^*; M)$.

Remarquons que pour ξ voisin de Γ^*, l'élément $\mu * f$ de $\mathscr{H}_c(\Gamma^*, M)$ se définit aussi par

$$\mu * f(\xi) = \langle \mu, \tau_\xi(f) \rangle \text{ où } \tau_\xi(f)\colon z \to f(z + \xi) \quad \text{(cf. [11])}.$$

On dit que la fonction $f \in \mathscr{H}_c(\Gamma^*; M)$ est moyenne périodique s'il existe $\mu \in \mathscr{H}'_c(\Gamma^*; M) \backslash \{0\}$ tel que $\mu * f = 0$.

L'étude des fonctions moyenne-périodiques de $\mathscr{H}_c(\Gamma^*;\ M)$ se ramenant à celle des idéaux fermés de $\mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0, \tilde{M}]$, pour examiner les idéaux, nous aurons besoin de la notion de m-uplet de fonctions doucement décroissantes au sens de Berenstein-Taylor.

Soit $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_l)$, un l-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$. Pour

$\varepsilon > 0$, $\alpha \geq 0$ et $k \in N^*$ on notera

$$S(\rho; k, \varepsilon, \alpha) = \{z \in \Gamma_k \,|\, |\rho(z)| < \varepsilon \exp(-\tilde{M}(k|z|) - \alpha|z|)\}$$

avec $|\rho(z)|^2 = \sum_j |\rho_j(z)|^2$.

Regardons d'abord le cas d'un l-uplet $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_l)$ de fonctions de $\mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ avec l quelconque si $n = 1$ et $l = n$ si $n \geq 2$.

1.1 Definition. *Soit $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_l)$ un l-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$. Nous dirons que ρ est doucement décroissant s'il existe une exhaustion $(\Gamma_k)_{k \geq 1}$ de Γ, un nombre réel positif A et quatre suites de nombres réels positifs $(\varepsilon_k)_k$, $(\alpha_k)_k$, $(B_k)_k$ et $(K_k)_k$ ($\varepsilon_k > 0, \forall k, \alpha_k \downarrow 0$ et $\varepsilon_k \uparrow$) tels que l'ensemble $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ ait toutes ses composantes connexes relativement compactes, de plus si z et z' sont dans la même composante connexe, on a*

$$\tilde{M}(k|z|) \leq \tilde{M}(k|z'|) + K_k \tag{4}$$

$$|z| \leq A|z'| + B_k\,. \tag{5}$$

Lorsque la condition (5) est remplacée par la condition "les composantes connexes de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ sont de diamètres uniformèment majorés", nous dirons que le l-uplet de fonctions $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_l)$ est faiblement doucement décroissant.

Pour un l-uplet $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_l)$ de fonctions de $\mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ nous noterons $I(\rho)$ l'idéal engendré dans $\mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ et $I_{\mathrm{loc}}(\rho)$ l'idéal local engendré qui est fermé. Rappelons que $I_{\mathrm{loc}}(\rho)$ set l'ensemble des fonctions f de $\mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ telles que pour tout $z \in \Gamma$, il existe un ouvert U contenant z et l fonctions holomorphes dans U, $g_1, \cdots, g_l$ tels que

$$f_{|U} = \sum_{j=1}^{l} g_j \rho_{j|U}$$

1.2 Proposition. *Si $l = n = 1$, on a $I_{\mathrm{loc}}(\rho) = I(\rho)$.*

Preuve. Soit $f \in \mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ telle que $h = f/\rho \in \mathscr{H}(\Gamma)$. Pour k fixé, considérons $p > k$ (p sera précisé dans la suite), Comme $f \in \mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$, il existe $C_p > 0$ telle que pour $z \in \Gamma_p$ on ait

$$|f(z)| \leq C_p \exp\left(\tilde{M}(p|z|) + \frac{1}{p}|z|\right)$$

donc pour z sur la frontière de $S(\rho; p, \varepsilon_p, \alpha_p)$, on a

$$|h(z)| \leq \frac{C_p}{\varepsilon_p} \exp\left(2\tilde{M}(p|z|) + \left(\alpha_p + \frac{1}{p}\right)|z|\right).$$

Soit Ω une composante connexe de $S(\rho; p, \varepsilon_p, \alpha_p)$, par le principe du maximum, on a pour $\xi \in \Omega$

$$|h(\xi)| \leq \frac{C_p}{\varepsilon_p} \sup_{z \in \partial\Omega} \exp\left(2\tilde{M}(p|z|) + \left(\alpha_\rho + \frac{1}{p}\right)|z|\right)$$

d'oú

$$|h(\xi)| \leq \frac{C'_p}{\varepsilon_p} \exp\left(2\tilde{M}(p|\xi|) + A\left(\alpha_p + \frac{1}{p}\right)|\xi|\right)$$

avec $C'_p = C_p \exp(2K_p + B_p(\alpha_p + 1/p))$.

Quitte à augmenter la constante τ' de (3), on peut prendre $p = k\tau$ de sorte que:

$$2\tilde{M}(p|\xi|) \leq \tilde{M}(k|\xi|) + K$$

et

$$A\left(\alpha_p + \frac{1}{p}\right) \leq \frac{1}{K}$$

d'où

$$|h(\xi)| \leq \frac{C_p}{\varepsilon_p} \exp\left(\tilde{M}(k|\xi|) + \frac{1}{k}|z|\right)$$

pour

$$\xi \in S(\rho; p, \varepsilon_p, \alpha_p) \cap \Gamma_k \supset S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k).$$

Ce même type d'inégalité étant évident sur $\Gamma_k \backslash S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ on a donc $h \in \mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$. □

Nous voulons étendre le résultat précédent, toujours dans le cas discret lorsque $n \geq 2$. Pour cela il faut reprendre la preuve originelle de [2] (voir aussi [18]), en utilisant la formule d'interpolation de Jacobi, ce qui est toujours possible. Il faut aussi étudier la résolution du $\bar{\partial}$ pour des courants à coefficients dans ${}^{\mathscr{A}}\mathscr{L}_{2,\tilde{M}}$ défini par

$${}^{\mathscr{A}}\mathscr{L}_{2,\tilde{M}}(\Gamma \coprod \mathrm{pr}\,\Gamma) = \{f \in \mathscr{L}_{2,\mathrm{loc}}(\Gamma) | \forall k \in N^*,$$

on a

$$\int_{\Gamma_k} |f(z)|^2 \exp\left\{\left(\mathscr{A}(z) - \frac{1}{k}|z| - \tilde{M}(k|z|)\right) d\lambda(z) < +\infty\right\}$$

où λ désigne la mesure de Lebesgue sur C^n. Une telle résolution est faite dans le théorème 7.3 de [16] dont la preuve est quelque peu incomplète. Des preuves complètes existent depuis voir [11] et [17].

Pour la commodité du lecteur, il nous est paru intéressant de rappeler avec nos notations ces divers théorèmes. Nous renvoyons aux auteurs concernés pour les preuves.

Nous commençons par le théorème 7.3 de [16]. Soit Ω un ouvert pseudo-convexe de C^n tel que $\Omega = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \Omega_k$ avec $\Omega_k = \{z \in \Omega \mid \sigma(z) \leq k)\}$ où σ est une fonction plurisousharmonique dans Ω. Soit $\Phi = (\Phi_k)_k$ une suite décroissante de fonctions plurisousharmoniques dans Ω telle que pour tout k, tout $p > k$ et tout $m \in N^*$, il existe $C(k, p, m) \in R$ et une fonction $\varphi_{k,p}$ holomorphe dans Ω telle que

$$\operatorname{Re} \varphi_{k,p}(z) \leq -m\{\Phi_k(z) - \Phi_p(z)\} + C(k, p, m) \quad \text{pour tout } z \in \Omega.$$

Notons pour $j = 1, 2$

$$L_2^{p,q+j-1}(\Omega_m, 2\Phi_k + 2(2-j)\log(1+|z|^2))$$

l'espace des $(p, q+j-1)$-formes à coefficients dans

$$\begin{aligned} &L_2(\Omega_m, 2\Phi_k + 2(2-j)\operatorname{Log}(1+|z|^2)) \\ &= \left\{f \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega_m) \,\middle|\, \int_{\Omega_m} |f(z)|^2 \exp(-2\Phi_k(z) \right. \\ &\qquad \left. - 2(2-j)\operatorname{Log}(1+|z|^2)) d\lambda(z) < +\infty \right\} \end{aligned}$$

(en suivant les notations de Hörmander ([6], [8])) et

$$L_2^{p,q+j-1}(\Omega, \Phi) = \varinjlim_k L_2^{p,q+j-1}(\Omega_k, 2\Phi_k + 2(2-j)\log(1+|z|^2))$$

c'est un espace du type $F.S^*$. On a alors le

1.3 THÉORÈME ([16]). *Pourtout $g \in L_2^{p,q+1}(\Omega, \Phi)$ tel que $\bar\partial g = 0$ ($\bar\partial$ est défini au sens des distributions), il existe $f \in L_2^{p,q}(\Omega, \Phi)$ tel que $\bar\partial f = g$.*

Notons D^{2n} le compactifié sphérique de C^n obtenu par adjonction d'une sphère S_∞^{2n-1} à l'infini:

$$S_\infty^{2n-1} = \{U_\infty \mid U \in S^{2n-1}\}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000799 Published online by Cambridge University Press

et $D^{2n} = C^n \coprod S_\infty^{2n-1}$ (union disjointe). La topologie de D^{2n} est la suivante:

i) Un système fondamental de voisinages d'un point $U_\infty \in S_\infty^{2n-1}$ est constitué des ensembles de la forme $(z+\Gamma)\coprod(\mathrm{pr}\,\Gamma)_\infty$ où $z \in C^n$, Γ est un cône de C^n tel que $U_\infty \in (\mathrm{pr}\,\Gamma)_\infty$ (i.e. $U \in \mathrm{pr}\,\Gamma$).

ii) Un système fondamental de voisinages d'un point $x \in C^n$ est formé des boules ouvertes contenant x.

De sorte que D^{2n} est homéomorphe à la boule unité fermée de C^n.

Soit K_0 un convexe compact de C^n contenant l'origine, et soit $\mathscr{A} = H_{K_0}$ sa fonction d'appui i.e.

$$H_{K_0}(z) = \sup_{\xi \in K_0} - \operatorname{Im} \langle z, \xi \rangle.$$

Nous choisissons K_0 de sorte que $\mathscr{A}$ soit de classe $\mathscr{C}^1$ dans $C^n \setminus \{0\}$. Lorsque Ω est un ouvert de D^{2n}, on note ${}^{K_0}\mathscr{L}_2^{p,q}(\Omega)$ l'espace des (p, q)-formes différentielles à coefficients dans ${}^{K_0}\mathscr{L}_2(\Omega)$ où

$$\begin{gathered}{}^{K_0}\mathscr{L}_2(\Omega) = \{f \in L_{2,\mathrm{loc}}(\Omega \cap C^n) \mid \forall K \subset\subset \Omega, \forall \varepsilon > 0 \\ \int_{K \cap C^n} |f(z)|^2 \exp\{(-\mathscr{A}(z) - \varepsilon |z|) d\lambda(z) < +\infty\}.\end{gathered}$$

Plus généralement et en suivant [16], lorsque φ est une fonction plurisousharmonique sur $\Omega \cap C^n$, on note ${}^{\varphi}\mathscr{L}_2^{p,q}(\Omega)$ l'espace obtenu en remplaçant $\mathscr{A}(z)$ par $\varphi(z)$ dans la définition de ${}^{K_0}\mathscr{L}_2^{p,q}(\Omega)$.

Soit U un ouvert de C^n, on dit que U possède la propriété (P) s'il est connexe et s'il existe une fonction holomorphe φ dans U telle que pour tout $\delta > 0$ on ait

$$\sup_{z \in U} (-\operatorname{Re} \varphi(z) + \delta |z|) < +\infty.$$

Avec ces notions, on a le

1.4 Théorème ([11]). *Soient Ω un ouvert de $D^{2n} \setminus \{0\}$, σ une fonction strictement plurisousharmonique de classe $\mathscr{C}^2$ dans $\Omega \cap C^n$. Soient $L_j = \{z \in \Omega \cap C^n | \sigma(z) < j)$ et K_j l'adhérence de L_j dans D^{2n} de telle sorte que $\mathring{K}_j \cap C^n = L_j$. On suppose que le bord de L_j, $\partial L_j = \{z \in \Omega \cap C^n | \sigma(z) = j)$ est de classe $\mathscr{C}^2$, que la famille $(K_j)_j$ forme une exhaustion de Ω et que $\Omega \cap C^n$ vérifient la propriété* (P). *La suite*

$${}^{K_0}\mathscr{L}_2^{p,0}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} {}^{K_0}\mathscr{L}_2^{p,1}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} {}^{K_0}\mathscr{L}_2^{p,n}(\Omega) \longrightarrow 0$$

est exacte.

Nous allons voir que ce théorème permet d'obtenir une résolution d'un faisceau sur D^{2n} "prolongeant" le faisceau des fonctions holomorphes.

Notons pour Ω ouvert de D^{2n},

$$^{K_0}\mathcal{O}(\Omega) = \{f \in \mathscr{H}(\Omega \cap C^n) | \forall K \subset\subset \Omega$$

$$\forall \varepsilon > 0 \sup_{z \in K \cap C^n} |f(z) \exp(-\mathscr{A}(z) - \varepsilon|z|)| < +\infty\},$$

de même si φ est une fonctions sur C^n, nous noterons $^{\varphi}\mathcal{O}(\Omega)$ l'espace obtenue en remplaçant $\mathscr{A}(z)$ par $\varphi(z)$ dans la définition de $^{K_0}\mathcal{O}(\Omega)$. Remarquons que $^{K_0}\mathcal{O}$ définit un faisceau sur D^{2n} dont la restriction à C^n est le faisceau usuel des germes de fonctions holomorphes sur C^n, il en est de même (avec une définition évidente) si φ est une fonction plurisousharmonique car une fonction semi-continue supérieurement est bornée sur tout compact.

Si on note $^{K_0}\mathscr{H}^{p,q}$ le faisceau défini par

$$^{K_0}\mathscr{H}^{p,q}(\Omega) = \{f \in {}^{K_0}\mathscr{L}_2^{p,q}(\Omega) | \bar{\partial} f \in {}^{K_0}\mathscr{L}_2^{p,q}(\Omega)\}$$

de même pour $^{\varphi}\mathscr{H}^{p,q}$. Ces faisceaux étant mous, on a le

1.5 Corollaire ([11]). *Les faisceaux $^{K_0}\mathscr{H}^{p,q}$ forment une résolution de "Dolbeault" de $^{K_0}\mathcal{O}^{p,0}$ i.e.*

$$0 \longrightarrow {}^{K_0}\mathcal{O}^{p,0} \longrightarrow {}^{K_0}\mathscr{H}^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} {}^{K_0}\mathscr{H}^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} {}^{K_0}\mathscr{H}^{p,n} \longrightarrow$$

est une suite exacte de faisceaux.

Pour énoncer l'analogue de [17] des théorèmes 1.3 et 1.4 nous aurons besoin de rappeler que: un ouvert Ω de D^{2n} est dit aigu s'il existe $A > 0$ tel que

$$\sup_{z \in \Omega \cap C^n} \frac{|\mathrm{Im}\, z|}{|\mathrm{Re}\, z| + A} < 1. \tag{6}$$

En suivant [17], nous dirons qu'un ouvert V de D^{2n} est $\mathcal{O}_{\mathrm{inc}}$-pseudo-convexe s'il est aigu et s'il existe une fonction strictement plurisousharmonique p $\mathscr{C}^\infty$ sur $V \cap C^n$ telle que

i) $\{z \in V \cap C^n | p(z) < c\} \subset\subset V \quad \forall c \in R$

ii) $\sup_{z \in K \cap C^n} p(z) < +\infty \quad \forall K \subset\subset V.$

1.6 Théorème ([17)]. *Soit V un ouvert de D^{2n}, $\mathcal{O}_{\mathrm{inc}}$-pseudo-convexe, φ une fonction plurisousharmonique sur $V \cap C^n$ alors la suite*

https://doi.org/10.1017/S0027763000000799 Published online by Cambridge University Press

$$ {}^{\varphi}\mathscr{L}_2^{p,0}(V) \xrightarrow{\bar\partial} {}^{\varphi}\mathscr{L}_2^{p,1}(V) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} {}^{\varphi}\mathscr{L}_2^{p,n}(V) \longrightarrow 0 $$

est exacte.

Disons qu'une fonction φ sur $\boldsymbol{C}^n$ est à variation linéaire s'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$ |\varphi(z) - \varphi(z')| < \mathrm{A} \text{ pour } z \text{ et } z' \in \boldsymbol{C}^n \text{ tels que } |z - z'| < 1. $$

Exemple. $\varphi(z) = H_{K_0}(z)$ où K_0 est un convexe compact de $\boldsymbol{C}^n$.

1.7 Corollaire ([17]). *Soit φ une fonction plurisousharmonique à variation linéaire sur $\boldsymbol{C}^n$. On a une résolution molle des faisceaux ${}^{\varphi}\mathcal{O}^p$:*

$$ 0 \longrightarrow {}^{\varphi}\mathcal{O}^p \longrightarrow {}^{\varphi}\mathscr{H}^{p,1} \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} {}^{\varphi}\mathscr{H}^{p,n} \longrightarrow 0\,. $$

Remarques. Les théorèmes 1.3, 1.4 et 1.6 sont de preuves assez analogues. On doit résoudré un opérateur $\bar\partial$ dans une limite projective, on utilise les théorèmes de résolution du $\bar\partial$ de Hörmander dans chaque terme de la limite projective et il faut ensuite prouver qu'une limite projective de suite exacte est encore exacte. Ce qu'on fait en passant au dual et en utilisant des résultats de Komatsu, Serre-Komatsu et de Hörmander. Il faut aussi prouver que l'opérateur qu'on trouve en passant à la limite inductive dans l'espace dual est le transposé de l'opérateur $\bar\partial$ qu'on avait dans la limite projective. Cette dernière partie n'était pas effectuée dans [16].

La condition $V \cap \boldsymbol{C}^n$ aigu intervenant dans le théorème 1.6 est due uniquement au fait que si $V \cap \boldsymbol{C}^n$ est aigu, il vérifie alors la propriété (P).

Nous sommes donc amener à dire qu'un ouvert Ω de $\boldsymbol{D}^{2n}$ est $\boldsymbol{D}^{2n}$-pseudoconvexe si $\Omega \cap \boldsymbol{C}^n$ vérifie la propriété (P) et s'il existe une fonction strictement plurisousharmonique p de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\Omega \cap \boldsymbol{C}^n$ telle que

i) $\{z \in \Omega \cap \boldsymbol{C}^n | p(z) < c\} \subset\subset \Omega \qquad \forall c \in \boldsymbol{R}$

ii) $\sup_{z \in K \cap \boldsymbol{C}^n} p(z) < \infty \qquad \forall K \subset\subset \Omega.$

Pour répondre à une question de [17], on a le:

1.8 Théorème. *Soit Ω un ouvert $\boldsymbol{D}^{2n}$-pseudo-convexe, φ une fonction plurisousharmonique sur $\Omega \cap \boldsymbol{C}^n$ alors la suite*

$$ {}^{\varphi}\mathscr{L}_2^{p,0}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} {}^{\varphi}\mathscr{L}_2^{p,1}(\Omega) \xrightarrow{\bar\partial} \cdots \xrightarrow{\bar\partial} {}^{\varphi}\mathscr{L}_2^{p,n}(\Omega) \longrightarrow 0 $$

est exacte.

Preuve. C'est la même que celle de [17], voir aussi [11].

Pour revenir à notre problème, nous allons prouver que lorsque Γ et $\tilde{M}$ sont convenablement choisis, les hypothèses du théorème 1.3 sont vérifiées.

Prenons $\tilde{M}(y) = y^{-\gamma}$ avec $0 < \gamma < +\infty$.

Nous nous intéressons uniquement au cas où $n = 1$, dans le cas où $n \geq 2$, il suffit comme en [11] de prendre un produit cartésien.

Si $0 < \gamma \leq 1$ on prend pour Γ un secteur angulaire ouvert d'ouverture $< \Pi/2$, si $\gamma > 1$ on prend un secteur d'ouverture $\Pi/2\gamma$.

Dans ce cas la suite de fonctions plurisousharmoniques

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{k}|z| + \tilde{M}(k|z|)$$

vérifie les conditions du théorème 1.3 (voir [11] et [15]).

Nous allons maintenant prouver que $I_{\mathrm{loc}}(\rho) = I(\rho)$ lorsque $n \geq 2$ et $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n)$ est doucement décroissant. Nous supposerons donc pour la suite que Γ et la suite de fonctions plurisousharmoniques

$$\Phi_k(z) = \frac{1}{k}|z| + \tilde{M}(k|z|)$$

vérifie les conditions du théorème 1.3.

1.9 THÉORÈME. $(n \geq 2)$. *Soit $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_n)$ un n-uplet de fonctions de* $\mathrm{Exp}_c\,[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ *doucement décroissant et tel que la condition* (4) *de* 1.1 *soit remplacée par la suivante: il existe $(K_k')_k$ suite de réels positifs tels que si z et ζ sont dans la même composante connexe de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ et* $t \in [0, 1]$, *on a*

$$\tilde{M}(k|(1-t)\zeta + tz|) \leq \tilde{M}(k((1-t)|\zeta| + t|z|)) + K_k\,. \tag{7}$$

sous ces conditions, on a $I_{\mathrm{loc}}(\rho) = I(\rho)$.

Preuve. Les conditions de 1.1 impliquent que la variété des zéros de ρ, $V(\rho) = \{z \in \Gamma \mid \rho_j(z) = 0, 1 \leq j \leq n\}$ est discrète.

Soit $\lambda \in I_{\mathrm{loc}}(\rho)$, le théorème B de Cartan assure l'existence de n fonctions $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ holomorphes dans Γ et telles qu'on ait $\lambda = \sum_{j=1}^n f_j \rho_j$. Il nous faut maintenant modifier les fonctions f_j pour obtenir la bonne croissance tout en conservant l'égalité précédente.

Puisque $\lambda \in \mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$, pour tout $k \geq 1$, il existe une constante C_k telle que pour $z \in \Gamma_k$, on ait

$$|\lambda(z)| \leq C_k \exp\left(\frac{1}{k}|z| + \tilde{M}(k|z|)\right).$$

L'inégalité (5) prouve que si Ω est une composante connexe de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ et $z \in \Omega$, il existe des constantes positives C_k et D_k telles que

$$\int_\gamma |d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n| \leq C_k \exp(D_k|z|) \tag{8}$$

où γ est le bord distingué de Ω (cf [2] dont nous suivons les notations). Pour la preuve de (8), nous renvoyons à [12].

Il faut ensuite appliquer la proposition 1.3 de [2] donc il faut trouver des fonctions $Q_{i,j}(\zeta, z)$ (où $(\zeta, z) \in \Gamma^2$) ayant des majorations convenables et telles que

$$\rho_i(\zeta) - \rho_i(z) = \sum_{j=1}^{n} Q_{i,j}(\zeta, z)(\zeta_j - z_j) \qquad (1 \leq i \leq n)$$

Nous prendrons

$$Q_{i,j}(\zeta, z) = \int_0^1 \frac{\partial \rho_i}{\partial \zeta_j}((1-t)\zeta + tz)\, dt\,,$$

remarquons que, puisque $\mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ est stable par action des dérivations partielles $\partial/\partial\zeta_j$ et que Γ est convexe, la fonction $Q_{i,j}$ est bien définie et est holomorphe dans $\Gamma \times \Gamma$ et à la bonne croissance. En effet comme $(\partial\rho_i/\partial\zeta_j) \in \mathrm{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$, pour tout k, il existe $C_k > 0$ tel que pour $\xi \in \Gamma_k$, on ait

$$\left|\frac{\partial \rho_i}{\partial \zeta_j}(\xi)\right| \leq C_k \exp\left(\frac{1}{k}|\xi| + \tilde{M}(k|\xi|)\right).$$

Soit Ω une composante connexe de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$, pour ζ et $z \in \bar{\Omega}$, on aura

$$\begin{aligned}|Q_{i,j}(\zeta, z)| &\leq C_k \exp\left[\frac{1}{k}(|\zeta| + |z|)\right]\int_0^1 \exp(\tilde{M}(k|(1-t)\zeta + tz|)dt \\ &\leq C_k \exp\left[\frac{1}{k}(|\zeta| + |z|) + \tilde{M}(k|\zeta|) + \tilde{M}(k|z|) + K_k\right]\end{aligned}$$

https://doi.org/10.1017/S0027763000000799 Published online by Cambridge University Press

à cause de l'inégalité (7) et de la convexité de $\tilde{M}$. (Remarquons que l'inégalité (4) suffit dans le cas où la composante connexe Ω de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ est convexe). Le reste de la preuve de l'égalité $I_{\text{loc}}(\rho) = I(\rho)$ est exactement celle de la preuve du théorème 1.4 de [12], en utilisant des résultats de [2] et de [10] et en remplaçant le théorème 2.2.5 de [11] par le théorème 1.3. □

Dans le cas non discret ($n \geq 2$), nous allons définir une notion de fonctions doucement décroissantes.

Soient $\rho = (\rho_j)_{1 \leq j \leq m}$ $(1 \leq m < n)$ un m-uplet de fonctinos de $\text{Exp}_c\,[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ et $\mathscr{L}$ une famille de sous-espaces affines de $\boldsymbol{C}^n$ de dimension m telle que

$$\{z \in \Gamma\colon \rho_1(z) = \cdots = \rho_m(z) = 0\} \subset \bigcup_{L \in \mathscr{L}} (L \cap \Gamma).$$

1.10 Definition. *Soit* $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_m)$ *un m-uplet de fonctions de* $\text{Exp}_c\,[\Gamma, 0; \tilde{M}]$. *Nous dirons que ρ est doucement décroissant s'il existe: une famille $\mathscr{L}$ de sous-espaces affines de dimension m comme précédemment, des suites de nombres réels* $(\varepsilon_k)_{k\geq 1}, (\alpha_k)_{k\geq 1}, (B_k)_{k\geq 1}$ *et* $(K_k)_{k\geq 1}$ *et un réel A (comme en* 1.1) *tels que pour tout $L \in \mathscr{L}$ et tout k, l'ensemble relativement ouvert*:

$$S(\rho; L, k, \varepsilon_k, \alpha_k) = \{z \in L \cap \Gamma_k \| \rho(z)| < \varepsilon_k \exp(-\alpha_k |z| - \tilde{M}(k|z|))\}$$

ait toutes ses composantes connexes relativement compactes dans $L \cap \Gamma_k$ et si, z et ζ sont dans la même composante connexe, on ait

$$|z| \leq A|\zeta| + B_k$$

et pour tout $t \in [0, 1]$

$$\tilde{M}(k|(1-t)\zeta + t|z|) \leq \tilde{M}(k[(1-t)|\zeta| + t|z|]) + K_k\,.$$

Nous allons prouver que, sous ces conditions et des conditions supplémentaires portant sur la famille $\mathscr{L}$, on a $I_{\text{loc}}(\rho) = I(\rho)$.

Soit Ω un ouvert de Γ_k, nous dirons que Ω est un "bon" ouvert (par rapport à ρ et $\mathscr{L}$) s'il existe une composante connexe G de $S(\rho; L, k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ telle que

(9) $\quad \Omega = \{z \in \Gamma_k\colon \exists\zeta \in G \text{ tel que } |z - \zeta| < \varepsilon_k^1 \exp(-\alpha_k^1 |z| - \tilde{M}(k|z|))\}$

avec $\alpha_k^1 \geq 0$.

Quand $\varepsilon_k, \alpha_k, \varepsilon_k^1$ et α_k^1 sont fixés, la famille $\mathscr{C}_k$ de tous les Ω vérifiant (9) forme ce qu'on appelle une bonne famille. Si, dans la définition de (9), on diminue ε_k et on augmente α_k, ε_k^1 étant diminué et α_k^1 augmenté, on obtient une autre bonne famille $\mathscr{C}'_k$ qui est un raffinement de $\mathscr{C}_k$.

Nous dirons que la famille $\mathscr{L}$ est presque parallèle si, pour tout k, étant donné une bonne famille $\mathscr{C}'_k$, il existe un (bon) raffinement $\mathscr{C}_k$ de $\mathscr{C}_k$ tel que pour Ω_0 et Ω_1 éléments de $\mathscr{C}_k$ si

$$\Omega_0 \cap \Omega_1 \neq \phi \quad \text{alors} \quad \bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_1 \subset r(\Omega_0) \cap r(\Omega_1) \tag{10}$$

où r désigne l'application de raffinement.

Nous dirons qu'une famille $\mathscr{L}$ de sous-espaces affines de dimension m est analytique, si pour tout k, il existe une bonne famille associée à $\mathscr{L}$ telle que:

Soient $L \in \mathscr{L}$ et $\Omega \in \mathscr{C}_k$ (associée à L). Il existe des coordonnées locales (s, t) sur Ω telles que

$$\Omega \cap \{(s, t): t = 0\} = \Omega \cap L$$

et si c est une constante, il existe $L_c \in \mathscr{L}$ telle que

$$\Omega \cap \{(s, t): t = c\} = \Omega \cap L_c\,.$$

On a alors le

1.11 THÉORÈME. *Soit* $\rho = (\rho_1, \cdots, \rho_m)$ *un* m*-uplet de fonctions de* $\mathrm{Exp}_c\,[\Gamma, 0, \tilde{M}]$ *doucement décroissant par rapport à une famille* $\mathscr{L}$ *de sous-espaces affines de dimension* m*, analytiques et presque paralléles. On a alors* $I_{\mathrm{loc}}(\rho) = I(\rho)$.

Preuve. Analogue à celles de [2], [3] voir aussi [12]. Pour finir, nous allons étudier les générateurs de $\mathrm{Exp}_c\,[\Gamma, 0; \tilde{M}]$. Tout d'abord, en utilisant le théorème 1.3 et exactement comme Hörmander ([7]) on a le

1.12 THEOREME. *Soient* $f_1, \cdots, f_N$ N *fonctions de* $\mathrm{Exp}_c\,[\Gamma, 0; \tilde{M}]$. *Ces fonctions engendrent* $\mathrm{Exp}_c\,[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ *si et seulement si pour tout* $\varepsilon > 0$ *et tout* $k \geq 1$, *il existe* $A_{k,\varepsilon} > 0$ *tel que pour tout* $z \in \Gamma_k$ *on ait*

$$\sum_{j=1}^{N} |f_j(z)| \geq A_{k,\varepsilon} \exp\left(-\varepsilon|z| - \tilde{M}(k|z|)\right).$$

1.13 THÉORÈME. *Soit* Γ *un secteur ouvert convexe de* $\mathbf{C}$ *de sommet* *l'origine. L'espace $\mathscr{H}_c(\Gamma^0; M)$ est sans synthèse spectrale (i.e. il existe un sous-espace invariant fermé non trivial et sans exponentielles monômes non nulles).*

Preuve. Comme en [12], nous allons supposer que $\Gamma = (z \in \boldsymbol{C} || \operatorname{Arg} z| < \Pi/4)$ et nous considérons $\rho(z) = \exp(-z^2)$, comme $\rho \in \operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$ et que ρ est une fonction entière alors $\rho \in \operatorname{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ et $\rho^{-1} \in \operatorname{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$. Et le fait que $I_{\mathrm{loc}}(\rho) \neq \bar{I}(\rho)$ evient du fait que $\operatorname{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}] \subset \operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$ et que si une suite converge dans $\operatorname{Exp}_c[\Gamma, 0; \tilde{M}]$ elle converge aussi dans $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$ et de la preuve du théorème 1.13 de [12].

Dans le cas où $\mathscr{A}$ est quelconque une étude assez analogue peut être faite nous renvoyons à [12] pour cela.

Bibliographie

[1] C. A. Berenstein and B. A. Taylor, A new look at interpolation theory for entire functions of one variable, Adv. in Math., **33** (1979), 109–143.

[2] ——, Interpolation problems in $\boldsymbol{C}^n$ with application to harmonic analysis, J. Anal. Math., **38** (1980), 188–254.

[3] C. A. Berenstein and D. Struppa, Interpolation problems in cones Rendi Conti Acad. del Lincei,
Serie VIII Vol. LXXIV fasc. 5 Mai 1983, 267–273
Ibidem: " " " " fasc. 6 Juin 1983, 331–335

[4] L. Ehrenpreis, Fourier analysis in several complex variables Wiley Interscience, New-York 1970.

[5] D. I. Gurevich, Counterexample to a problem of L. Schwartz, Funct. Anal. Appl., **9** (1975), 116–120.

[6] L. Hörmander, L^2-estimates and existence theorem for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math., **113** (1965), 89–152.

[7] ——, Generator for some rings of analytic functions, Bull. Amer. Math. Soc., **73** (1967), 943–949.

[8] ——, Complex analysis in several variables, North-Holland, New-York, 1973.

[9] T. Kawai, On the theory of Fourier hyperfunctions and its application to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA., **17** (1970), 467–483.

[10] J. J. Kelleher, and B. A. Taylor, Finitely generated ideal in rings of analytic functions, Math. Ann., **193** (1971), 225–237.

[11] A. Meril, Analytic functions with unbounded carriers and mean periodic functions, Trans. Amer. Math. Soc., **278**, no. 1 (1983), 115–136.

[12] ——, Problèmes d'interpolation dans quelques espaces de fonctions non entières, Bull. Soc. Math. Fr., t. **111** (1983), 251–285.

[13] V. Palamodov, Linear differential operator with constant coefficients, Springer Verlag, 1970.

[14] R. T. Rockafellar, Convex analysis, Princeton University Press, 1970.

[15] J. W. de Roever, Fourier transform of holomorphic functions and application to Newton interpolation series II T. W. 148 Math. Centrum Amsterdam.

[16] ——, Complex Fourier transform and analytic functions with unbounded carriers, Math. Centre Tracts 89, Amsterdam 1978.

[17] Y. Saburi, Vanishing theorems of cohomology groups with values in the sheaves $\mathcal{O}$inc and $\mathcal{O}$dec, Tokyo J. Math., **5**, no. 1 (1982), 225–248.
[18] H. Skoda, Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, Ann. Ec. Norm. Sup, **5**(4) (1972), 545–579.
[19] D. Struppa, The fundamental principle for systems of convolutions equations, Mem. Amer. Math. Soc., **41**, no. 273 (1983).

Université de Bordeaux I
U.E.R. de Mathématiques et Informatique
351, Cours de la Libération
33405 TALENCE CEDEX

adresse actuelle
Université Antilles Guyane
U.F.R. Sciences
Department de Mathématiques
B. P. N° 592
97167 Pointe-à-Pitre Cedex
Guadeloupe