Compositio Mathematica **116:** 81–110, 1999.

F-isocristaux unipotents

BRUNO CHIARELLOTTO[1] and BERNARD LE STUM[2]
[1]*Dipartimento di Matematica Pura ed Applicata, Università degli Studi di Padova, Via Belzoni 7, 35131 Padova, Italy. e-mail: chiarbru@math.unipd.it*
[2]*IRMAR, Université de Rennes I, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France e-mail: lestum@univ-rennes1.fr*

(Received: 18 February 1997; accepted in final form: 30 October 1997)

Abstract. We show that unipotent overconvergent isocrystals are algebraic and that the category of unipotent overconvergent isocrystals has a Frobenius automorphism. We also prove a structure theorem for unipotent overconvergent F-isocrystals over an open subset of the line, analogous to Dieudonné–Manin decomposition theorem for F-isocrystals.

Résumé. Nous montrons que les isocristaux surconvergents unipotents sont algébriques et que la catégorie des isocristaux surconvergents unipotents possède un automorphisme de Frobenius. Nous démontrons aussi un théorème de structure pour les F-isocristaux surconvergents unipotents sur un ouvert de la droite, analogue au théorème de décomposition de Dieudonné–Manin pour les F-isocristaux.

Mathematics Subject Classification: 14F30.

Key words: isocrystal, Frobenius, unipotent, slope.

Introduction

Soient K un corps de nombres et V une variété algébrique sur K. Supposons que l'on dispose de la théorie des motifs. On peut alors associer à V les $H^i_{\text{mot}}(V)$ qui sont des motifs sur K et qui s'expriment à travers leurs réalisations complexes, étale, de de Rham, cristallines, ... Dans [D], P. Deligne se pose la question du π_1 motivique de V qui serait une variante non abélienne du dual de $H^1_{\text{mot}}(V)$. Celui-ci doit s'exprimer à travers ses réalisations. Bien sûr, on devine aisément ce que doivent être les réalisations complexe et étale. Pour construire la réalisation de de Rham de $\pi_1^{\text{mot}}(V)$ lorsque V est lisse, on peut considérer le groupe proalgébrique $\pi_1^{dR}(V)$ qui classifie les modules à connexion intégrables réguliers à l'infini. Pour des raisons techniques, par exemple, le fait que ce groupe ne commute pas aux extensions de la base (voir [Del], 10.35), il faut se limiter au groupe $\pi_1^{dR,un}(V)$ qui s'obtient en passant à la limite sur tous les quotients unipotents. Celui-ci classifie les modules à connexion intégrables unipotents.

Il s'agit ensuite de définir les réalisations cristallines de $\pi_1^{\text{mot}}(V)$. L'approche proposée par P. Deligne est la suivante: on choisit une place v du corps de nombres K au-dessus d'un nombre premier p et on définit $\pi_1^{\text{cris},un}(V)$ en v comme

INTERPRINT: J.N.B. PIPS Nr.: 153758 MATHKAP
comp4211.tex; 7/08/1995; 8:18; v.7; p.1

étant $\pi_1^{dR,un}(V \otimes_K K_v)$. Pour munir ce groupe d'un automorphisme de Frobenius, on suppose donnés un schéma propre et lisse P sur l'anneau des entiers de K_v et un diviseur à croisements normaux Z dans P tels que $V \otimes_K K_v$ soit la fibre générique du complémentaire de Z dans P. On construit alors à la main l'endomorphisme de Frobenius et on montre qu'il est bijectif. Nous proposons une construction plus directe. Si X est une variété algébrique de type fini sur un corps parfait k de caractéristique $p > 0$, on peut considérer le groupe $\pi_1^{\text{rig},un}(X)$ qui classifie les isocristaux surconvergents unipotents sur X. Dans le cas particulier où X est la fibre spéciale du complémentaire de Z dans P, on peut montrer que $\pi_1^{\text{rig},un}(X) = \pi_1^{un}(V \otimes_K K_v)$. Le groupe $\pi_1^{\text{rig},un}(X)$ est muni de manière naturelle d'un automorphisme de Frobenius.

En fait, dans cet article, nous ne parlerons pas de π_1. Nous allons tout simplement étudier la catégorie des isocristaux surconvergents unipotents sur X. Nous montrerons que le Frobenius est une auto-équivalence et que, lorsque X est la fibre spéciale du complémentaire de Z dans P, cette catégorie est naturellement équivalente à celle des modules à connexion intégrables unipotents sur $V \otimes_K K_v$. Nous laissons au lecteur qui le souhaite le soin d'utiliser les catégories tannakiennes pour traduire nos résultats dans le langage de P. Deligne. D'autre part, une bonne partie de cet article est consacré à l'étude de ces isocristaux surconvergents unipotents qui possèdent une structure de Frobenius. Nous verrons que même dans le cas de $\mathbb{P}^1$ moins trois points, cette condition est loin d'être automatique. Nous établirons aussi des théorèmes de structure pour les F-isocristaux surconvergents unipotents sur un ouvert de la droite.

Dans la première partie, après un bref rappel sur la cohomologie de de Rham et les extensions de modules à connexion en géométrie rigide, nous démontrons (Proposition 1.2.2) que le fait pour une connexion d'être surconvergente est stable par extension.

Dans la seconde partie, après les rappels de rigueur sur les isocristaux surconvergents et leur cohomologie, nous montrons (Proposition 2.2.2) que les classes d'extensions de tels objets peuvent se calculer à l'aide de la cohomologie rigide sous certaines hypothèses géométriques. Nous en déduisons (Proposition 2.2.4) qu'une extension d'isocristaux sur une courbe est déterminée par sa restriction à un ouvert non vide. Nous montrons ensuite (Proposition 2.3.5) que les isocristaux unipotents sont munis d'une filtration naturelle. Pour finir, nous montrons (Proposition 2.4.1) que sous des hypothèses géométriques assez générales, les isocristaux unipotents sont algébriques, et un théorème de descente par Frobenius (Proposition 2.4.2).

Dans la troisième partie, après quelques rappels sur les structures de Frobenius, nous étendons (Proposition 3.2.2) la Proposition 2.2.2 aux F-isocristaux surconvergents (il est nécessaire pour cela de supposer le corps résiduel algébriquement clos). Nous en déduisons (Proposition 3.2.4 et Corollaire 3.2.5) quelques résultats concernant les extensions de F-isocristaux sur les courbes.

La quatrième partie est consacrée aux F-isocristaux unipotents. Il s'agit de F-isocristaux dont l'isocristal sous-jacent est unipotent. Nous donnons (Proposition 4.1.2 et Corollaire 4.1.3) d'autres caractérisations de ces objets et nous montrons (Proposition 4.1.5) qu'un F-isocristal unipotent sur une courbe est déterminé par sa restriction à un ouvert non vide. Nous établissons ensuite un théorème de structure pour les F-isocristaux unipotents sur un ouvert de la droite: ceux-ci sont toujours (Proposition 4.2.2) somme directe de décalés de F-isocristaux surconvergents à pentes entières. On peut même supposer (Corollaire 4.2.4) que ces pentes forment un intervalle de $\mathbb{Z}$. On construit aussi (Théorème 4.2.3) une filtration par les pentes.

Le cinquième chapitre se propose d'étudier deux questions concernant les F-isocristaux unipotents sur un ouvert de la droite affine. La première est de savoir si la filtration naturelle et la filtration par les pentes sont essentiellement différentes. Et la réponse est oui. La seconde question est de savoir si tout isocristal unipotent peux être muni d'un Frobenius. Et là, la réponse est non.

Nous ferons un usage intensif des résultats de P. Berthelot sur la cohomologie rigide (voir [B1] et la suite). Le lecteur pourra aussi consulter les autres publications de P. Berthelot sur le sujet.

1. Extensions et géométrie rigide

1.1. COHOMOLOGIE DE DE RHAM ANALYTIQUE RIGIDE

Dans ce paragraphe, nous rappelons quelques résultats sur la cohomologie de de Rham des modules à connexion intégrable sur une variété rigide. Ce sont des résultats dont les analogues algébriques et analytiques complexes sont bien connus.

On désigne par K un corps ultramétrique complet de caractéristique nulle.

LEMME 1.1.1. *Soient V une variété analytique rigide connexe localement intègre et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_V$-module localement libre de rang fini. Alors, pour tout point x de V, l'application canonique $\Gamma(V,\mathcal{E}) \to \mathcal{E}_x$ est injective.*

Ce résultat est connu dans le cas du faisceau structural (voir par exemple [B1]) et il est donc aussi valide lorsque $\mathcal{E}$ est libre. En général, on se donne une section s de $\mathcal{E}$ sur V qui s'annule dans $\mathcal{E}_x$ et un recouvrement admissible $\{U_i\}$ de V par des ouverts connexes sur lesquels $\mathcal{E}$ est libre. On note V' (resp. V'') la réunion des U_i sur lesquels s est nulle (resp. s n'est pas identiquement nulle). Si $x \in U_i$, alors s est nulle sur U_i et on voit donc que V' est non vide. Comme V est connexe, il suffit donc pour conclure de vérifier que V' et V'' forment un recouvrement (nécessairement admissible) disjoint de V. Sinon, on peut trouver $y \in V' \cap V''$ et donc i et j tels que $y \in U_i$ et $y \in U_j$ avec s nulle sur U_i et non identiquement nulle sur U_j. En particulier, s s'annule dans $\mathcal{E}_y$. Comme $\mathcal{E}$ est libre sur U_j, on obtient une contradiction. □

PROPOSITION 1.1.2. *Soient V une variété analytique rigide lisse et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_V$-module à connexion intégrable sur V. Alors*

(i) *Si V a un nombre fini de composantes connexes, $H^0_{dR}(V, \mathcal{E})$ est de dimension finie.*
(ii) *Si V est connexe avec un point rationnel, on a une injection canonique $H^0_{dR}(V, \mathcal{E}) \otimes_K \mathcal{O}_V \hookrightarrow \mathcal{E}$.*

Pour démontrer la première assertion, on peut, quitte à faire une extension finie de K et remplacer V par une de ses composantes connexes, supposer que V est connexe avec un point rationnel x. Il suffit donc de démontrer la seconde assertion. Comme $\mathcal{E}$ est localement libre et V connexe localement intègre, l'application canonique $\Gamma(V, \mathcal{E}) \to M = \hat{\mathcal{E}}_{V,x}$ est injective. Comme K est de caractéristique nulle, V lisse et x rationnel, on a $\hat{\mathcal{O}}_{V,x} \cong K[[t_1, \ldots, t_d]]$. Le théorème de Cauchy formel nous dit que si M est un $K[[t_1, \ldots, t_d]]$ module libre de rang fini muni d'une connexion intégrable ∇, alors $H^0_{dR}(M) \otimes_K K[[t_1, \ldots, t_d]] \cong M$. Notre assertion en résulte immédiatement. □

PROPOSITION 1.1.3. *Soient V une variété analytique rigide lisse séparée et $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ deux $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable. Alors, il existe des isomorphismes fonctoriels*

$$\mathrm{Hom}_\nabla(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \cong H^0_{dR}(V, \mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}'))$$

et

$$\mathrm{Ext}_\nabla(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \cong H^1_{dR}(V, \mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')).$$

(Bien sûr, dans cet énoncé, Hom_∇ et Ext_∇ désignent respectivement l'espace vectoriel des homomorphismes horizontaux et celui des classes d'extensions de modules cohérents à connexion intégrable sur V. De plus, le premier isomorphisme est bien connu.)

Soient $\mathcal{E}$ une extension de $\mathcal{E}''$ par $\mathcal{E}'$, $\{U_i\}$ un recouvrement affinoïde de V et pour tout $i, \varphi_i \colon \mathcal{E}'_{|U_i} \oplus \mathcal{E}''_{|U_i} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_{|U_i}$ une trivialisation de l'extension sur U_i. La matrice de $\varphi^{-1}_{j|U_i} \circ \varphi_{i|U_j}$ est de la forme $\begin{pmatrix} 1 & m_{ij} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $m_{ij} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}''_{|U_i \cap U_j}, \mathcal{E}'_{|U_i \cap U_j}) = \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}'))$. On peut alors considérer la 1-cochaine (m_{ij}) du complexe de Cech de $\mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$ pour le recouvrement $\{U_i\}$ et l'application qui à $\mathcal{E}$ associe (m_{ij}) est linéaire. On sait que notre cochaine est un cocycle et que réciproquement tout cocycle fournit une trivialisation de l'extension. De plus, ce cocycle est un cobord si et seulement si l'extension est triviale. On peut vérifier tout cela à la main ou arguer du fait que les recouvrements affinoïdes sont acycliques pour les faisceaux cohérents et que l'on a l'isomorphisme $\mathrm{Ext}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \cong H^1(V, \mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}'))$ car, $\mathcal{E}''$ étant localement libre, $\mathcal{E}xt^1(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') = 0$.

Notre trivialisation munit $\mathcal{E}'_{|U_i} \oplus \mathcal{E}''_{|U_i}$ d'une connexion dont la matrice est de la forme $\begin{pmatrix} \nabla' & u_i \\ 0 & \nabla'' \end{pmatrix}$ avec $u_i \in \mathrm{Hom}(\mathcal{E}''_{|U_i}, \mathcal{E}'_{|U_i} \otimes \Omega^1_{U_i}) = \Gamma(U_i, \mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \otimes \Omega^1)$. On peut alors former le complexe de de Rham $\mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \otimes \Omega^\bullet$ et considérer la 1-cochaine (m_{ij}, u_i) du complexe de Cech de $\mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \otimes \Omega^\bullet$ pour le recouvrement $\{U_i\}$. On peut ensuite vérifier à la main les assertions suivantes

(a) L'application qui à $\mathcal{E}$ associe (m_{ij}, u_i) est linéaire.
(b) La cochaine (m_{ij}, u_i) associée à $\mathcal{E}$ est un cocycle.
(c) Tout cocycle provient d'une extension.
(d) Le cocycle associé à $\mathcal{E}$ est un cobord si et seulement si l'extension $\mathcal{E}$ est triviale comme extension de modules à connexions.

On obtient ainsi notre isomorphisme $\mathrm{Ext}_\nabla(\mathcal{E}'', \mathcal{E}') \cong H^1_{dR}(V, \mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}'))$, qui est clairement fonctoriel. $\square$

1.1.4. Soit V une variété analytique rigide lisse sur K. On désigne par P le complété formel de $V \times V$ le long de la diagonale et par $\mathcal{P}$ son faisceau structural. On désigne aussi par $\mathcal{I}$ l'idéal de $\mathcal{O}_V$ dans $\mathcal{P}$ si bien que $\Omega^1_V = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$. On note $\theta\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ le morphisme canonique induit par $f \otimes g \to f \otimes 1 \otimes g$. Le morphisme $\theta - p_1^*\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}$ est à valeurs dans $\mathcal{P} \otimes \mathcal{I}$ et nous noterons $\nabla\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P} \otimes \Omega^1_V$ le morphisme obtenu modulo $\mathcal{I}^2$.

Se donner une connexion intégrable sur un $\mathcal{O}_V$-module à $\mathcal{E}$ revient à se donner un homomorphisme continu $\theta\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ se réduisant à l'identité modulo $\mathcal{I}$ et rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
\theta\colon \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} \arrow[d, "\theta \otimes id"'] \\
id \otimes \theta\colon \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} \arrow[r] & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} \otimes \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

En fait, $\theta - p_1^*\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}$ est à valeurs dans $\mathcal{E} \otimes \mathcal{I}$ et fournit modulo $\mathcal{I}^2$ la connexion $\nabla\colon \mathcal{E} \to \mathcal{E} \otimes \Omega^1_V$ de $\mathcal{E}$. En particulier, on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\nabla\colon \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{E} \otimes \Omega^1_V \arrow[d, "\theta \otimes id"'] \\
id \otimes \nabla\colon \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} \arrow[r] & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} \otimes \Omega^1_V .
\end{tikzcd}$$

Rappelons aussi que c'est en prolongeant θ par linéarité que l'on obtient l'isomorphisme de Taylor formel $\varepsilon\colon \mathcal{P} \otimes \mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}$.

Supposons données des coordonnées locales $t_1, \ldots, t_m$ sur V. Désignons par $\tau_1, \ldots, \tau_m$ les sections de $\mathcal{P}$ induites par $1 \otimes t_i - t_i \otimes 1$ et $\mathrm{d}t_1, \ldots, \mathrm{d}t_m$ leurs images dans Ω^1_V. On a alors $\mathcal{P} = \mathcal{O}[[\underline{\tau}]]$, qui est muni des dérivées partielles $\partial/\partial\tau_i$. On a $\theta(\tau_i) = 1 \otimes \tau_i + \tau_i \otimes 1$ et on en déduit que si $P \in \mathcal{P}$, alors $\nabla(P) = \Sigma\, \partial/\partial\tau_i(P) \otimes \mathrm{d}t_i$. Si on écrit pour $e \in \mathcal{E}, \nabla(e) = \Sigma\, \partial/\partial t_i(e) \otimes \mathrm{d}t_i$, on a alors pour tout i un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \partial/\partial t_i\colon & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d, "\theta"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "\theta"'] \\ id \otimes \partial/\partial\tau_i\colon & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P} \arrow[r] & \mathcal{E} \otimes \mathcal{P}. \end{tikzcd}$$

Supposons $\mathcal{E}$ libre de base $\{e_1, \ldots, e_r\}$, soient $A = (P_{\alpha\beta})$ la matrice de l'isomorphisme de Taylor dans les bases $p_2^*(e_1), \ldots, p_2^*(e_r)$ et $p_1^*(e_1), \ldots, p_1^*(e_r)$ et $M_i = (f_{\alpha\beta})$ la matrice de l'action de $\partial/\partial t_i$ sur $\{e_1, \ldots, e_r\}$. Il résulte alors de la commutativité de notre diagramme que pour tout $\alpha = 1, \ldots, r$, on a

$$\Sigma e_\beta \otimes \partial/\partial\tau_i(P_{\alpha\beta}) = \Sigma p_2^*(f_{\alpha\gamma})(\Sigma e_\beta \otimes P_{\gamma\beta})$$

et donc $\partial/\partial\tau_i(P_{\alpha\beta}) = \Sigma p_2^*(f_{\alpha\gamma})P_{\gamma\beta}$. Cela signifie que $\partial/\partial\tau_i$ agit sur A comme $p_2^*(M_i)$. Nous utiliserons ce résultat dans le prochain paragraphe.

1.2. EXTENSIONS ET SURCONVERGENCE

On désigne toujours par K un corps ultramétrique complet de caractéristique nulle. On note $\mathcal{V}$ l'anneau des entiers de K et k son corps résiduel. On se donne un $\mathcal{V}$-schéma formel P, un sous k-schéma fermé Y de P, un ouvert X de Y et on suppose P lisse au voisinage de X. On renvoie aux articles de P. Berthelot (e.g. [B1], 1.1.2, 1.1.9 et 1.2.1) pour les définitions des tubes et des voisinages stricts.

1.2.1. On rappelle que si V est un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ et $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_V$-module cohérent, alors $j^\dagger\mathcal{E} := j_* \varinjlim j'_* j'^* \mathcal{E}$, où j' parcourt les inclusions de voisinages stricts V' de $]X[_P$ dans V et j désigne l'inclusion de V dans $]Y[_P$. On obtient ainsi un foncteur exact $j^\dagger$ de la catégorie des $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable dans celle des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable. Réciproquement, si on se donne un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent E à connexion intégrable, on sait qu'il existe un voisinage strict V de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ et un $\mathcal{O}_V$-module cohérent à connexion intégrable $\mathcal{E}_V$ tel que $E = j^\dagger\mathcal{E}_V$. En fait, on obtient ainsi une équivalence entre la catégorie limite inductive de celles des $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable et la catégorie des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable.

Si $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont deux $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable et $\mathcal{E}$ est une extension de $\mathcal{E}''$ par $\mathcal{E}'$, on obtient en appliquant $j^\dagger$, une extension $j^\dagger\mathcal{E}$ de $j^\dagger\mathcal{E}''$ par $j^\dagger\mathcal{E}'$. Réciproquement, toute extension de $j^\dagger\mathcal{E}''$ par $j^\dagger\mathcal{E}'$ provient, par application du foncteur $j^\dagger$, d'une extension $\mathcal{E}$ de $\mathcal{E}''$ par $\mathcal{E}'$ sur un voisinage strict suffisamment petit de $]X[_P$.

On rappelle qu'une connexion intégrable sur un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent E est *surconvergente* (le long du complémentaire de X dans Y) si l'isomorphisme de Taylor provient d'un isomorphisme sur un voisinage strict du tube de la diagonale.

PROPOSITION 1.2.2. *Avec les hypothèses et notations ci-dessus, la propriété pour un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent à connexion intégrable, que sa connexion soit surconvergente, est stable par extension.*

Dans cette démonstration nous suivons une suggestion de F. Baldassarri. La question étant de nature locale sur P et sur X, on peut se placer comme dans [B1] sous les hypothèses suivantes: P et X sont affines, $Y\backslash X = Y\cap V(g)$ avec $g\in\Gamma(P,\mathcal{O})$ et il existe des sections $t_1,\ldots,t_m\in\Gamma(P,\mathcal{O})$ telles que Ω^1_P soit libre au voisinage de X de base $\mathrm{d}t_1,\ldots,\mathrm{d}t_m$. On note $\partial_1,\ldots,\partial_m$ la base duale.

Soit $0\to E'\to E\to E''\to 0$ une suite exacte de $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable. Celle-ci provient par application du foncteur $j^\dagger$ d'une suite exacte $0\to\mathcal{E}'\to\mathcal{E}\to\mathcal{E}''\to 0$ de modules cohérents à connexion intégrable sur un voisinage strict de $]X[_P$.

On se donne $\eta<\eta'<\lambda<1$ et un ouvert affinoïde U de $[Y]_{\eta'}\cap U_\lambda$, avec $U_\lambda=\{x\in P_K,|g(x)|\geqslant\lambda\}$, tel que $\mathcal{E},\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ soient libres sur U. Choisissons une base $\mathcal{B}'$ de $\Gamma(U,\mathcal{E}')$ et complétons la en une base $\mathcal{B}$ de $\Gamma(U,\mathcal{E})$. La matrice de l'action de ∂_i sur $\mathcal{B}$ dans $\Gamma(U,\mathcal{E})$ est alors de la forme $\begin{pmatrix} M_i & N_i\\ 0 & P_i\end{pmatrix}$. Par construction, M_i est la matrice de l'action de ∂_i sur $\mathcal{B}'$ dans $\Gamma(U,\mathcal{E}')$ et P_i est la matrice de l'action de ∂_i sur l'image $\mathcal{B}''$ de $\mathcal{B}$ dans $\Gamma(U,\mathcal{E}'')$. On dispose aussi d'un isomorphisme de Taylor formel $\varepsilon\colon\Gamma(U,\mathcal{P}\otimes\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}\Gamma(U,\mathcal{E}\otimes\mathcal{P})$ et sa matrice dans les bases $p_2^{-1}(\mathcal{B})$ et $p_1^{-1}(\mathcal{B})$ est de la forme $\begin{pmatrix} A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}$. Si on note $p_1,p_2\colon P\times P\to P$ les morphismes de projection et si on pose

$$V' := [Y]_{P^2\eta'}\cap p_1^{-1}(U) = [Y]_{P^2\eta'}\cap p_2^{-1}(U)\cong U\times B^n(0,\eta'),$$

on dispose d'un morphisme canonique $\Gamma(V',\mathcal{O})\to\Gamma(U,\mathcal{P})$ qui permet d'identifier $\Gamma(U,\mathcal{P})$ avec le complété de $\Gamma(V',\mathcal{O})$. Si E' (resp. E'') est surconvergent, on peut, comme dans [B1], prendre λ suffisamment proche de 1 pour que l'isomorphisme de Taylor formel pour E' (resp. E'') sur U provienne d'un isomorphisme de Taylor analytique

$$\varepsilon'\colon\Gamma(V',p_2^*\mathcal{E}')\xrightarrow{\sim}\Gamma(V',p_1^*\mathcal{E}')(\text{resp. }\varepsilon''\colon\Gamma(V',p_2^*\mathcal{E}'')\xrightarrow{\sim}\Gamma(V',p_1^*\mathcal{E}'')).$$

Il suit que A (resp. C) est à coefficients dans $\Gamma(V',\mathcal{O})$. Comme l'action de $\partial/\partial\tau_i$ sur $\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ 0 & C\end{smallmatrix}\right)$ est donnée par

$$p_2^*\begin{pmatrix} M_i & N_i \\ 0 & P_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_2^*M_i & p_2^*N_i \\ 0 & p_2^*P_i \end{pmatrix}$$

on obtient les relations suivantes

$$\partial/\partial\tau_i(A) = (p_2^*M_i)A, \qquad \partial/\partial\tau_i(B) = (p_2^*M_i)B + (p_2^*N_i)C$$

et

$$\partial/\partial\tau_i(C) = (p_2^*P_i)C.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \partial/\partial\tau_i(B) &= \partial/\partial\tau_i(AA^{-1}B) = A\,\partial/\partial\tau_i(A^{-1}B) + \partial/\partial\tau_i(A)A^{-1}B \\ &= A\,\partial/\partial\tau_i(A^{-1}B) + (p_2^*M_i)AA^{-1}B \\ &= A\,\partial/\partial\tau_i(A^{-1}B) + (p_2^*M_i)B. \end{aligned}$$

Puisque d'autre part, $\partial/\partial\tau_i(B) = (p_2^*M_i)B + (p_2^*N_i)C$, on obtient l'identité $A\,\partial/\partial\tau_i(A^{-1}B) = (p_2^*N_i)C$ et on a donc $\partial/\partial\tau_i(A^{-1}B) = A^{-1}(p_2^*N_i)C$. Comme $A^{-1}(p_2^*N_i)C$ est à coefficients dans $\Gamma(V',\mathcal{O})$ et que $\eta < \eta'$, on voit que $A^{-1}B$ est à coefficients dans $\Gamma(V,\mathcal{O})$ avec

$$V := [Y]_{P^2\eta} \cap p_1^{-1}(U) = [Y]_{P^2\eta} \cap p_2^{-1}(U) \cong U \times B^n(0,\eta).$$

Il suit que A, B et C sont à coefficients dans $\Gamma(V,\mathcal{O})$ et donc que l'isomorphisme de Taylor formel pour E provient d'un isomorphisme de Taylor analytique $\varepsilon\colon \Gamma(V, p_2^*\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \Gamma(V, p_1^*\mathcal{E})$. On en déduit comme dans [B1], la surconvergence de E: en effet, il existe un recouvrement fini de $[Y]_\eta \cap U_\lambda$ par des ouverts U satisfaisant nos hypothèses. □

1.2.3. Soient V un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ et $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ deux $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable. On a un homomorphisme canonique $\mathrm{Ext}_\nabla(\mathcal{E}'',\mathcal{E}') \to \mathrm{Ext}_\nabla(j^\dagger\mathcal{E}'', j^\dagger\mathcal{E}')$. En passant à la limite, on obtient pour tous les $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable E' et E'', un isomorphisme $\varinjlim \mathrm{Ext}_\nabla(\mathcal{E}''_V, \mathcal{E}'_V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_\nabla(E'', E')$ lorsque $\mathcal{E}'_V$ et $\mathcal{E}''_V$ parcourent les $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable tels que $E' = j^\dagger\mathcal{E}''_V$ et $E'' = j^\dagger\mathcal{E}'_V$.

D'autre part, si V est un voisinage strict de $]X[_P$ dans $]Y[_P$ et si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_V$-module cohérent à connexion intégrable, on a un homomorphisme canonique

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

$\mathcal{E} \to j^\dagger \mathcal{E}_{|V}$ et la cohomologie de $j^\dagger\mathcal{E}$ ne dépend que d'un voisinage strict de $]X[_P$. On a donc une application canonique $H^i_{dR}(V, \mathcal{E}) \to H^i_{dR}(]Y[_P, j^\dagger\mathcal{E})$.

Si E est un $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-module cohérent à connexion intégrable, on obtient un homomorphisme canonique $\varinjlim H^i_{DR}(V, \mathcal{E}_V) \to H^i_{dR}(]Y[_P, E)$ lorsque $\mathcal{E}_V$ parcourt les $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable tels que $E = j^\dagger\mathcal{E}_V$. Celui-ci n'a pas de raison d'être injectif en général car on ne sait pas faire commuter la cohomologie et les limites inductives sans argument de compacité.

Si $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{E}''$ sont deux $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable, on a $\mathcal{H}om(E'', E') = j^\dagger\mathcal{H}om(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$. Grâce à la Proposition 1.1.3, on en déduit pour tous $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable E' et E'', une flèche naturelle

$$\mathrm{Ext}_\nabla(E'', E') \to H^1_{dR}(]Y[_P, \mathcal{H}om(E'', E')).$$

Rappelons que l'on a aussi un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_\nabla(E'', E') \xrightarrow{\sim} H^0_{dR}(]Y[_P, \mathcal{H}om(E'', E')).$$

2. Extensions d'isocristaux surconvergents

2.1. COHOMOLOGIE RIGIDE

2.1.1. Si X est un schéma séparé de type fini sur k, on dispose de la catégorie des isocristaux surconvergents sur X dont les objets se décrivent par leurs *réalisations* comme suit. On plonge X comme ouvert d'un k-schéma propre Y et on suppose, pour simplifier, que l'on peut plonger Y comme fermé dans un $\mathcal{V}$-schéma formel P avec P lisse au voisinage de X. Cela est toujours possible localement ou si X est quasi-projectif. Dans le cas général, il faudrait recoller les différentes constructions. On dispose alors d'une équivalence $E \mapsto E_P$ entre la catégorie des isocristaux surconvergents sur X et celle des $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$-modules cohérents à connexion intégrable surconvergente. On dit que E_P est la *réalisation* de E sur P. On rappelle aussi que $H^i_{\mathrm{rig}}(X, E) := H^i_{dR}(]Y[_P, E_P)$ ne dépend pas du choix de la réalisation de E. Enfin, on note $\mathcal{O}^\dagger_X$ l'isocristal trivial dont la réalisation est $j^\dagger\mathcal{O}_{]Y[}$.

On peut identifier la catégorie des isocristaux surconvergent sur Spec(k) avec la catégorie des K-espaces vectoriels. Remarquons aussi que la catégorie des isocristaux surconvergent sur X est fonctorielle en X. En particulier, la *fibre* d'un isocristal surconvergent E en un point *rationnel* x de X est i_x^*E où i_x: Spec $k \hookrightarrow X$ est l'inclusion du point x. Enfin, on dit que E est *constant* si $E \cong H \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X$ où H est un isocristal sur K.

LEMME 2.1.2. *Si E est un isocristal surconvergent sur X alors $H^0_{\mathrm{rig}}(X, E)$ est de dimension finie. Si X est connexe avec un point rationnel, on a une injection canonique $H^0_{\mathrm{rig}}(X, E) \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X \hookrightarrow E$.*

On reprend des arguments que P. Berthelot utilise dans sa version provisoire de la suite de [B1]. Comme pour tout faisceau cohérent $\mathcal{E}$ sur un voisinage strict V de $]X[_P$, on a une injection canonique $j^\dagger\mathcal{E}_{|V} \hookrightarrow j_*j^*\mathcal{E}$ avec $j\colon]X[_P \hookrightarrow V$, on voit que si $E_P = j^\dagger\mathcal{E}$, alors $H^0_{\mathrm{rig}}(X,E) \subset H^0_{dR}(]X[_P,\mathcal{E})$. La première assertion résulte donc de la Proposition 1.1.2. Si X est connexe avec un point rationnel, alors $]X[_P$ est aussi connexe avec un point rationnel et on a donc, grâce à la Proposition 1.1.2,

$$H^0_{dR}(]X[_P,\mathcal{E}) \otimes_K \mathcal{O}_{]X[} \hookrightarrow j^*\mathcal{E}$$

si bien que

$$H^0_{dR}(]X[_P,\mathcal{E}) \otimes_K j_*\mathcal{O}_{]X[} \hookrightarrow j_*j^*\mathcal{E}$$

et donc

$$(H^0_{\mathrm{rig}}(X,E) \otimes_K j^\dagger\mathcal{O}_V)_{|V} \hookrightarrow (j^\dagger\mathcal{E})_{|V}. \qquad \square$$

Remarque 2.1.3. Si E est un isocristal surconvergent sur X connexe avec un point rationnel, il existe un plus grand sous objet constant dans E, c'est $H^0_{\mathrm{rig}}(X,E) \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X$; en effet si H est un isocristal sur K et $H \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X \hookrightarrow E$. Alors

$$H = H^0_{\mathrm{rig}}(X, H \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X) \hookrightarrow H^0_{\mathrm{rig}}(X,E).$$

PROPOSITION 2.1.4. *Soient X une courbe lisse et connexe sur k, U un ouvert affine non vide de X et Z son complémentaire. Si E est un isocristal surconvergent sur X, on a un isomorphisme $H^0_{\mathrm{rig}}(X,E) \xrightarrow{\sim} H^0_{\mathrm{rig}}(U,E)$ et une suite exacte (de Gysin)*

$$0 \to H^1_{\mathrm{rig}}(X,E) \to H^1_{\mathrm{rig}}(U,E) \to H^0_{\mathrm{rig}}(Z,E) \to H^2_{\mathrm{rig}}(X,E) \to 0.$$

Lorsque X est affine, ce résultat est bien connu (voir par exemple l'appendice de [E-LS]). Dans le cas général, on choisit un voisinage affine V de Z dans X et on note $E_\bullet^{\bullet\,\bullet}$ la suite spectrale de cohomologie rigide associée au recouvrement $\{U,V\}$. Cette suite spectrale sera construite en toute généralité dans la suite de [B1] comme conséquence de la Proposition 2.1.8 de [B1]. Puisque notre proposition est vraie dans le cas affine, $d_1^{0\,0}$ est surjective et on a donc $E_2^{1\,0} = 0$. Puisque l'on a bien sûr aussi $E_2^{2\,0} = 0$, on voit que $H^1_{\mathrm{rig}}(X,E) = E_2^{0\,1}$. De plus, on a aussi $H^2_{\mathrm{rig}}(X,E) = E_2^{1\,1}$. Le complexe $E_1^{\bullet\,1}$ nous fournit donc une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1_{\mathrm{rig}}(X,E) \to H^1_{\mathrm{rig}}(U,E) \oplus H^1_{\mathrm{rig}}(V,E) \\ &\to H^1_{\mathrm{rig}}(U \cap V,E) \to H^2_{\mathrm{rig}}(X,E) \to 0. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

On considère alors le morphisme de suites exactes courtes (la seconde provenant du cas affine de la proposition)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{rig}}(V,E) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^1_{\mathrm{rig}}(U,E) \oplus H^1_{\mathrm{rig}}(V,E) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\mathrm{rig}}(U,E) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1_{\mathrm{rig}}(V,E) \arrow[r] & H^1_{\mathrm{rig}}(U \cap V,E) \arrow[r] & H^0_{\mathrm{rig}}(Z,E) \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Le lemme du serpent nous fournit alors la suite exacte annoncée. □

2.2. COHOMOLOGIE RIGIDE ET EXTENSIONS

On notera $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}$ l'espace des classes d'isomorphisme d'extensions d'isocristaux surconvergents sur X.

Soient E' et E'' deux isocristaux surconvergents sur X. La construction de 1.2.3 fournit un homomorphisme fonctoriel en X, E et K

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'',E') \to H^1_{\mathrm{rig}}(X,\mathcal{H}om(E'',E')).$$

En effet, on a par 1.2.2, $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'',E') = \mathrm{Ext}_\nabla(E''_P,E'_P)$ et toutes nos constructions sont fonctorielles. On a bien sur aussi

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'',E') = H^0_{\mathrm{rig}}(X,\mathcal{H}om(E'',E')).$$

LEMME 2.2.1. *Supposons que X soit un ouvert lisse de la fibre spéciale d'un schéma formel propre et plat P. Si E est un isocristal surconvergent sur X, alors $\varinjlim H^i_{dR}(V,\mathcal{E}_V) \cong H^i_{\mathrm{rig}}(X,E)$ lorsque $\mathcal{E}_V$ parcourt les $\mathcal{O}_V$-modules cohérents à connexion intégrable tels que $E_P = j^\dagger\mathcal{E}_V$.*

Sous nos hypothèses, le tube $]X[_P$ de X dans P_K est quasi-compact. Il suit que tout voisinage strict de $]X[_P$ dans P_K contient un voisinage strict qui est quasi-compact. On peut ainsi trouver un voisinage strict lisse quasi-compact V de $]X[_P$ dans P_K et un $\mathcal{O}_V$-module cohérent à connexion intégrable $\mathcal{E}$ tels que $E_P = j^\dagger\mathcal{E}$. On a donc $H^i_{\mathrm{rig}}(X,E) := H^i_{dR}(P_K,E_P) = H^i_{dR}(P_K,j^\dagger\mathcal{E})$. En fait, comme la cohomologie d'un $j^\dagger\mathcal{O}_V$-module ne dépend que d'un voisinage strict, on a

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X,E) = H^i_{dR}(V,j^\dagger\mathcal{E}) := H^i(V,j^\dagger\mathcal{E}\otimes\Omega^\cdot).$$

Si on note j' l'inclusion d'un voisinage strict V' dans V, on sait que j'^* transforme injectifs en acycliques et que $j^\dagger$, $\varinjlim$, et j'^* sont exacts. On a donc $j^\dagger = \varinjlim Rj'_*j'^*$ si bien que

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X,E) = H^i(V,\varinjlim Rj'_*j'^*\mathcal{E}\otimes\Omega^\cdot).$$

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

Comme V est quasi-compact, on a

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X,E) = \varinjlim H^i(V, Rj'_*j'^*\mathcal{E}\otimes\Omega^\cdot)$$

et puisque j'_* transforme injectifs en acycliques,

$$H^i_{\mathrm{rig}}(X,E) = \varinjlim H^i(V', j'^*\mathcal{E}\otimes\Omega^\cdot) = \varinjlim H^i_{dR}(V', j'^*\mathcal{E}). \qquad \square$$

PROPOSITION 2.2.2. *Si X est un ouvert lisse de la fibre spéciale d'un schéma formel propre et plat P et si E' et E'' sont deux isocristaux surconvergents sur X, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E') \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{H}om(E'', E')).$$

Résulte immédiatement de 2.2.1 et de notre construction dans 1.2.3. $\square$

Notre hypothèse est satisfaite par exemple si X est affine et lisse, si X est une courbe lisse ou bien sûr si X est un ouvert lisse d'une réduction d'une variété propre et lisse sur K.

Remarque 2.2.3. Si X est connexe avec un point rationnel, une extension E de $\mathcal{O}^\dagger_X$ par un isocristal surconvergent E' est non-triviale si et seulement si l'application canonique $H^0_{\mathrm{rig}}(X,E') \to H^0_{\mathrm{rig}}(X,E)$ est bijective. En effet, on sait que $H^0_{\mathrm{rig}}(X) = K$ et on se donne une suite exacte $0 \to E' \xrightarrow{\alpha} E \to \mathcal{O}^\dagger_X \to 0$. Si celle-ci est scindée, on a $H^0_{\mathrm{rig}}(X,E) = H^0_{\mathrm{rig}}(X,E')\oplus K$ et la condition est donc bien suffisante. Réciproquement, comme la suite

$$0 \to H^0_{\mathrm{rig}}(X,E') \to H^0_{\mathrm{rig}}(X,E) \to H^0_{\mathrm{rig}}(X) = K$$

est exacte à gauche, on voit que si la condition n'est pas remplie, la flèche $H^0_{\mathrm{rig}}(X,E) \to K$ est non-nulle et donc surjective. Soient $u\colon K \to H^0_{\mathrm{rig}}(X,E)$ une section et γ le morphisme composé de $u\otimes 1\colon \mathcal{O}^\dagger_X \to H^0_{\mathrm{rig}}(X,E)\otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X$ et de l'inclusion $H^0_{\mathrm{rig}}(X,E)\otimes_K\mathcal{O}^\dagger_X \hookrightarrow E$. Par construction, γ est une section de β.

PROPOSITION 2.2.4. *Soient X une courbe lisse et connexe sur k, U un ouvert affine non vide de X et Z son complémentaire. Si E' et E'' sont deux isocristaux surconvergents sur X, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E''_{|U}, E'_{|U})$$

et une injection canonique $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E') \hookrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E''_{|U}, E'_{|U})$.

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

Résulte de 2.2.2 et 2.1.4. □

2.3. ISOCRISTAUX UNIPOTENTS

DÉFINITION 2.3.1. Un F-isocristal surconvergent est dit *unipotent* s'il est extension itérée de $\mathcal{O}_X^\dagger$.

Remarquons en particulier qu'un F-isocristal surconvergent E est unipotent si et seulement si il est extension de $\mathcal{O}_X^\dagger$ par un F-isocristal surconvergent unipotent G. En fait, il suffit qu'il existe une suite exacte à gauche $0 \to G \to E \to \mathcal{O}_X^\dagger$ avec G unipotent.

PROPOSITION 2.3.2. *Les F-isocristaux surconvergents unipotents sont stables par extension, sous-objet, quotient, produit tensoriel, hom interne, dual et image inverse.*

Soient $(*)$: $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ une suite exacte avec E' et E'' unipotents. Montrons par récurrence sur le rang de E qu'il est unipotent. Puisque E'' est unipotent, il est extension de $\mathcal{O}_X^\dagger$ par un F-isocristal surconvergent unipotent G''. Soit $0 \to E' \to G \to G'' \to 0$ la suite exacte obtenue en tirant la suite $(*)$ par $G'' \to E''$. Par récurrence, G est unipotent et on a une suite exacte $0 \to G \to E \to \mathcal{O}_X^\dagger \to 0$, ce qui montre que E est bien unipotent.

Soient E un F-isocristal surconvergent unipotent et E' un sous objet de E. Montrons par récurrence sur le rang de E que E' est unipotent. On peut écrire E comme extension de $\mathcal{O}_X^\dagger$ par un F-isocristal surconvergent unipotent G. Soit G' le noyau du morphisme composé $E' \hookrightarrow E \to \mathcal{O}_X^\dagger$. Alors G' est un sous objet de G et est donc unipotent par hypothèse. Comme on a une suite exacte à gauche $0 \to G' \to E' \to \mathcal{O}_X^\dagger$, on voit que E' est unipotent.

Soit E un F-isocristal surconvergent unipotent. Montrons par récurrence sur le rang de E que son dual $E\check{}$ est aussi unipotent. On écrit E comme extension de $\mathcal{O}_X^\dagger$ par un F-isocristal surconvergent unipotent G. On a donc une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X^\dagger \to E\check{} \to G\check{} \to 0$ et $E\check{}$ est donc unipotent comme extension d'unipotents.

Donnons nous maintenant deux F-isocristaux surconvergents unipotents E et E'. Montrons par récurrence sur le rang de $E \otimes E'$ qu'il est unipotent. On écrit E comme extension de $\mathcal{O}_X^\dagger$ par un F-isocristal surconvergent unipotent G si bien que $E \otimes E'$ est extension de E', qui est unipotent par récurrence, par $G \otimes E'$ qui l'est aussi.

La dernière assertion résulte de l'exactitude du foncteur image inverse et du fait qu'il préserve l'isocristal trivial. Toutes les autres se déduisent formellement de celles que nous venons de prouver. □

De 2.2.4, on déduit la proposition suivante:

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 2.3.3. *Soient X une courbe lisse et connexe sur k et U un ouvert affine non vide de X. Alors un isocristal surconvergent unipotent sur X est déterminé par sa restriction à U.* □

Remarques 2.3.4. (i) Si E est un isocristal surconvergent unipotent non nul sur X, alors $H^0_{\mathrm{rig}}(X, E)$ est non nul: on procède par récurrence sur le rang de E. On sait que $H^0_{\mathrm{rig}}(X)$ est non nul. En général, on écrit E comme extension de $\mathcal{O}^\dagger_X$ par un isocristal surconvergent unipotent G, ce qui nous fournit une injection $H^0_{\mathrm{rig}}(X, G) \hookrightarrow H^0_{\mathrm{rig}}(X, E)$ et $H^0_{\mathrm{rig}}(X, G)$ est non nul par hypothèse. Le même genre d'argument permet de voir que $H^0_{\mathrm{rig}}(X) \cong H^0_{\mathrm{rig}}(X, E)$ si et seulement si E est une suite d'extensions non triviales de $\mathcal{O}^\dagger_X$.

(ii) Si E est un isocristal surconvergent unipotent sur X connexe et si on note χ_{rig} la caractéristique d'Euler–Poincaré rigide, alors $\chi_{\mathrm{rig}}(E) = \chi_{\mathrm{rig}}(X)$ rang E; comme χ_{rig} est additif, c'est une conséquence immédiate de la définition. En particulier, on voit que si E' et E'' sont deux isocristaux unipotents sur la droite affine moins n points, on a

$$\begin{aligned}&\dim_K \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')\\ &\quad = (n-1)\mathrm{rang}(E')\mathrm{rang}(E'') + \dim_K \mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E').\end{aligned}$$

(iii) Il résulte de [B2] (et [C-M] losque k est fini) que si E est un isocristal surconvergent unipotent sur X lisse, alors pour tout i, $H^i_{\mathrm{rig}}(X, E)$ est de dimension finie.

PROPOSITION 2.3.5. *Si X est connexe, un isocristal surconvergent sur X est unipotent si et seulement s'il possède une filtration (croissante, exhaustive et séparée) dont le gradué est constant. Il existe en fait une unique telle filtration sur E satisfaisant* $\mathrm{Gr}_i E = H^0_{\mathrm{rig}}(X, E/\mathrm{Fil}_{i-1}E) \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X$ *et elle est fonctorielle.*

La condition est clairement suffisante car les isocristaux constants sont unipotents et pour montrer que celle-ci est nécessaire, il suffit de montrer la dernière assertion. L'unicité est claire. Pour montrer l'existence, on procède par récurrence sur le rang de E. Posons $E' := H^0_{\mathrm{rig}}(X, E) \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X$. D'après la Remarque 2.3.4.(i), $H^0_{\mathrm{rig}}(X, E)$ est un isocristal non nul sur K et comme X est connexe, on a une injection d'isocristaux surconvergents unipotents $E' \hookrightarrow E$. Il résulte de la Proposition 2.3.2 que $E'' := E/E'$ est un isocristal surconvergent unipotent. Par récurrence, il possède une unique filtration satisfaisant

$$\mathrm{Gr}_i(E'') = H^0_{\mathrm{rig}}(X, E''/\mathrm{Fil}_{i-1}E'') \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X.$$

On définit alors $\mathrm{Fil}_{i+1}E$ en tirant la suite exacte courte $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ par $\mathrm{Fil}_i E'' \hookrightarrow E''$. Pour $i \geqslant 0$, on a $E/\mathrm{Fil}_i E = E''/\mathrm{Fil}_{i-1}E''$ et donc $\mathrm{Gr}_{i+1}(E) =$

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

$\mathrm{Gr}_i(E'') = H^0_{\mathrm{rig}}(X, E/\mathrm{Fil}_i E) \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X$ et bien sûr, par construction $\mathrm{Gr}_0(E) = E' = H^0_{\mathrm{rig}}(X, E) \otimes_K \mathcal{O}^\dagger_X$. □

Nous appellerons cette dernière filtration la *filtration naturelle* sur E. On a toujours $\mathrm{Fil}_i(E' \oplus E'') = \mathrm{Fil}_i E' \oplus \mathrm{Fil}_i E''$ et si H est un isocristal sur K, alors $\mathrm{Fil}_i(E \otimes_K H) = \mathrm{Fil}_i E \otimes_K H$.

2.4. DEUX PROPRIÉTÉS REMARQUABLES DES ISOCRISTAUX SURCONVERGENTS UNIPOTENTS

On se donne un *schéma* propre et lisse P sur $(\mathcal{V})$ et un diviseur à croisements normaux Z dans P. On note X (resp. V) la fibre spéciale (resp. générique) du complémentaire de Z dans P. Alors V^{rig} est un voisinage strict de $]X[_{\hat{P}}$ dans P^{rig} et on dit qu'un isocristal surconvergent E sur X est *algébrique* s'il existe un module à connexion intégrable $\mathcal{E}$ sur V tel que $E_{\hat{P}} = j^\dagger \mathcal{E}^{\mathrm{rig}}$. On a alors un morphisme naturel $H^i_{dR}(V, \mathcal{E}) \to H^i_{dR}(V^{\mathrm{rig}}, \mathcal{E}^{\mathrm{rig}}) \to H^i_{\mathrm{rig}}(X, E)$.

PROPOSITION 2.4.1. *Avec les notations qui précèdent, si $\mathcal{E}$ est un module à connexion intégrable unipotent sur V, alors la connexion de $j^\dagger\mathcal{E}^{\mathrm{rig}}$ est surconvergente. Si on définit E par $E_P := j^\dagger\mathcal{E}^{\mathrm{rig}}$, on obtient ainsi une équivalence entre la catégorie des modules à connexion intégrable unipotents sur V et celle des isocristaux surconvergents unipotents sur X. De plus, on a pour tout i, $H^i_{\mathrm{rig}}(X, E) = H^i_{dR}(V, \mathcal{E})$.*

En particulier, on voit que tout isocristal surconvergent unipotent E sur X est algébrique.

Montrons par récurrence sur le rang de $\mathcal{E}$ que si $\mathcal{E}$ est unipotent, alors $j^\dagger\mathcal{E}^{\mathrm{rig}}$ est unipotent, que sa connexion est surconvergente, et que pour tout i, on a

$$H^i_{dR}(]Y[_P, j^\dagger\mathcal{E}^{\mathrm{rig}}) = H^i_{dR}(V, \mathcal{E}).$$

Si $\mathcal{E}$ est de rang 1, alors $\mathcal{E} = \mathcal{O}_V$ et $j^\dagger\mathcal{O}_V^{\mathrm{rig}}$ est bien sûr unipotent à connexion surconvergente. De plus, il résulte de [B-C] que

$$H^i_{dR}(]Y[_P, j^\dagger\mathcal{O}_V^{\mathrm{rig}}) = H^i_{\mathrm{rig}}(X) = H^i_{dR}(V) = H^i_{dR}(V, \mathcal{O}_V).$$

Si le rang de $\mathcal{E}$ est strictement supérieur à 1, on écrit $\mathcal{E}$ comme extension de $\mathcal{O}_V$ par un $\mathcal{O}_V$-module à connexion intégrable unipotent $\mathcal{G}$. Comme les foncteurs $\mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}^{\mathrm{rig}}$ et $j^\dagger$ sont exacts, on voit que $j^\dagger\mathcal{E}^{\mathrm{rig}}$ est extension de $j^\dagger\mathcal{O}_V^{\mathrm{rig}}$ par $j^\dagger\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}$. Par récurrence, $j^\dagger\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}$ est unipotent, sa connexion est surconvergente, et pour tout i, on a $H^i_{dR}(]Y[_P, j^\dagger\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}) = H^i_{dR}(V, \mathcal{G})$. On voit donc que $j^\dagger\mathcal{E}^{\mathrm{rig}}$ est unipotent et

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

sa connexion est surconvergente par 1.2.2. De plus, on a un morphisme de suites exactes longues

$$\begin{tikzcd}
H^i_{dR}(V,\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^i_{dR}(V,\mathcal{E}) \arrow[r] \arrow[d] & H^i_{dR}(V) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & H^{i+1}_{dR}(V,\mathcal{E}) \arrow[d, "\wr"] \\
H^i_{dR}(]Y[_P, j^\dagger\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}) \arrow[r] & H^i_{dR}(]Y[_P, j^\dagger\mathcal{E}^{\mathrm{rig}}) \arrow[r] & H^i_{\mathrm{rig}}(X) \arrow[r] & H^i_{dR}(]Y[_P, j^\dagger\mathcal{G}^{\mathrm{rig}})
\end{tikzcd}$$

qui nous donne par récurrence l'isomorphisme annoncé.

Montrons que notre foncteur est essentiellement surjectif. On se donne un isocristal surconvergent unipotent E et on montre qu'il existe un module à connexion intégrable unipotent $\mathcal{E}$ sur V tel que $E_P = j^\dagger\mathcal{E}^{\mathrm{rig}}$. On procède par récurrence sur le rang de E que l'on écrit comme extension de $\mathcal{O}^\dagger_X$ par un F-isocristal surconvergent G. Par récurrence, on a $G_P = j^\dagger\mathcal{G}^{\mathrm{rig}}$ avec $\mathcal{G}$ unipotent et on a un isomorphisme $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}^\dagger_X, G) = H^1_{\mathrm{rig}}(X,G) = H^1_{dR}(V,\mathcal{G}) = \mathrm{Ext}_\nabla(\mathcal{O}_V,\mathcal{G})$, ce qui montre que E provient d'une extension $\mathcal{E}$ de $\mathcal{O}_V$ par $\mathcal{G}$.

Il reste à vérifier que notre foncteur est pleinement fidèle. Soient $\mathcal{E}$ (resp. $\mathcal{E}'$) un module à connexion intégrable unipotent sur V et E (resp. E') l'isocristal correspondant. On a $\mathcal{H}om(E,E') = j^\dagger\mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\mathrm{rig}},\mathcal{E}'^{\mathrm{rig}})$ et $\mathcal{H}om(\mathcal{E}^{\mathrm{rig}},\mathcal{E}'^{\mathrm{rig}}) = \mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{E}')^{\mathrm{rig}}$. De plus, comme $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont unipotents, il en va de même de $\mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{E}')$. On a donc $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E,E') = H^0_{\mathrm{rig}}(X,\mathcal{H}om(E,E')) = H^0_{dR}(V, \mathcal{H}om(\mathcal{E},\mathcal{E}')) = \mathrm{Hom}_\nabla(\mathcal{E},\mathcal{E}')$. $\square$

On suppose maintenant que k contient $\mathbb{F}_q$ avec $q = p^a$ et que $X = X_0 \otimes_{\mathbb{F}_q} k$ avec X_0 schéma séparé de type fini sur $\mathbb{F}_q$. On note F_{X_0} la puissance a-ième du Frobenius absolu de X_0 et $F_X = F_{X_0} \otimes_{\mathbb{F}_q} k$. On suppose aussi que X est un ouvert de la fibre spéciale d'un $\mathcal{V}$-schéma formel propre et plat.

PROPOSITION 2.4.2. *Avec les notations qui précèdent, si E est un isocristal surconvergent unipotent sur X, alors $F^*_X E$ est aussi unipotent. On obtient ainsi une auto-équivalence de la catégorie des isocristaux surconvergents unipotents sur X.*

Il résulte de la Proposition 2.3.2 que si E est unipotent, alors $F^*_X E$ aussi. Montrons que notre foncteur est essentiellement surjectif. On se donne un isocristal surconvergent unipotent E' et on montre qu'il existe un isocristal surconvergent unipotent E tel que $E' = F^*_X E$. On procède par récurrence sur le rang de E' que l'on écrit comme extension de $\mathcal{O}^\dagger_X$ par un isocristal surconvergent unipotent G'. Par récurrence, on peut écrire $G' = F^*_X G$ avec G unipotent. Il résulte de la

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

Proposition 2.1* de [E-LS] que le Frobenius induit un isomorphisme $H^1_{\mathrm{rig}}(X, G') \cong H^1_{\mathrm{rig}}(X, G)$ et on donc a un isomorphisme

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}^\dagger_X, G') = H^1_{\mathrm{rig}}(X, G') \cong H^1_{\mathrm{rig}}(X, G) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}^\dagger_X, G).$$

Il suit que E' provient bien d'une extension E de $\mathcal{O}^\dagger_X$ par G.

Il reste à vérifier que notre foncteur est pleinement fidèle. Soient E et E' deux isocristaux surconvergents unipotents. Il résulte de la Proposition 2.1 de [E-LS] que $H^0_{\mathrm{rig}}(X, F^*_X \mathcal{H}om(E, E')) \cong H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{H}om(E, E'))$ et on a donc

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(F^*_X E, F^*_X E') &= H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{H}om(F^*_X E, F^*_X E')) \\ &= H^0_{\mathrm{rig}}(X, F^*_X \mathcal{H}om(E, E')) \cong H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{H}om(E, E')) \\ &= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E, E'). \qquad \square\end{aligned}$$

3. *F*-isocristaux

3.1. GÉNÉRALITÉS

On suppose maintenant k algébriquement clos de caractéristique $p > 0$, on fixe un entier positif non nul a et on pose $q = p^a$. Lorsque nous parlerons de *Frobenius*, il s'agira toujours du a-ième itéré du Frobenius absolu. On fixe à nouveau un entier positif non nul e et on désigne par K (resp. K_0) le corps obtenu en ajoutant une racine primitive e-ième π de p au corps des fractions de $W(k)$ (resp. $W(\mathbb{F}_q)$). On pose $d := ea = [K_0 : \mathbb{Q}_p]$ et on note σ le Frobenius de K qui laisse π invariant.

3.1.1. Un *Frobenius* sur un K-espace vectoriel H est tout simplement un endomorphisme semi-linéaire. Un F-*isocristal* est un isocristal (espace vectoriel de dimension finie) muni d'un Frobenius bijectif. Tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\lambda = r/sd$ avec r et s deux entiers premiers entre eux et $s > 0$ (on rappelle que d est le degré de K_0 sur $\mathbb{Q}_p$). Si on désigne par $K_\sigma[T]$ l'anneau de polynomes non commutatif défini par la condition $Ta = \sigma(a)T$, on pose $K(-\lambda) := K_\sigma[T]/(T^s - \pi^r)$. C'est un isocristal sur K que l'on munit d'un *Frobenius* en utilisant la multiplication à droite par T. Si H est un espace vectoriel muni d'un Frobenius ϕ, on pose $H(-\lambda) = H \otimes_K K(-\lambda)$. Lorsque λ est entier, on retrouve le twist à la Tate. L'application canonique $K \to K(-\lambda)$ fournit un isomorphisme $H^{\phi^s = \pi^r} \cong H(-\lambda)^{\phi=1}$. Remarquons aussi que le dual de $K(-\lambda)$ est $K(\lambda)$ et que l'on a toujours $K(-\lambda)(-\mu) \cong K(-(\lambda+\mu))^N$ (pour un certain entier N**) et de même $\mathrm{Hom}(K(-\mu), K(-\lambda)) \cong K(-(\lambda-\mu))^N$ (pour un autre

* Nous signalons au lecteur une ommission dans l'énoncé de la Proposition 2.1 de [E-LS]: en effet, la version sans support nécessite l'hypothèse que X soit lisse.

** Nous signalons au lecteur que la formule donnée dans [Dem] est incorrecte.

entier N). Le théorème de décomposition de Manin (voir [Dem] lorsque $d = 1$) nous dit que tout F-isocristal H sur K s'écrit de manière unique comme somme directe de copies de $K(-\lambda)$. On dit alors que λ est une *pente* de H.

3.1.2. Soient X un schéma séparé de type fini sur k et F le Frobenius de X, c'est à dire le a-ième itéré du Frobenius absolu. Un *F-isocristal surconvergent* sur X est un couple formé d'un isocristal surconvergent E et d'un isomorphisme $\varphi\colon F^*E \xrightarrow{\sim} E$. Bien sûr, on peut identifier la catégorie des F-isocristaux surconvergents sur Spec(k) avec la catégorie des F-isocristaux sur K et la fibre d'un F-isocristal surconvergent E en un point fermé x de X est de manière naturelle un F-isocristal sur K. On dit que $\lambda \in \mathbb{Q}$ est une pente du F-isocristal surconvergent E s'il existe un point fermé x de X tel que λ soit une pente de E_x. Un *F-isocristal unité* est un F-isocristal surconvergent dont tous les pentes sont nulles. Cela signifie que les fibres en chaque point fermé sont des F-isocristaux unités. On dit qu'un F-isocristal surconvergent E sur X est *constant* si $E \cong \mathcal{O}_X^\dagger \otimes_K H$ où H est un F-isocristal sur K. Si E est un F-isocristal surconvergent sur X, on pose $E(-\lambda) := E \otimes_K K(-\lambda)$ et on dit que $E(-\lambda)$ est un *décalé* de E. Enfin, rappelons que si E est un F-isocristal surconvergent sur X, alors l'espace vectoriel $H^i_{\text{rig}}(X, E)$ est muni de manière naturelle d'un *Frobenius* ϕ.

Remarque 3.1.3. Si E est un F-isocristal surconvergent sur X, le plus grand sous objet constant de E est stable par Frobenius. En effet, c'est $H^0_{\text{rig}}(X, E) \otimes_K \mathcal{O}_X^\dagger$. Il en résulte que toutes les pentes de $H^0_{\text{rig}}(X, E)$ sont des pentes de E. En particulier, on voit que si E est un F-isocristal unité, alors $H^0_{\text{rig}}(X, E)$ est aussi un F-isocristal unité.

PROPOSITION 3.1.4. *Soient X une courbe lisse et connexe sur k, U un ouvert affine non vide de X et Z son complémentaire. Soit E un F-isocristal surconvergent sur X. Alors, l'isomorphisme $H^0_{\text{rig}}(X, E) \xrightarrow{\sim} H^0_{\text{rig}}(U, E)$ et la suite de Gysin*

$$0 \to H^1_{\text{rig}}(X, E) \to H^1_{\text{rig}}(U, E) \to H^0_{\text{rig}}(Z, E)(-1) \to H^2_{\text{rig}}(X, E) \to 0$$

sont stables par Frobenius. On a un isomorphisme

$$H^0_{\text{rig}}(X, E)^{\phi=1} \xrightarrow{\sim} H^0_{\text{rig}}(U, E)^{\phi=1}$$

et une suite exacte à gauche

$$0 \to H^1_{\text{rig}}(X, E)^{\phi=1} \to H^1_{\text{rig}}(U, E)^{\phi=1} \to H^0_{\text{rig}}(Z, E)^{\phi=q^{-1}}.$$

En fait, si $H^1_{\text{rig}}(X, E)$ est de dimension finie, on a une suite exacte longue

$$\begin{aligned} 0 &\to H^1_{\text{rig}}(X, E)^{\phi=1} \to H^1_{\text{rig}}(U, E)^{\phi=1} \to H^0_{\text{rig}}(Z, E)^{\phi=q^{-1}} \\ &\to H^2_{\text{rig}}(X, E)^{\phi=1} \to 0. \end{aligned}$$

Les premières assertions sont des conséquences de la construction de la suite de Gysin (voir par exemple [E-LS]). La seconde résulte de la surjectivité de $\phi - 1$ sur les espaces en question (voir par exemple le Lemme 5.6 de [I]). $\square$

Remarque 3.1.5. Sous les hypothèses de la proposition, on voit que si E est un F-isocristal surconvergent unité, alors $H^1_{\mathrm{rig}}(X, E)^{\phi=1} \xrightarrow{\sim} H^2_{\mathrm{rig}}(U, E)^{\phi=1}$. Cela résulte du fait que par la Remarque 3.1.3, on a $H^0_{\mathrm{rig}}(Z, E)^{\phi=q^{-1}} = 0$ si E est unité.

3.2. EXTENSION DE F-ISOCRISTAUX SURCONVERGENTS

Si E' et E'' sont deux F-isocristaux surconvergents sur X, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')$ est naturellement muni d'un Frobenius donné par $\varphi(n) = \varphi' \circ F^*(n) \circ \varphi''^{-1}$. De la même manière, on munit $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')$ d'un Frobenius ϕ comme suit: on compose $F^*\colon \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E') \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(F^*E'', F^*E')$ avec

$$\varphi'\colon \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(F^*E'', F^*E') \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(F^*E'', E')$$

puis avec $\varphi''^{-1}\colon \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(F^*E'', E') \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')$. Il est clair que si $\mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}$ désigne les classes d'extensions de F-isocristaux surconvergents, alors l'application $\mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')$ a pour image $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')^{\phi=1}$.

PROPOSITION 3.2.1. *L'application canonique* $\mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')^{\phi=1}$ *est bijective.*

Comme cette application est linéaire et surjective, il suffit de montrer que toute structure de Frobenius sur l'extension triviale est triviale. Une telle structure est donnée sur $E' \oplus E''$, par une matrice $\begin{pmatrix} \varphi' & m \\ 0 & \varphi'' \end{pmatrix}$ ou $m \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(F^*E'', E')$. Comme $\mathrm{Hom}(E'', E') = H^0_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{H}om(E'', E'))$ est de dimension finie par 2.1.2, alors $\phi - 1$ est surjective sur cet espace (voir par exemple [I]) et il existe donc $n\colon E'' \to E'$ tel que $(\phi - 1)(n) = m \circ \varphi''^{-1}$, c'est à dire $m = \varphi' \circ F^*(n) - n \circ \varphi''$. On a donc

$$\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi' & m \\ 0 & \varphi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & \varphi'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & F^*(n) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Si E' et E'' sont deux F-isocristaux surconvergents sur X, on a un homomorphisme fonctoriel

$$\mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \to H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{H}om(E'', E'))^{\phi=1}.$$

PROPOSITION 3.2.2. *Supposons que l'on peut plonger X comme ouvert de la fibre spéciale d'un schéma formel propre et plat P. Alors, si E' et E'' sont deux F-isocristaux surconvergents sur X, on a un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \xrightarrow{\sim} H^1_{\mathrm{rig}}(X, \mathcal{H}om(E'', E'))^{\phi=1}.$$

Notre assertion résulte de 2.2.2 et 3.2.1. □

Remarques 3.2.3. (i) Si E est extension de E'' par E', alors les pentes de E sont les pentes de E' et de E''. En particulier, si E est un F-isocristal filtré, les pentes de E sont les pentes du gradué de E.

(ii) Par construction, les isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E''(\lambda), E') \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')(-\lambda) \cong \mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E'(-\lambda))$$

sont compatibles aux Frobenius. On a donc

$$\mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'(\lambda), E'') \cong \mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E', E''(-\lambda)).$$

PROPOSITION 3.2.4. *Soient X une courbe lisse et connexe sur k et U un ouvert affine non vide de X. Soient E' et E'' deux F-isocristaux surconvergents sur X. Alors, on a un isomorphisme*

$$\mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E''_{|U}, E'_{|U})$$

et une suite exacte à gauche

$$0 \to \mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \to \mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E''_{|U}, E'_{|U}) \to \bigoplus_{x \notin U} \mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathrm{iso}}(E''_x(1), E'_x).$$

S'il n'existe pas de pentes λ de E' et μ de E'' telles que $\mu - \lambda = 1$, alors $\mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E''_{|U}, E'_{|U})$.

Si $\mathrm{Ext}_{\mathrm{Iso}^\dagger}(E'', E')$ *est de dimension finie, on a une suite exacte*

$$\begin{aligned} 0 \;&\to\; \mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \to \mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E''_{|U}, E'_{|U} \\ &\to \bigoplus_{x \notin U} \mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathrm{iso}}(E''_x(1), E'_x) \to 0 \end{aligned}$$

lorsque X est affine, et une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \;&\to\; \mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E'', E') \to \mathrm{Ext}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E''_{|U}, E'_{|U}) \\ &\to \bigoplus_{x \notin U} \mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathrm{iso}}(E''_x(1), E'_x) \to \mathrm{Hom}_{F\text{-}\mathrm{iso}^\dagger}(E''(1), E') \to 0 \end{aligned}$$

lorsque X est propre.

Cela résulte de 3.1.4 appliqué à $\mathcal{H}om(E'', E')$ et de 3.2.2. Pour la dernière assertion, on utilise aussi la dualité sur X propre et lisse (qui résulte de la dualité en cohomologie cristalline). □

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

COROLLAIRE 3.2.5. *Si X est un ouvert de la droite et λ et μ deux nombres rationnels, alors* $\mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-\mu), \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)) = 0$ *si* $\mu - \lambda \neq 1$.

On peut supposer que $X = \mathbb{P}_k^1$ auquel cas notre assertion résulte de la nullité de $H^1_{\mathrm{rig}}(\mathbb{P}_k^1)$. □

4. *F*-isocristaux unipotents

Les hypothèses et notations sont comme dans le paragraphe 3: k est algébriquement clos de caractéristique $p > 0$ et $q = p^a$ où a est un entier positif non nul. e désigne un entier positif non nul et K (resp. K_0) est le corps obtenu en ajoutant une racine primitive e-ième π de p au corps des fractions de $W(k)$ (resp. $W(\mathbb{F}_q)$). On rappelle aussi que $d = [K_0 : \mathbb{Q}_p]$ et que σ est le Frobenius de K qui laisse π invariant.

4.1. DÉFINITIONS

DÉFINITION 4.1.1. Un F-isocristal surconvergent E sur X est dit *unipotent* si l'isocristal surconvergent sous-jacent est unipotent. Attention, il ne s'agit pas d'un objet unipotent de la catégorie des F-isocristaux surconvergents. En fait, les objets unipotents de cette catégorie sont les F-isocristaux surconvergents unipotents unités.

PROPOSITION 4.1.2. *Si X est connexe, un F-isocristal surconvergent sur X est unipotent si et seulement s'il possède une filtration (croissante, exhaustive et séparée) dont le gradué est constant. En fait, la filtration naturelle sur E est stable par Frobenius.*

La condition est clairement suffisante car les F-isocristaux constants sont unipotents et pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit de montrer la dernière assertion. Celle-ci résulte de la fonctorialité de la filtration naturelle. □

COROLLAIRE 4.1.3. *Si X est connexe, un F-isocristal surconvergent sur X est unipotent si et seulement s'il est extension itérée de décalés de $\mathcal{O}_X^\dagger$.* □

Remarque 4.1.4. Soit E un F-isocristal surconvergent unipotent sur X connexe. Alors, les pentes de E sont exactement les rationnels λ qui apparaissent comme quotients dans une écriture de E comme extension itérée de F-isocristaux de la forme $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$. En d'autres termes, ce sont les λ tels que $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$ est un sous-quotient de E. En particulier, les pentes de E_x sont indépendantes du choix du point fermé x.

PROPOSITION 4.1.5. *Soient X une courbe lisse et connexe sur k et U un ouvert affine non vide de X. Alors,*

(i) *Un F-isocristal surconvergent unipotent est déterminé par sa restriction à U.*

(ii) *Tout F-isocristal unipotent unité sur U se prolonge de manière unique à X.*

C'est une conséquence de 3.2.4. □

CORLLAIRE 4.1.6. *Sur un ouvert de la droite, tout F-isocristal unipotent unité est trivial.* □

4.2. F-ISOCRISTAUX UNIPOTENTS SUR UN OUVERT DE LA DROITE AFFINE

On désigne maintenant par X un ouvert de la droite affine.

PROPOSITION 4.2.1. *Soient E' et E'' deux F-isocristaux surconvergents unipotents sur X. S'il n'existe pas de pentes λ de E' et μ de E'' telles que $\mu - \lambda = 1$, alors* $\mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(E'', E') = 0$.

On procède par récurrence sur le rang de E'. On procède ensuite par récurrence sur celui de E''. On écrit E'' comme extension de $\mathcal{O}_X^\dagger(-\mu)$ par un F-isocristal surconvergent G''. On a une suite exacte au milieu

$$\mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-\mu), E') \to \mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(E'', E') \to \mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(G'', E')$$

avec G'' et $\mathcal{O}_X^\dagger(-\mu)$ satisfaisant les mêmes hypothèses que E''. On peut donc supposer que $E'' = \mathcal{O}_X^\dagger(-\mu)$. On procède de la même façon pour E' et on se ramène ainsi au cas où $E' = \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$. Or on a vu dans le Corollaire 3.2.5 que $\mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-\mu), \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)) = 0$ si $\mu - \lambda \neq 1$. □

PROPOSITION 4.2.2. *Soit E un F-isocristal surconvergent unipotent sur X. Alors, E est somme directe de décalés de F-isocristaux surconvergents à pentes entières.*

On raisonne par récurrence sur le rang de E. On écrit E comme extension de $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$ par un F-isocristal surconvergent G. Par récurrence, on peut écrire $G = G' \oplus G''$, où les pentes de G' sont congruentes à λ modulo $\mathbb{Z}$ et aucune de celles de G'' ne le sont. Il résulte alors de 4.2.1 que

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda), G) &= \mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda), G') \oplus \mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda), G'') \\ &\cong \mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda), G').\end{aligned}$$

On peut donc écrire $E = E' \oplus G''$ et on applique l'hypothèse de récurrence. □

THÉORÈME 4.2.3. *Soit E un F-isocristal surconvergent unipotent sur un ouvert X de la droite affine. Alors E possède une unique filtration (finie, croissante, exhaustive et séparée indexée par $\mathbb{Q}$) telle que* $\mathrm{Gr}_\lambda E \cong \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)^{n_\lambda}$. *Celle-ci est fonctorielle.*

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

On procède par récurrence sur le rang de E. Soient λ la plus petite pente de E et n maximal tel que E contienne $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)^n$. Si λ était une pente du quotient G de E par $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)^n$, on pourrait trouver grâce à la Remarque 4.1.4.(i), un sous-F-isocristal surconvergent G' de G et un morphisme non nul $G' \to \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$. Comme les pentes de G sont $\geqslant \lambda$, il résulte de la Proposition 4.2.1 que ce morphisme possède une section. On voit ainsi que G', et donc aussi G, contient une copie de $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$. On tire alors la suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)^n \to E \to G \to 0$ par notre injection $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda) \hookrightarrow G$ et on obtient une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)^n \to E' \to \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda) \to 0$$

qui est scindée par 4.2.1. On a donc $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)^{n+1} \cong E' \hookrightarrow E$, ce qui contredit notre hypothèse. On voit donc que λ n'est pas une pente de G. Comme c'est une pente de E, le rang de G est strictement plus petit que celui de E et on peut appliquer à G notre hypothèse de récurrence.

Donnons nous maintenant un morphisme $u\colon E \to E'$ entre deux F-isocristaux surconvergents unipotents. Comme les pentes de $\mathrm{Fil}_\lambda E$ sont $\leqslant \lambda$ et que celles de $E'/\mathrm{Fil}_\lambda E'$ sont $> \lambda$, le morphisme composé $\mathrm{Fil}_\lambda E \to E \to E' \to E'/\mathrm{Fil}_\lambda E'$ est nul. Nous voyons donc que u respecte les filtrations. Comme corollaire, on obtient l'unicité de notre filtration. □

Par définition, cette filtration est la *filtration par les pentes*.

COROLLAIRE 4.2.4. *Si E est un F-isocristal surconvergent unipotent indécompo sable (en tant que F-isocristal surconvergent) sur X, ses pentes sont $\lambda, \lambda+1, \ldots, \lambda+r$.*

Grâce à la Proposition 4.2.2, on sait que les pentes de E sont toutes congrues modulo $\mathbb{Z}$. Supposons qu'il existe λ tel que $0 \neq \mathrm{Fil}_\lambda E = \mathrm{Fil}_{\lambda+1} E \neq E$. Alors la suite exacte $0 \to \mathrm{Fil}_\lambda E \to E \to E/\mathrm{Fil}_\lambda E \to 0$ est scindée: en effet, comme les pentes de $\mathrm{Fil}^\lambda E$ sont $\leqslant \lambda$ et que celles de $E/\mathrm{Fil}_\lambda E = E/\mathrm{Fil}_{\lambda+1} E$ sont $> \lambda+1$, cela résulte de la Proposition 4.2.1. □

5. Exemples et compléments

On désigne toujours par X un ouvert de la droite affine. Quitte à faire des décalages et des sommes directes, tout F-isocristal surconvergent unipotent E peut s'obtenir à partir de F-isocristaux surconvergents unipotents indécomposables à pentes entières. De plus, quitte à faire un nouveau décalage, on peut supposer que les pentes sont $0, 1, 2, \ldots, r$. On dispose alors d'une filtration telle que $\mathrm{Gr}_i E \cong \mathcal{O}_X^\dagger(-i)^{n_i}$.

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

En d'autres termes, si on relève X de la manière habituelle, E possède une base dans laquelle la matrice du Frobenius est triangulaire, et dont les valeurs propres sont $1, q, \ldots, q^r$. Plus précisément, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} A_0 & * & \cdot & * \\ 0 & A_1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & \cdot & 0 & A_r \end{pmatrix}$$

avec $A_i = q^i I_n$. En reprenant les arguments de la démonstration de la Proposition 3.2.1, on peut même trouver une base dans laquelle la matrice du Frobenius est la matrice diagonale

$$D(1, \ldots, 1, q, \ldots, q, \ldots, q^r, \ldots, q^r).$$

En particulier, le Frobenius est semi-simple.

5.1. COMPARAISON DES FILTRATIONS

Par fonctorialité, la filtration par les pentes est 'plus fine' que la filtration naturelle. On peut se demander si elle est strictement plus fine.

5.1.1. Avant de poursuivre, il est nécessaire de faire la remarque suivante: si E est un F-isocristal surconvergent unipotent indécomposable non constant et si λ est une pente de $E' := \mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E$, alors $\lambda + 1$ est une pente de E/E'. En effet, comme E' est constant, $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$ est facteur direct dans E'. On peut alors pousser la suite exacte $0 \to E' \to E \to E/E' \to 0$ par $E' \to \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$ pour obtenir une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda) \to F \to E/E' \to 0$. Si $\lambda + 1$ n'est pas une pente de E/E', alors cette suite est scindée et $\mathcal{O}_X^\dagger(-\lambda)$ est facteur direct dans E. Ce qui contredit nos hypothèses.

5.1.2. Montrons maintenant que si E est un F-isocristal surconvergent unipotent indécomposable de rang au plus 3, à pentes $0, 1, \ldots,$ alors les deux filtrations coïncident:

Il suffit bien sûr de traiter le cas où E n'est pas constant. Supposons que $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{pente}} E \neq \mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E$, alors $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E$ a au moins deux pentes distinctes et est donc de rang au moins 2. La Remarque 5.1.1 nous dit que $E/\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E$ a, lui aussi, au moins deux pentes distinctes et est donc aussi de rang au moins 2. On obtient donc une contradiction avec notre hypothèse que le rang de E est au plus 3. On a donc nécessairement $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{pente}} E = \mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E$ et on peut considérer le quotient F. S'il est indécomposable, on conclut par récurrence. Sinon, comme il est de rang au plus 2, il est constant et on a donc $\mathrm{Fil}_1^{\mathrm{nat}} E = E$. Il suffit donc pour conclure de montrer que 2 n'est pas une pente de E. Le seul cas non trivial est celui où F est de rang 2 et on a donc une suite exacte $0 \to \mathcal{O}_X^\dagger \to E \to F \to 0$ que l'on peut tirer par $\mathcal{O}_X^\dagger(-2) \to F$ pour obtenir une extension de $\mathcal{O}_X^\dagger(-2)$ par $\mathcal{O}_X^\dagger$. Elle est nécessairement scindée, ce qui montre que $\mathcal{O}_X^\dagger(-2)$ est contenu dans E. Contradiction.

5.1.3. Nous ne l'avons pas vérifié, mais le résultat précédent se généralise probablement aux F-isocristaux de rang quelconque lorsque $X = \mathbb{P}_k^1 \backslash \{0, \infty\}$. Nous allons voir cependant que que l'on peut construire un F-isocristal surconvergent unipotent indécomposable de rang 4 sur $\mathbb{P}_k^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ à pentes 0, 1 et 2 pour lequel les deux filtrations ne coïncident pas.

Remarquons tout d'abord qu'il existe des extensions F de $\mathcal{O}_X^\dagger(-1)$ par $\mathcal{O}_X^{\dagger 2}$ qui sont indécomposables: En effet, dire que le F-isocristal surconvergent F est décomposable signifie que l'on peut l'obtenir en poussant une extension de $\mathcal{O}_X^\dagger(-1)$ par $\mathcal{O}_X^\dagger$ par un morphisme non nul $\mathcal{O}_X^\dagger \to \mathcal{O}_X^{\dagger 2}$. Comme

$$\mathrm{Hom}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger, \mathcal{O}_X^{\dagger 2}) = [H^0_{\mathrm{rig}}(X)^{\phi=1}]^2 = K_0^2,$$

cela signifie qu'il existe $a, b \in K_0$ non tous nuls tels que F soit dans l'image de l'application linéaire

$$\begin{aligned} H^1_{\mathrm{rig}}(X)^{\phi=q} &= \mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-1), \mathcal{O}_X^\dagger) \to \mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-1), \mathcal{O}_X^{\dagger 2}) \\ &= [H^1_{\mathrm{rig}}(X)^{\phi=q}]^2. \\ \alpha &\mapsto (a\alpha, b\alpha). \end{aligned}$$

Notre assertion résulte donc du fait que $\dim H^1_{\mathrm{rig}}(X)^{\phi=q} = 2 > 1$.

Donnons nous maintenant une extension non triviale D de $\mathcal{O}_X^\dagger(-1)$ par $\mathcal{O}_X^\dagger$. La flèche naturelle $H^1_{\mathrm{rig}}(D) \to H^1_{\mathrm{rig}}(X)(-1)$ étant surjective, il en va de même de l'application évidente

$$\mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-2), D \oplus \mathcal{O}_X^\dagger(-1)) \to \mathrm{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-2), \mathcal{O}_X^{\dagger 2}(-1)).$$

Il existe donc une extension (non triviale) E de $\mathcal{O}_X^\dagger(-2)$ par $D \oplus \mathcal{O}_X^\dagger(-1)$ qui donne $F(-1)$ lorsqu'on la pousse par le morphisme $D \oplus \mathcal{O}_X^\dagger(-1)) \to \mathcal{O}_X^{\dagger 2}(-1))$.

Étudions les filtrations sur E. On a bien sûr $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{pente}} E = \mathcal{O}_X^\dagger$ et $\mathrm{Fil}_1^{\mathrm{pente}} E = D \oplus \mathcal{O}_X^\dagger(-1)$. D'autre part, comme E est une extension non triviale de $\mathcal{O}_X^\dagger(-2)$ par $D \oplus \mathcal{O}_X^\dagger(-1)$, on a $H^0_{\mathrm{rig}}(E) = H^0_{\mathrm{rig}}(D \oplus \mathcal{O}_X^\dagger(-1)) = K \oplus K(-1)$ si bien que $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E = \mathcal{O}_X^\dagger \oplus \mathcal{O}_X^\dagger(-1)$. En particulier, on voit que $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{pente}} E \neq \mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E$ et donc, comme annoncé, que les deux filtrations ne coïncident pas. Montrons aussi que $\mathrm{Fil}_1^{\mathrm{nat}} E$ est de rang 3. Il s'agit de montrer que le quotient de E par

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

$\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E$ n'est pas constant. Or celui-ci n'est autre que l'extension que l'on obtient en poussant l'extension $F(-1)$ par la première projection $\mathcal{O}_X^{\dagger 2}(-1) \to \mathcal{O}_X^{\dagger}(-1)$. Et cette extension n'est pas triviale car F est indécomposable.

Pour finir, il reste à vérifier que E est indécomposable. Supposons le contraire; on peut donc écrire $E = E_1 \oplus E_2$ et comme $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E = \mathcal{O}_X^{\dagger} \oplus \mathcal{O}_X^{\dagger}(-1)$, on a nécessairement $\mathcal{O}_X^{\dagger} \subset E_1$ et $\mathcal{O}_X^{\dagger}(-1) \subset E_2$ (ou le contraire). De plus, comme $\mathrm{Fil}_1^{\mathrm{nat}} E$ est de rang 3, on a obligatoirement E_1 ou E_2 de rang 1. Il suit que $E_1 = \mathcal{O}_X^{\dagger}$ ou $E_2 = \mathcal{O}_X^{\dagger}(-1)$. Le premier cas ne peux pas se produire car $E_1 \subset D \subset E$ et D est indécomposable. Il reste à traiter le second cas. Comme $F(-1)$ est le quotient de E par $\mathcal{O}_X^{\dagger}$ et que $\mathrm{Hom}_{F\text{-iso}^{\dagger}}(\mathcal{O}_X^{\dagger}, \mathcal{O}_X^{\dagger}(-1)) = 0$, la section $E \to E_2$ se factoriserait par $F(-1)$. Or, celui-ci est indécomposable. Contradiction.

5.1.4. Dans l'exemple précédent, si l'on relève X de la manière habituelle, on peut prendre pour E le F-isocristal dont la connexion et le Frobenius sont donnés dans une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ par les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/t \\ 0 & 0 & 0 & 1/t - 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & qu \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

avec $u = \log(1 - t^q) - \log(1 - t)^q$. On a alors $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{pente}} E = (e_1)$, $\mathrm{Fil}_0^{\mathrm{nat}} E = (e_1, e_3)$ et $\mathrm{Fil}_1^{\mathrm{pente}} E = \mathrm{Fil}_1^{\mathrm{nat}} E = (e_1, e_2, e_3)$. Pour montrer que E est indécomposable, on peut refaire de manière élémentaire le raisonnement de 5.1.3.

5.2. STRUCTURE DE FROBENIUS SUR LES ISOCRISTAUX UNIPOTENTS

Toutes les notions élémentaires concernant les F-isocristaux (surconvergents) que nous avons rappelées plus haut lorsque le corps de base est K sont encore valables au dessus de K_0. Bien sûr, on ne dispose plus alors du théorème de décomposition de Manin. Mais on a un foncteur de changement de base $E \mapsto E_K$ pour les isocristaux comme pour les F-isocristaux et une application canonique $H^1_{\mathrm{rig}}(E) \otimes_{K_0} K \to H^1_{\mathrm{rig}}(E_K)$. En utilisant la dernière remarque de [B3], on peut facilement montrer par récurrence sur le rang, que si E est un isocristal unipotent sur X lisse, cette application est un isomorphisme.

On se pose maintenant la question de savoir si tout isocristal unipotent au dessus d'un ouvert de la droite possède une structure de Frobenius. On suppose ici pour simplifier que $e = 1$.

5.2.1. Soit $X = \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q} \backslash \{0, \infty\}$. Nous allons voir que si E est un isocristal surconvergent unipotent sur X qui est une suite d'extensions *non triviales* de $\mathcal{O}_X^{\dagger}$ alors

https://doi.org/10.1023/A:1000602824628 Published online by Cambridge University Press

E possède une structure de Frobenius. On procède par récurrence sur le rang de E en montrant au passage que l'on peut supposer que $H^1_{\text{rig}}(E) = K_0(-1)$. On écrit E comme extension non triviale de $\mathcal{O}_X^\dagger$ par G. Notre hypothèse de récurrence nous dit que G possède une structure de Frobenius telle que $H^1_{\text{rig}}(G) = K_0(-1)$. L'action de Frobenius est donc la multiplication par q. On en déduit une application surjective $\text{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger, G(1)) \to \text{Ext}_{\text{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger, G)$. Cela montre que E peut être muni d'une structure de Frobenius qui en fait une extension de $\mathcal{O}_X^\dagger$ par $G(1)$. Il reste à montrer que $H^1_{\text{rig}}(E) = K_0(-1)$. Pour cela, on considère la suite exacte longue de cohomologie

$$0 \to H^0_{\text{rig}}(G)(1) \to H^0_{\text{rig}}(E) \to K_0 \to H^1_{\text{rig}}(G)(1) \to H^1_{\text{rig}}(E) \\ \to K_0(-1) \to 0.$$

Comme notre extension n'est pas triviale, on a nécessairement $H^0_{\text{rig}}(G)(1) \xrightarrow{\sim} H^0_{\text{rig}}(E)$ et comme on est sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}\backslash\{0,\infty\}$, la caractéristique d'Euler–Poincaré d'un isocristal unipotent est nulle. On a donc

$$\dim H^1_{\text{rig}}(E) = \dim H^0_{\text{rig}}(E) = \dim H^0_{\text{rig}}(G) = \dim H^1_{\text{rig}}(G) = 1.$$

On voit donc que les flèches $K_0(-1) \to H^1_{\text{rig}}(G)$ et $H^1_{\text{rig}}(E) \to K_0(-1)$ sont nécessairement bijectives.

5.2.2. Dans 5.2.1, l'hypothèse que E est une suite d'extensions non triviales n'est pas nécessaire*. On peut montrer que tout isocristal surconvergent unipotent sur $X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}\backslash\{0,\infty\}$ est somme directe d'isocristaux surconvergents satisfaisant les hypothèses de 5.2.1. Malheureusement, la seule démonstration que nous avons de ce résultat est assez laborieuse et nous préférons ne pas la reproduire ici. On voit donc que tout isocristal surconvergent unipotent sur X possède une structure de Frobenius.

5.2.3. Le résultat de 5.2.1 est toujours valable pour un cristal de rang 2 lorsque X est la droite affine privée de n points. On a $H^1_{\text{rig}}(X) = K_0^n(-1)$ et on a donc une surjection $\text{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger(-1), \mathcal{O}_X^\dagger) \to \text{Ext}_{\text{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger, \mathcal{O}_X^\dagger)$. Il suit que si E est une extension de $\mathcal{O}_X^\dagger$ par $\mathcal{O}_X^\dagger$, on peut munir E d'une structure de Frobenius qui en fait une extension de $\mathcal{O}_X^\dagger(-1)$ par $\mathcal{O}_X^\dagger$. De plus, si E est une extension non triviale, toute structure de Frobenius sur E_K est à isomorphisme près, obtenue par extension de la base et décalage à partir de celle ci. En effet, on a un isomorphisme $\text{Ext}_{F\text{-iso}^\dagger}(\mathcal{O}_{X_k}^\dagger(-1), \mathcal{O}_{X_k}^\dagger) = H^1_{\text{rig}}(E_K)^{\phi=q} = H^1_{\text{rig}}(E) = \text{Ext}_{\text{Iso}^\dagger}(\mathcal{O}_X^\dagger, \mathcal{O}_X^\dagger)$.

5.2.4. Nous allons voir que le résultat de 5.2.1 est faux pour un cristal de rang 3 sur $X := \mathbb{P}^1_{\mathbb{F}_q}\backslash\{0,1,\infty\}$. En effet, comme $H^1_{\text{rig}}(X) \neq 0$, il existe une suite exacte

* E. Pons a donné une démonstration directe de ce résultat.

non scindée $0 \to \mathcal{O}_X^\dagger \xrightarrow{\alpha} E' \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X^\dagger \to 0$. Par 5.2.3, on peut munir E' d'un Frobenius. Le morphisme β fournit une surjection $H^1_{\mathrm{rig}}(E') \to H^1_{\mathrm{rig}}(X)$ et on note U le complémentaire dans $H^1_{\mathrm{rig}}(E')$ du noyau de cette flèche. Tout $\eta \in U$ nous fournit une suite exacte $0 \to E' \to E \to \mathcal{O}_X^\dagger \to 0$ telle que la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_X^\dagger \to E'' \to \mathcal{O}_X^\dagger \to 0$$

obtenue en la poussant par β ne soit pas scindée. Considérons alors les filtrations naturelles. On a $\mathrm{Fil}_0 E = \mathrm{Fil}_0 E' = \mathcal{O}_X^\dagger$ et $E' = \mathrm{Fil}_1 E' \subset \mathrm{Fil}_1 E$. En fait, on a même $E' = \mathrm{Fil}_1 E$. Sinon, on aurait $E = \mathrm{Fil}_1 E$ et donc $\mathrm{Gr}_1 E = E''$, ce qui est impossible par hypothèse. Supposons que E est muni d'un Frobenius. Comme la filtration naturelle est stable par Frobenius, le sous isocristal E' de E est stable sous l'action du Frobenius de E. Puisque toute structure de Frobenius sur E'_K est à isomorphisme près, obtenue par décalage à partir de l'originale, il existe i et $j \in \mathbb{Z}$ tels que la suite exacte d'isocristaux surconvergents

$$0 \to E'_K(j) \to E_K \to \mathcal{O}_{X_k}^\dagger(i) \to 0$$

soit stable par les Frobenius. On voit donc que $\eta \in H := \bigcup_{i,j} H^1_{\mathrm{rig}}(E'_K)^{\phi = q^{j-i}}$. On a une suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{O}_X^\dagger \xrightarrow{\alpha} E'_K \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_X^\dagger(-1) \to 0$$

qui nous fournit une suite exacte

$$0 \to K(-1) \to K^2(-1) \to H^1_{\mathrm{rig}}(E'_K) \to K^2(-2) \to 0.$$

Il suit que si l'on prend $\eta \in U \backslash H$, alors E_K ne peut pas avoir de structure de Frobenius.

5.2.5. Si l'on relève X de la manière habituelle, on peut prendre pour E le F-isocristal sur $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ dont la connexion est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/t & 1/(t-1) \\ 0 & 0 & 1/t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La connexion sur $E' = F^* E$ est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & q/t & qt^{q-1}/(t^q - 1) \\ 0 & 0 & 1/t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que, quitte à faire un décalage et un changement de base qui n'altère pas les matrices ci-dessus, la matrice du Frobenius est nécessairement de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & w \end{pmatrix}.$$

On peut alors vérifier à la main que cela est impossible.

5.2.6. Il est cependant fort possible que tout isocristal surconvergent unipotent puisse se réaliser comme quotient (ou sous-objet) d'un F-isocristal surconvergent unipotent*. Nous espérons pouvoir revenir sur cette question dans le futur. Dans l'exemple précédent, il suffit de considérer le F-isocristal sur $\mathbb{P}^1 \backslash \{0, 1, \infty\}$ dont la connexion est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1/(t-1) \\ 0 & 0 & 1/t & 1/(t-1) \\ 0 & 0 & 0 & 1/t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La connexion sur F^*E est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & qt^{q-1}/(t^q-1) \\ 0 & 0 & q/t & qt^{q-1}/(t^q-1) \\ 0 & 0 & 0 & q/t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et on muni E du Frobenius dont la matrice est

$$\begin{pmatrix} q & 0 & 0 & u \\ q-1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}$$

avec $u = \log(1-t^q) - \log(1-t)^q$.

* P. Deligne nous a montré en utilisant les catégories tannakiennes que cette question admet une réponse positive.

Remerciements

Durant la préparation de cet article, nous avons eu des conversations stimulantes avec Y. André, F. Baldassarri, P. Berthelot, R. Crew, B. Dwork et J.-P. Wintenberger. Qu'ils en soient ici remerciés ansi que le referee pour ses judicieuses remarques. Nous remercions aussi les universités de Padova et de Rennes où l'essentiel de ce travail a été réalisé, ainsi que le réseau européen *p-adic methods in Arithmetic Algebraic Geometry* .

Bibliographie

[B-C] Baldassarri, F. and Chiarellotto, B.: *Algebraic Versus Rigid Cohomology with Logarithmic Coefficients*, Barsotti symposium in algebraic geometry, Academic Press, 1994, pp. 11–50.

[B1] Berthelot, P.: *Cohomologie rigide et cohomologie rigide à support propre. Première partie*, prépublication de l'IRMAR 96-03, 1996.

[B2] Berthelot, P.: Finitude et pureté cohomologique en cohomologie rigide, *Invent. Math.* **128** (1997), 239–377.

[B3] Berthelot, P.: Dualité de Poincaré et Formule de Kunneth en cohomologie rigide, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I* **325** (1997), 493–498.

[C-M] Christol, G. and Mebkhout, Z.: Sur le théorème de l'indice des équations p-adique III, prépublication, 1997.

[Del] Deligne, P.: Le groupe fondamental de la droite projective moins trois points, in: *Galois Groups Over* $\mathbb{Q}$, MSRI publ. 16, Springer, New York, 1989.

[Dem] Demazure, P.: *Lectures on p-Divisible Groups*, Lecture Notes in Math. 302, Springer, New York, 1972.

[E-LS] Etesse, J.-Y. and Le Stum, B.: Fonctions L associées aux F-isocristaux surconvergents I, Interprétation cohomologique, *Math. Ann.* **296** (1993), 557–576.

[I] Illusie, L.: Complexe de de Rham–Witt et cohomologie cristalline, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **12** (1979), 501–661.