SUR LES FONCTIONS MÉROMORPHES AUX LIMITES FINES

NOBUSHIGE TODA

dédié à Monsieur le Professeur K. Noshiro, à l'occasion de son soixantième anniversaire

1. Introduction

Dans ce mémoire, on continue d'étudier sur les fonctions à des limites fines que J. L. Doob a trouvées [5]. On a trouvé quelques propriétés des fonctions dans [10]. Dans le paragraphe 2 on donne une condition suffisante afin qu'une fonction admette une limite fine et on étudie sur l'indice harmonique d'un spot asymptotique d'une fonction à une limite fine. Le paragraphe 3 est consacré aux études d'autres propriétés.

2. Une condition suffisante

D'abord on donne quelques lemmes.

Lemme 1. *Soit $u(z)$ une fonction surharmonique dans un domaine D tel que le point à l'infini ($=\omega$) est un point-frontière irrégulier de D. Si $u(z)/\log|z|$ est bornée inférieurement dans un voisinage fin de ω, alors $u(z)/\log|z|$ admet une limite fine finie en ω* [2].

Lemme 2. *Si un ensemble E quelconque dans le plan est effilé en ω, il existe des circonférences arbitrairement grandes de centre 0 ne rencontrant pas E* [4].

Lemme 3. *Soit D un domaine comme dans le Lemme 1 et de complémentaire non polaire, $u(z)$ une fonction surharmonique positive dans D et nulle continûment sur les points-frontière réguliers de D. Alors il existe une fonction harmonique positive minorante $h(z)$ de $u(z)$ dans D si et seulement si la limite fine de $u(z)/\log|z|$, qui est finie d'après le Lemme 1, est positive.*

Démonstration. D'abord on trouve que, s'il existe une fonction $h(z)$ comme dans ce lemme, la limite fine de $h(z)/\log|z|$ (soit α) est positive. Ce qu'elle

Received March 9, 1966.

existe est assuré du Lemme 1.

On pose

$$s(z) = \begin{cases} h(z) & \text{dans } D \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

alors la régularisée $\hat{s}(z)$ de $s(z)$ est sousharmonique dans le plan fini, de sorte que la moyenne de $\hat{s}(z)$:

$$m_{\hat{s}}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \hat{s}(re^{i\theta})d\theta$$

est convexe de $\log r$. Donc, la limite

$$\lim_{r\to+\infty} \frac{m_{\hat{s}}(r)}{\log r} = \beta$$

existe. Cette limite est égale à α, parce qu'il existe une suite (r_n) telle que $r_n \nearrow +\infty$, $(|z| = r_n) \subset D$, $h(r_n e^{i\theta})/\log r_n$ tend vers α uniformément par rapport à θ d'apès le Lemme 2, et pour cette suite

$$\beta = \lim_{n\to\infty} \frac{m_{\hat{s}}(r_n)}{\log r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{h(r_n e^{i\theta})}{\log r_n} = \alpha.$$

D'après un theorème de M. Brelot [3], ce que β est finie entraîne que $\hat{s}(z)/\log|z|$ est bornée dans un voisinage de ω. Si α est nulle, grâce à un théorème de M. Brelot [2], $h(z) \equiv 0$. C'est contraire à l'hypothèse, c'est-à-dire, il faut que $\alpha > 0$. $u(z) \geq h(z)$, par conséquent, la limite fine de $u(z)/\log|z|$ est positive.

Inversement, si la limite fine de $u(z)/\log|z|$ est positive, $u(z)/G_\omega(z)$ admet une limite fine finie positive en ω, où $G_\omega(z)$ est harmonique positive dans D, nulle continûment sur les points-frontière réguliers de D et son flux en ω est 2π. En effet, parce que $u(z)/\log|z|$ et $G_\omega(z)/\log|z|$ admettent des limites fines finies positives en ω,

$$\frac{u(z)}{G_\omega(z)} = \frac{u(z)/\log|z|}{G_\omega(z)/\log|z|}$$

admet une limite fine finie positive (soit δ).

L'ensemble

$$V = (z \in D;\ u(z)/G_\omega(z) > (\delta - \varepsilon))$$

est un voisinage fin de ω, où ε est un nombre positif plus petit que δ. Par conséquent, d'après le Lemme 2, il existe une suite (r_n) telle que $r_n \nearrow +\infty$, $(|z|=r_n) \subset V$: $u(r_n e^{i\theta}) > (\delta - \varepsilon) G_\omega(r_n e^{i\theta})$ pour tout θ.

Considérons une fonction surharmonique:

$$v(z) = u(z) - (\delta - \varepsilon) G_\omega(z)$$

dans $D \cap (|z| < r_n) = D_n$, n quelconque, alors à un ensemble de capacité zéro sur la frontière de D_n près

$$\liminf_{z \to \partial D_n} v(z) \geq 0.$$

Grâce au principe de minimum, $v(z) \geq 0$ dans D_n, n quelconque, en conséquence $v(z)$ est non-négative dans D. Cela veut dire que $u(z)$ admet une fonction harmonique positive minorante: $(\delta - \varepsilon) G_\omega(z)$.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan fini ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini, si elle admet une limite fine ∞ en ω, il y a un seul spot asymptotique sur ∞. On calcule l'indice harmonique de ce spot asymptotique. (Sur la définition d'indice harmonique d'un spot asymptotique, voir [7].)

THÉORÈME 1. *L'indice harmonique de ce spot asymptotique est* 0 *ou* 1.

Démonstration. Soit D une partie non relativement compacte, conexe de $(z; |f(z)| > 1)$ (il n'exsite qu'un tel domaine D grâce à un théorème de L. Naïm [8]).

On connaît bien l'égalité

$$\sum_{f(z_0)=\infty} n(z_0) G(z, z_0) + u(z) = \log |f(z)|$$

dans D, où $n(z_0)$ est l'ordre de multiplicité de $f(z)$ en z_0, $G(z, z_0)$ est la fonction de Green de D et $u(z)$ est la fonction harmonique minorante de $\log |f(z)|$ la plus grande.

Si $u(z) \not\equiv 0$, on trouve que l'indice harmonique est 1. D'abord, on démontre que $u(z) = \alpha \cdot G_\omega(z)$ dans D où α est un nombre positif. En effet, comme dans la démonstration du Lemme 3, la limite fine de $u(z)/\log|z|$ est positive finie, par conséquent, $u(z)/G_\omega(z)$ admet une limite fine finie positive (soit α).

L'ensemble

$$V = (z \in D; \ (\alpha + \varepsilon) > u(z)/G_\omega(z) > (\alpha - \varepsilon))$$

est un voisinage fin de ω, où ε est un nombre positif quelconque plus petit que α, de sorte que, comme dans la démonstration du Lemme 3, on a, dans D,

$$(\alpha+\varepsilon)G_\omega(z) \geq u(z) \geq (\alpha-\varepsilon)G_\omega(z).$$

Cela veut dire que

$$u(z) = \alpha \cdot G_\omega(z)$$

dans D, puisque ε est positif quelconque. Soit D_r une partie non relativement compact connexe de $(z;\ |f(z)|>r>1)$. $D_r \subset D$. Alors dans D_r on a une égalité suivante comme dans la première partie de cette démonstration:

$$\sum_{f(z_0)=\infty} n(z_0)G_r(z, z_0) + u_r(z) = \log|f(z)/r|.$$

Puisque le complémentaire de $D_r (= \mathscr{C}D_r)$ est effilé en ω pour tout r, d'après le Lemme 3, $\log|f(z)/r|/\log|z|$ admet une limite fine finie positive et le Lemme 3 entraîne que $u_r(z) \not\equiv 0$. Comme dans la première partie de cette démonstration, $u_r(z) = \beta_r \cdot G^r_\omega(z)$ où $G^r_\omega(z)$ est harmonique positive dans D_r, nulle continûment sur la frontière de D_r et son flux en ω est 2π, β_r un nombre positif. D'après la définition d'indice harmonique, l'indice harmonique de ce spot asymptotique est 1. Si $u(z) \equiv 0$, l'indice harmonique est évidemment 0.

N. B. Cette démonstration indique que l'indice harmonique est 0 ou 1 si pour un r, $u_r(z) \equiv 0$ ou non réspectivement.

Maintenant, on donne une condition suffisante pour qu'une fonction admette une limite fine en ω.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan fini ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini, D une partie non relativement compacte, connexe de $(z;\ |f(z)|>1)$, $G(z, z_0)$ la fonction de Green de D. On connaît bien l'égalité suivante

$$\sum_{f(z_0)=\infty} n(z_0)G(z, z_0) + u_\omega(z) = \log|f(z)|$$

dans D, où $n(z)$ est l'ordre de multiplicité de $f(z)$ en z, $u_\omega(z)$ la fonction harmonique minorante de $\log|f(z)|$ la plus grande. Dans cette situation, on a

THÉORÈME 2. *Si $u_\omega(z) \not\equiv 0$ et si*

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{m(r, f)}{\log r} < +\infty,$$

alors $f(z)$ admet une limite fine ∞ en ω.

Démonstration. On pose

$$u(z)=\begin{cases} u_\omega(z) & \text{dans } D \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

alors $u(z)$ est sousharmonique non-négative dans le plan fini.

Soit

$$m_u(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta$$

la moyenne de $u(z)$. $m_u(r)$ est convexe de $\log r$, par conséquent, $m_u(r)/\log r$ admet une limite pour $r\nearrow+\infty$ qui est finie dans ce cas-là, parce que

$$m_u(r)\leq m(r,f)$$

pour tout r. Cela veut dire qu'en vertu d'un théorème de M. Brelot [3], $u(z)/\log|z|$ est bornée dans un voisinage de ω. En considérant que $u_\omega(z)\not\equiv 0$, le point à l'infini est un point irrégulier de D grâce à un théorème de M. Brelot [2]. Cela veut dire que $\mathscr{C}D$ est effilé en ω, par conséquent, $f(z)$ admet une limite fine en ω, qui est ∞ en vertu d'un théorème de M. Heins [6].

Un exemple. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini et admettant une limite fine 0 en ce point. Alors $g(z)=f(z)+z$ admet une limite fine ∞ en ω, parce que $|z|-|f(z)|\leq|g(z)|$. $\log|g(z)|/\log|z|$ a une limite fine 1 en ω, par conséquent, d'après le Lemme 3, l'indice harmonique du spot asymptotique sur ∞ est 1. Cette fonction est aussi un exemple qui satisfait les conditions du Théorème 2.

N. B. On ne peut pas donner un exemple dont l'indice harmonique est 0.

3. Direction de Julia

Une fonction méromorphe dans le plan ayant un point singulier essentiel isolé en ω et admettant une limite fine en ω a une propriété intéressante pour la direction de Julia. On le voit suivant.

Lemme 4. *Soit E un ensemble compact dont le complémentaire $\mathscr{C}E$ est un domaine,* $0<\lambda<1$, $E_n=E\cap(\lambda^{n+1}\leq|z|\leq\lambda^n)$, *$C_n$ capacité de E_n. Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\lambda^n}=+\infty,$$

l'origine 0 est un point régulier du domaine $\mathscr{C}E$ (*voir* [11]).

En utilisant ce Lemme, on démontre un autre lemme. Soit D un domaine tel que l'origine est un point-frontiére de D, $E = \mathscr{C}D$,

$$K_r = (\theta\,;\ (\arg z = \theta) \cap (E - \{0\}) \cap (|z| \leq r) \neq \phi) \text{ et } \theta_r = \int_{K_r} d\theta.$$

LEMME 5. *Si l'origine* 0 *est un point irrégulier du domaine* D, $\lim_{r \to 0} \theta_r = 0$.

Démonstration. On peut supposer que E soit compact. Soit $K_n = (\theta\,;$ $(\arg z = \theta) \cap E_n \neq \phi)$, $\theta_n = \int_{K_n} d\theta$.

1) le cas où $(E - \{0\}) \subset (0 \leq \arg z \leq \pi/2)$. On sait que si Γ est un arc sur $|z| = R$ dont l'angle vu de l'origine est θ, la capacité de Γ est $R \cdot \sin \theta/4$. Alors en considérant la définition de capacité par le diamètre transfini, on obtient l'inégalité

$$\lambda^{n+1} \sin \theta_n/4 \leq C_n.$$

Grâce au Lemme 4, en utilisant $2\theta/\pi \leq \sin \theta$ pour θ entre 0 et $2^{-1}\pi$, pour ε positif quelconque, il existe un n_0 tel que

$$\frac{\lambda}{2\pi} \theta_{\lambda^{n_0}} \leq \frac{\lambda}{2\pi} \sum_{n=n_0}^{\infty} \theta_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{C_n}{\lambda} \leq \varepsilon.$$

Cela veut dire que

$$\lim_{r \to 0} \theta_r = 0$$

2) les autres. Soit

$$E_i = (E - \{0\}) \cap \left(\frac{\pi}{2}(i-1) \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \cdot i\right) \cup \{0\} \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

alors $E = \bigcup_{i=1}^{4} E_i$. Pour chaque E_i, on applique le cas (1) et on obtient le résultat.

THÉORÈME 3. *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans le plan fini ayant un point singulier essentiel isolé à l'infini et admettant une limite fine en ce point. Alors $f(z)$ a une direction de Julia telle que dans n'importe quel domaine angulaire qui est partagé en deux domaines angulaires égales par cela, $f(z)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard.*

Démonstration. On peut supposer que la limite fine soit 0. Soit D une partie non relativement compacte, connexe de $(z\,;\ |f(z)| < 1)$, $D_\varepsilon = \left(z \in D\,;\ G(z, z_0) > \frac{\varepsilon}{2}\right)$

où $G(z, z_0)$ est la fonction de Green de D et $\limsup_{z\to\omega} G(z, z_0) = \varepsilon$ est positif parce que $\mathscr{C}D$ est effilé en ω. $\mathscr{C}D_\varepsilon$ est aussi effilé en ω. Soit $\nu_f^\varepsilon(w)$ le nombre de points de D_ε où $f(z)$ est égale à w, w quelconque de la sphère de Riemann. Alors comme dans la démonstration du théorème 3 [9], $\nu_f^\varepsilon(w)$ est bornée et $f(z)$ tend vers 0 sur D_ε quand z tend vers ω. $\mathscr{C}D_\varepsilon$ se compose de domaines de nombre infini dont les frontières sont analytiques. Soit A_n un domaine composant connexe de $\mathscr{C}D_\varepsilon$ qui contient au moins un zéro de $f(z)$. Il existe un nombre infini de tels domaines parce que $f(z)$ n'a pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard d'après un théorème de J. L. Doob [5] et que $\nu_f^\varepsilon(0)$ est fini. Soit $a_n = r_n e^{i\theta_n}$ un des zéro de $f(z)$ dans A_n. On peut supposer que $r_1 \leq r_2 \leq r_3 \leq \cdots \leq r_n \nearrow +\infty$, Soit θ_0 un des points d'accumulation de (θ_n), β_n l'angle de A_n vu de l'origine 0. Alors en considérant l'inverse de A_n par rapport à $|z| = 1$ [1], grace au Lemme 5, β_n tend vers 0. Arg $z = \theta_0$ est une direction que l'on cherche. En effet, soit Δ un domaine angulaire arbitraire qui contient arg $z = \theta_0$ comme ligne droite qui le partage en deux parties égales:

$$\Delta = (z\,;\ \theta_0 - \varepsilon < \arg z < \theta_0 + \varepsilon)$$

où ε est un nombre positif quelconque. Puisque β_n tend vers 0, il existe un n_0 tel que pour tout n plus grand que n_0, $A_n \subset \Delta$. (On peut supposer que θ_n tend vers θ_0.)

On trouve maintenant que sur $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, il n'existe pas de valeurs exceptionnelles au sens de Picard. Pour $a \neq 0, \infty$, en considérant que sur D_ε $f(z)$ tend vers 0, il existe un n_a tel que pour tout $n \geq n_a$,

$$f^{-1}(|w| > |a| - \varepsilon_1) \subset A_n$$

où ε_1 est un nombre positif plus petit que $|a|$. C'est-à-dire que $f(z)$ admet a dans A_n $(n \geq n_a)$ au moins une fois. On a pris A_n de la manière à contenire au moins un zéro et un pôle de $f(z)$ dans A_n. On a le résultat.

Bibliographie

[1] M. Brelot, Sur le rôle du point à l'infini dans la théorie des fonctions harmoniques. Ann. E. N. S. **61** (1944), 301-332.

[2] ——, Étude générale des fonctions harmoniques ou surharmoniques positives au voisinage d'un point-frontière irrégulier. Ann. Univ. Grenoble, **22** (1946), 201-219.

[3] ——, Étude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point singulier. Ann.

Inst. Fourier, **1** (1949), 121–156.
[4] ——, Éléments de la théorie classique du potentiel. Paris, C. D. U. 3e édition 1965.
[5] J. L. Doob, Some classical function theory theorems and their modern versions. Ann. Inst. Fourier, **15** (1965), 113–135.
[6] M. Heins, On the Lindelöf principle. Ann. Math. **61** (1955), 440–473.
[7] ——, Asymptotic spots of entire and meromorphic functions. Ann. Math. **66** (1957), 430–439.
[8] L. Naïm, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potentiel. Ann. Inst. Fourier, **7** (1957), 183–281.
[9] N. Toda, Étude des fonctions méromorphes au voisinage d'un point-frontière irrégulier. Bull. Sciences Math. 2e série, **89** (1965), 93–102.
[10] ——, Sur l'allure des fonctions méromorphes. Nagoya Math. J. **26** (1966), 173–181.
[11] M. Tsuji, Potential theory in modern function theory. Maruzen, Tokyo 1959.

Institut de mathématiqus
Université de Nagoya