SUR DE NOUVELLES SOLUTIONS OSCILLATOIRES DES EQUATIONS DE LA GRAVITATION

ALPHONSE MATTE

1. Introduction. Nous savons que dans le champ gravitationnel de la relativité (i.e. défini par les équations $R_{\mu\nu} = 0$) les ondes dites gravitationnelles se propagent avec la vitesse de la lumière. Nous allons maintenant voir, dans le présent travail que si, dans le même continuum, on impose aux potentiels $g_{\mu\nu}$ une oscillation de fréquence assez élevée, il en résulte une onde du type maxwellien. En d'autres termes les éléments de courbure $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ vérifient certaines équations, à savoir, $R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu,\alpha} = 0$, que nous allons déduire directement de $R_{\mu\nu} = 0$ et qui se réduisent aux équations de Maxwell suivant une approximation qui est précisément basée sur la valeur élevée de la fréquence. Il se trouve alors que l'onde est maxwellienne en première approximation, même si la courbure du milieu de propagation prend une valeur finie, et pour des oscillations dont l'amplitude peut être aussi petite qu'on veut. Nous soulignons ce point parce que dans le cas du résultat classique concernant les ondes gravitationnelles la partie principale de la courbure est précisément due à l'onde et celle-ci se propage dans un milieu qui est presqu'euclidien.

En vue d'obtenir le résultat annoncé il apparaîtra essentiel de séparer l'espace et le temps de sorte que nous adopterons, pour l'élément d'arc, la forme classique:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - d\sigma^2, \tag{1.1}$$

avec

$$d\sigma^2 = a_{rs} dx^r dx^s \qquad (r, s = 1, 2, 3)$$

dans laquelle les fonctions a_{rs} et c dépendent des quatre variables x^r et t (t pour x^0). Nous verrons alors comment il est possible de remplacer les équations $R_{\mu\nu} = 0$ par un système invariant par rapport aux variables d'espace x^r et dans lequel le temps figure comme un paramètre n'ayant plus le caractère tensoriel. Ce système fournira ensuite de nouvelles équations dans lesquelles les éléments de courbure $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ seront groupés en deux tenseurs E_{rs} et H_{rs} tridimensionnels ($r, s = 1, 2, 3$) et de second ordre qui, en première approximation, et du point de vue de la structure des équations, joueront le même rôle que les vecteurs **E** et **H** dans les équations de Maxwell.

2. Notations. Nous rencontrerons des équations invariantes dans l'espace-temps ainsi que d'autres invariantes seulement dans les sections spatiales. Pour faire la distinction nous conviendrous que les lettres grecques employées comme indices doivent prendre les quatre valeurs 0, 1, 2, 3, alors que les caractères latins seront limités aux seules valeurs 1, 2, 3.

Reçu le 13 juin 1951; revisé le 12 mars 1952.

Par ailleurs tout symbole tensoriel surmonté d'une barre comme par exemple:

$$\bar{R}_{\mu\nu},\ \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu},\ \bar{\Gamma}_{\alpha\beta\nu}$$

représentera un système 4-dimensionnel de l'espace-temps, alors que pour les systèmes correspondant des sections spatiales la barre sera omise. De cette façon il sera possible de distinguer entre un système de l'espace 3-dimensionnel tel que R_{uvrs} et un autre système 3-dimensionnel comme $\bar{R}_{uvrs}$, représentant une partie des composantes du tenseur $\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$.

Cependant nous emploierons deux lettres différentes pour représenter les tenseurs métriques: a savoir $g_{\mu\nu}$ pour l'espace temps et a_{rs} pour les sections spatiales. Il est entendu qu'on peut toujours choisir les coordonnées pour que $g_{0i} = 0$ de sorte qu'on a l'élément d 'arc (1.1) dans lequel:

$$g_{00} = c^2, \quad a_{rs} = -g_{rs}. \tag{2.1}$$

Alors le système a_{rs} détermine la métrique de toute une famille de sections spatiales paramétrées suivant le temps t, et l'espace 3-dimensionnel ainsi déterminé sera souvent représenté par le symbole $E(3)$.

Un calcul facile donne:

$$\begin{gathered} g = -c^2 a, \qquad a = ||a_{rs}||, \\ g^{00} = c^{-2},\ g^{0i} = 0,\ g^{rs} = -a^{rs}. \end{gathered} \tag{2.1a}$$

Nous écrirons

$$A_{rs} = \frac{1}{2c}\frac{\partial a_{rs}}{\partial t}. \tag{2.2}$$

Le système ainsi défini est un tenseur de $E(3)$ puisque d'une part, les éléments $\partial x^i/\partial x'^k$ d'une transformation ne dépendant pas du temps et l'opérateur $\partial/\partial t$ d'autre part sont permutables. Cependant il est important de noter que la relation correspondante écrite au moyen des composantes contravariantes définirait le tenseur de signe contraire. Effectivement si on dérive les deux membres de l'identité

$$a^{rs} = a_{mn}a^{mr}a^{ns},$$

on obtient

$$\frac{\partial a^{rs}}{\partial t} = a^{mr}a^{ns}\frac{\partial a_{mn}}{\partial t} + \delta_m{}^s\frac{\partial a^{mr}}{\partial t} + \delta_n{}^r\frac{\partial a^{ns}}{\partial t},$$

d'où

$$-\frac{\partial a^{rs}}{\partial t} = a^{mr}a^{ns}\frac{\partial a_{mn}}{\partial t},$$

c'est-à-dire

$$A^{rs} = -\frac{1}{2c}\frac{\partial a^{rs}}{\partial t}. \tag{2.2a}$$

Ce tenseur est évidemment symétrique.

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-001-3 Published online by Cambridge University Press

Dans $g_{00} = c^2$, la fonction $c(x^r,t)$ est un invariant de $E(3)$ et son gradient peut se présenter dans nos équations invariants 3-dimensionnelles comme un vecteur. Nous adopterons la notation:

$$\frac{\partial c}{\partial x^n} = c_n, \quad \frac{\partial c}{\partial t} = c_0.$$

Pour ce qui est des symboles de Christoffel nous adopterons la notation:

$$\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\right), \quad \bar{\Gamma}_{\alpha\beta}{}^{\mu} = g^{\mu\nu}\bar{\Gamma}_{\alpha\beta\nu}.$$

Alors avec l'aide de $g_{rs} = -a_{rs}$ dans (2.1) nous avons immédiatement: $\bar{\Gamma}_{rst} = -\Gamma_{rst}$. Par ailleurs

$$\bar{\Gamma}_{000} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial t} = cc_0,$$

et de la même façon il est aisé de vérifier les résultats qui suivent:

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{000} &= cc_0, & \bar{\Gamma}_{rs0} &= \frac{1}{2}\frac{\partial a_{rs}}{\partial t},\\
\bar{\Gamma}_{00r} &= -cc_r, & \bar{\Gamma}_{r0s} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial a_{rs}}{\partial t},\\
\bar{\Gamma}_{r00} &= cc_r, & \bar{\Gamma}_{rst} &= -\Gamma_{rst},
\end{aligned}$$

$$(2.3)\qquad \left\{\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{00}{}^{0} &= \frac{c_0}{c}, & \bar{\Gamma}_{rs}{}^{0} &= \frac{1}{c}A_{rs},\\
\bar{\Gamma}_{00}{}^{r} &= a^{rs}cc_s, & \bar{\Gamma}_{r0}{}^{t} &= cA_r{}^{t},\\
\bar{\Gamma}_{r0}{}^{0} &= \frac{c_r}{c}, & \bar{\Gamma}_{rs}{}^{t} &= \Gamma_{rs}{}^{t}.
\end{aligned}\right.$$

3. Les équations $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$ sous forme invariante dans $E(3)$. Considérons le système $\bar{R}_{ursv}$ qui représente seulement une partie des composantes du tenseur $\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$; nous allons voir que nous avons là un tenseur de $E(3)$ aussi longtemps que rien n'est changé dans la séparation de l'espace et du temps. Cela veut dire que nous considérons des transformations de coordonnées du type

$$x'^0 = x^0 = t, \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} = 1, \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^r} = \frac{\partial x^r}{\partial x'^0} = 0.$$

Alors la relation

$$\bar{R}'_{ursv} = \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^u}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^r}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^s}\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^v}$$

donne immédiatement (puisqu'aucun terme significatif n'est obtenu lorsque les indices muets prennent la valeur 0)

$$\bar{R}'_{ursv} = \bar{R}_{abmn}\frac{\partial x^a}{\partial x'^u}\frac{\partial x^b}{\partial x'^r}\frac{\partial x^m}{\partial x'^s}\frac{\partial x^n}{\partial x'^v},$$

ce qui prouve notre avancé.

Les autres composantes de $\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ donnent encore deux de ces tenseurs 3-dimensionnels dont l'ordre est égal au nombre des indices qui n'ont pas été remplacés par la valeur 0. La vérification du caractère tensoriel s'effectue comme précédemment et nous avons en premier lieu

$$\bar{R}'_{r00s} = \bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^r} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^0} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^s},$$

où les sommes donnent des termes non nuls seulement pour $\beta = \mu = 0$ de sorte que

$$\bar{R}'_{r00s} = \bar{R}_{a00n} \frac{\partial x^a}{\partial x'^r} \frac{\partial x^n}{\partial x'^s}.$$

Enfin on montre, toujours de la même façon que le système R_{r0mn} est un tenseur de troisième ordre de $E(3)$.

Notons qu'on peut toujours faire usage des propriétés de symétrie de $R_{\alpha\beta\mu\nu}$ qui donneront par example

$$\bar{R}_{r0mn} = - \bar{R}_{0rmn} = \bar{R}_{mnr0}.$$

En conséquence tous les éléments du tenseur $\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ se trouvent ainsi regroupés en trois tenseurs 3-dimensionnels de l'espace $E(3)$. Le passage au composantes contravariantes sera illustré dans des calculs subséquents.

Nous emploierons la même technique pour séparer les dérivées $\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu,\sigma}$ en un certain nombre de tenseurs 3-dimensionnels comme, par exemple, $\bar{R}_{ursv,\bar{t}}$. Ici le dernier indice est surmonté d'une barre pour spécifier qu'il s'agit de la dérivation covariante par rapport à l'espace-temps. Le lecteur n'aura aucune peine à s'assurer que notre raisonnement sur les transformations de coordonnées dans $E(3)$ vaut encore pour établir le caractère tensoriel des cinq indices. Bien entendu ce nouveau tenseur est distinct de $\bar{R}_{ursv,t}$ obtenu par la dérivation dans $E(3)$ et nous verrons plus loin comment on peut développer le premier de façon à tout ramener à la dérivation dans ce dernier espace.

Occupons nous d'abord de la séparation des équations $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$ tel qu'annoncé. Une partie du système s'écrit

$$\bar{R}_{rs} = g^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha rs\beta} = 0$$

ou, avec l'aide de (2.1a),

$$-a^{uv}\bar{R}_{ursv} + c^{-2}\bar{R}_{0rs0} = 0. \tag{3.1}$$

Pour le reste on a les équations

$$\bar{R}_{0n} = g^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha 0n\beta} = 0,$$

$$\bar{R}_{00} = g^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha 00\beta} = 0,$$

qui donnent immédiatement

$$a^{uv}\bar{R}_{u0nv} = 0, \tag{3.2}$$

$$a^{rs}\bar{R}_{r00s} = 0. \tag{3.3}$$

Ces équations représentent une forme invariante dans $E(3)$ du système $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$. On pourrait les écrire en fonction des tenseurs a_{rs} et A_{rs} mais cela ne sera pas nécessaire pour atteindre le but que nous poursuivons.

4. Symétrie des nouveaux tenseurs. Nous utiliserons le tenseur

$$\epsilon^{rst} = a^{-\frac{1}{2}}e^{rst}, \qquad \epsilon_{rst} = a^{\frac{1}{2}}e_{rst},$$

où $e_{rst} = e^{rst}$ prennent les valeurs suivantes:

0 si deux quelconques des indices rst ont la même valeur.

1 si rst représente une permutation paire des nombres 1, 2, 3.

-1 si rst représente une permutation impaire des mêmes nombres.

Nous tenons à souligner que nous avons là les deux types de coordonnées d'un même tenseur puisque les deux systèmes coincident en coordonnées normales ($a = 1$). Il est donc entendu que l'on peut passer d'un à l'autre indifférement, lorsque dans nos équations tensorielles certains indices sont élevés ou abaissés.

Nous avons d'ailleurs:

$$\epsilon_{uvr}\epsilon^{uvs} = 2\delta_r^{\ s} \tag{4.1}$$

où $\delta_r^{\ s}$ rep ésente la matrice unitaire. La vérification est aisée et il en résulte que ce dernie système est un tenseur mixte.

Un autre tenseur mixte qui nous sera très utile s'introduit comme suit:

$$\delta_{uv}^{\ \ rs} = \epsilon_{uvn}\epsilon^{rsn}. \tag{4.2}$$

On trouve aisément pour la valeur des composantes:

$$\begin{array}{rl} 1 & \text{si } u \neq v, \quad r = u, \quad s = v, \\ -1 & \text{si } u \neq v, \quad r = v, \quad s = u, \\ 0 & \text{dans les autres cas.} \end{array}$$

Posons alors:

$$4E^{rs} = \bar{R}_{uvmn}\epsilon^{uvr}\epsilon^{mns}, \tag{4.3}$$

$$2cH_r^{\ s} = \bar{R}_{r0uv}\epsilon^{uvs}. \tag{4.4}$$

Puisque $\bar{R}_{wvmn} = \bar{R}_{mnwv}$ nous avons $E^{sr} = E^{rs}$ et, bien entendu, cela entraine la symétrie des composantes covariantes:

$$E_{sr} = E_{rs}. \tag{4.5}$$

Les équations (4.3) peuvent être résolues pour les composantes $\bar{R}_{wvmn}$: multipliant les deux membres par $\epsilon_{rab}\epsilon_{sxy}$ et faisant usage de (4.2) on a

$$4E^{rs}\epsilon_{abr}\epsilon_{xys} = \bar{R}_{uvmn}\delta_{ab}^{\ \ uv}\delta_{xy}^{\ \ mn},$$

et puisque les seules valeurs utiles pour les indices (uv) sont (ab) et (ba) avec les valeurs correspondantes $\delta_{ab}{}^{ab} = 1$ et $\delta_{ab}{}^{ba} = -1$ on obtient

$$4E^{rs}\epsilon_{abr}\epsilon_{xys} = (\bar{R}_{abmn} - \bar{R}_{bamn})\delta_{xy}{}^{mn}$$

$$= 2\bar{R}_{abmn}\delta_{xy}{}^{mn}.$$

Finalement on a

(4.6) $$\bar{R}_{abxy} = E^{rs}\epsilon_{abr}\epsilon_{xys}.$$

Par ailleurs (3.1) et (4.6) donnent successivement

$$c^{-2}\bar{R}_{0rs0} = a^{uv}\bar{R}_{ursv} = a^{uv}E^{mn}\epsilon_{urm}\epsilon_{svn}$$

$$= E_m{}^n\epsilon^{vim}a_{ir}\epsilon_{svn} = E_m{}^n\delta_{ns}{}^{im}a_{ir}$$

$$= E_s{}^n a_{nr} - E_n{}^n a_{sr}$$

$$= E_{rs} - a_{rs}E_n{}^n.$$

Alors par contraction de la dernière égalité et avec l'aide de (3.3) on a

$$c^{-2}a^{rs}\bar{R}_{0rs0} = E_r{}^r - 3E_n{}^n = -2E_n{}^n = 0,$$

d'où les résultats suivants:

(4.7) $$E_n{}^n = 0,$$

(4.8) $$E_{rs} = c^{-2}\bar{R}_{r00s} = a^{uv}\bar{R}_{ursv}.$$

On peut noter que l'invariant $E_n{}^n$ s'annule par suite des équations de la relativité alors que le tenseur E_{rs} est symétrique identiquement. Nous allons retrouver des résultats identiques dans le cas de H_{rs} sauf que l'ordre est renversé.

De la relation (4.4) on tire successivement

$$2cH^{rs} = a^{ri}\bar{R}_{i0uv}\epsilon^{uvs},$$

$$2cH^{rs}\epsilon_{rsn} = a^{ri}\bar{R}_{i0uv}\delta_{nr}{}^{uv} = 2a^{ri}\bar{R}_{i0nr},$$

qui s'annule à cause de (3.2). Mais $H^{rs}\epsilon_{rsn}$ peut s'annuler seulement si

(4.9) $$H^{sr} = H^{rs}.$$

D'un autre coté

$$2cH_r{}^r = \bar{R}_{r0uv}\epsilon^{uvr} = -\bar{R}_{0ruv}\epsilon^{uvr},$$

qui s'annule identiquement par suite de l'identité classique

$$\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} + \bar{R}_{\alpha\mu\nu\beta} + \bar{R}_{\alpha\nu\beta\mu} = 0.$$

On a donc

(4.10) $$H_r{}^r = 0.$$

Enfin une autre relation qui sera utile par la suite, se déduit de (4.4) en multipliant les deux membres par ϵ_{smn},

$$2cH_r{}^s\epsilon_{smn} = \bar{R}_{r0uv}\delta_{mn}{}^{uv} = 2\bar{R}_{r0mn},$$

d'où

(4.11) $$\bar{R}_{r0sv} = cH_r{}^n\epsilon_{nsv}.$$

Les deux tenseurs que nous venons d'introduire sont à la base d'un nouveau formalisme qui va nous permettre de mettre en lumière un aspect jusque là ignoré, de la structure des équations de la gravitation. A vrai dire nous nous intéresserons moins à ces équations qu'a certaines de leurs conséquences différentielles avec lesquelles nous allons tout de suite faire connaissance.

5. Un système d'équations fondamentales. Partons de l'identité de Bianchi,

$$\bar{R}_{\alpha\mu\nu\beta,\sigma} + \bar{R}_{\alpha\mu\beta\sigma,\nu} + \bar{R}_{\alpha\mu\sigma\nu,\beta} = 0.$$

Après contraction avec $g^{\alpha\beta}$ les deux premiers termes s'annulent à cause de $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$ et il reste

(5.1) $$g^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha\mu\sigma\nu,\beta} = 0.$$

Occupons nous maintenant de séparer ces équations suivant la technique déjà employée. Une partie du système peut s'écrire $g^{\alpha\beta}\bar{R}_{\alpha rsv,\beta} = 0$ ou

(5.2) $$-a^{un}\bar{R}_{ursv,\bar{n}} + c^{-2}\bar{R}_{0rsv,\bar{0}} = 0.$$

Et pour la série au complet nous obtenons encore:

(5.3) $$-a^{uv}\bar{R}_{uns0,\bar{v}} + c^{-2}\bar{R}_{0ns0,\bar{0}} = 0,$$

(5.4) $$a^{rs}\bar{R}_{r0uv,\bar{s}} = 0,$$

(5.5) $$a^{rs}\bar{R}_{r0n0,\bar{s}} = 0.$$

Disons maintenant que c'est après avoir transcrit le système (5.2) à (5.5) en fonction des tenseurs E_{rs} et H_{rs} qu'on y retrouvera la structure des équations de Maxwell. Bien entendu nous avons ici affaire aux dérivées dans l'espace-temps et il nous faut d'abord développer les termes de façon à tout ramener aux dérivées dans $E(3)$. Nous avons donc recours au développement classique de la dérivée covariante et nous avons par exemple

$$\bar{R}_{ursv,\bar{n}} = \frac{\partial\bar{R}_{ursv}}{\partial x^n} - \bar{\Gamma}_{nu}{}^a\bar{R}_{arsv} - \bar{\Gamma}_{nr}{}^a\bar{R}_{uasv} - \bar{\Gamma}_{ns}{}^a\bar{R}_{urav} - \bar{\Gamma}_{nv}{}^a\bar{R}_{ursa}.$$

Comparons cette égalité avec

$$\bar{R}_{ursv,n} = \frac{\partial\bar{R}_{ursv}}{\partial x^n} - \Gamma_{nu}{}^i\bar{R}_{irsv} - \Gamma_{nr}{}^i\bar{R}_{uisv} - \Gamma_{ns}{}^i\bar{R}_{uriv} - \Gamma_{nv}{}^i\bar{R}_{ursi}.$$

On en tire, avec l'aide de $\bar{\Gamma}_{rs}{}^t = \Gamma_{rs}{}^t$,

$$(5.6) \quad \bar{R}_{ursv,\bar{n}} = \bar{R}_{ursv,n} - \bar{\Gamma}_{nu}{}^0\bar{R}_{0rsv} - \bar{\Gamma}_{nr}{}^0\bar{R}_{u0sv} - \bar{\Gamma}_{ns}{}^0\bar{R}_{ur0v} - \bar{\Gamma}_{nv}{}^0\bar{R}_{urs0}.$$

Par ailleurs on a directement

$$(5.7) \quad \bar{R}_{0rsv,\bar{0}} = \frac{\partial \bar{R}_{0rsv}}{\partial t} - \bar{\Gamma}_{00}{}^a\bar{R}_{arsv} - \bar{\Gamma}_{0r}{}^a\bar{R}_{0asv} - \bar{\Gamma}_{0s}{}^a\bar{R}_{0rav} - \bar{\Gamma}_{0v}{}^a\bar{R}_{0rsa}.$$

Nous suspendons momentanément les calculs en vue d'introduire une méthode d'approximation qui va nous permettre de simplifier en négligeant un grand nombre de termes. Ces considérations feront l'objet de la section suivante.

6. Ondes à haute fréquence. Nous considérerons d'abord le cas d'un onde dont la fréquence prend une valeur n très élevée et c'est sur ce nombre n que notre méthode d'approximation sera basée. Comme la vitesse de propagation de nos ondes va se révéler égale à l'invariant c, nous pouvons d'avance profiter de ce fait et choisir l'unité de temps de telle sorte que les potentiels c^2 et a_{rs} soient tous du même ordre de grandeur. Nous adopterons donc le centimètre comme unité de longueur et nous choisirons comme unité de temps l'intervalle nécessaire à la lumière pour parcourir cette distance, ce qui entraine évidemment que la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide est égale à un. Par ailleurs une fréquence de 10^4 signifie: 10^4 ondes au centimètre aussi bien qu'un nombre égal de périodes par unité de temps. Alors, en vue des considérations qui vont suivre il est important de noter que notre choix d'unités entraine le résultat suivant: non seulement les potentiels c^2 et a_{rs} sont du même ordre de grandeur mais encore leur taux de variation par rapport au temps (par suite de l'oscillation) est du même ordre de grandeur que le taux de variation par rapport à la distance. En d'autres termes les dérivées du premier ordre par rapport au temps et celles par rapport aux variables d'espace prennent toutes des valeurs qui sont du même ordre de grandeur (sauf évidemment au voisinage des singularités; nous considérons le cas d'un domaine dans lequel la courbure reste finie). Pour fixer les idées remarquons qu'une fréquence $n = 10^4$ correspond à une onde dans l'infra-rouge, à peu près à la limite du spectre visible. D'un autre coté, et pour éviter toute confusion avec ces données expérimentales concernant la lumière, rappelons encore une fois que nous voulons simplement imposer aux potentiels $g_{\mu\nu}$ une oscillation de fréquence suffisament élevée et montrer qu'alors il en résulte une onde caractérisée en première approximation par des équations ayant même structure que celles du système de Maxwell.

Pour commencer, il sera commode de nous restreindre au cas où l'intensité d'oscillation des potentiels est de l'ordre de n^{-1} et nous prendrons $n \geqslant 10^4$. Alors dans un domaine de l'espace-temps s'étendant à un nombre raisonnable d'ondes et de périodes les oscillations de nos potentiels peuvent être représentées en première approximation par des fonctions sinusoïdales. C'est-à-dire qu'il suffit de s'en rapporter à la relation

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi n}\sin 2\pi nx\right) = \cos 2\pi nx$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-001-3 Published online by Cambridge University Press

pour s'assurer que, si l'intensité d'oscillation des potentiels est du même ordre de grandeur que n^{-1}, les dérivées du premier ordre de ces mêmes potentiels prennent des valeurs du même ordre que n^0, c'est-à-dire qu'elles sont des grandeurs "finies" du point de vue de notre échelle suivant les puissances de n. Par ailleurs les dérivées du second ordre sont des grandeurs du même ordre que n et comme les dites dérivées se présentent linéairement dans les équations $R_{\mu\nu} = 0$ nous aurons pour une premiére approximation des termes du même ordre que n.

Cependant nous sommes plutôt intéressés au système (5.2) à (5.5) dans lequel les potentiels apparaissent avec leurs dérivées jusqu'au troisième ordre, ces dernières linéairement; ce qui veut dire que nous aurons des termes du même ordre de grandeur que n^2. Nous allons tout de suite nous assurer que ces termes sont les plus grands et que nous les avons tous en ne conservant que les dérivées du troisième ordre. Tout d'abord les coefficients a_{rs} et c^{-2} dans (5.2) sont au plus du même ordre de grandeur que n^0 ou "finis." D'un autre coté un simple examen de (5.6), (5.7) et des calculs intermédiaires nous montre qu'il nous reste à décider au sujet de termes tels que

$$\bar{\Gamma}_{nu}{}^{a}\bar{R}_{arsv}, \qquad \bar{\Gamma}_{0r}{}^{a}\bar{R}_{0asv}.$$

Or ces termes résultent du produit d'un facteur de grandeur "finie" comme $\Gamma_{nu}{}^{a}$ avec un facteur d'ordre un comme

$$\bar{R}^{n}{}_{rsv} = \frac{\partial \bar{\Gamma}_{rv}{}^{n}}{\partial x^{s}} - \frac{\partial \bar{\Gamma}_{rs}{}^{n}}{\partial x^{v}} + \bar{\Gamma}_{rv}{}^{a}\bar{\Gamma}_{as}{}^{n} - \bar{\Gamma}_{rs}{}^{a}\bar{\Gamma}_{av}{}^{n}. \tag{6.1}$$

Nous en concluons que les dérivées covariantes par rapport aux deux métriques, celle de l'espace-temps d'une part et celle de $E(3)$ d'autre part ne diffèrent que par des termes négligeables en première approximation puis-qu'ils sont d'ordre un au plus. De même le second membre de (5.7) se réduit à son premier terme. Nous nous servirons de ces résultats pour transcrire le système (5.2) à (5.5) en fonction des tenseurs E_{rs} et H_{rs} et en cours de route, d'autres termes comme $c_0 R_{0rsv}$ et $c_v R_{0sun}$ seront négligés toujours par suite des considérations précédentes. Nous emploierons le symbole $\backsim$ pour indiquer une égalité qui n'est vraie qu'en première approximation.

Partant d'abord de l'équation (5.2) on passe aux dérivées dans $E(3)$ et on multiplie ensuite les deux membres par ϵ^{msv}; il en résulte (en tenant compte de $\bar{R}_{r0s\nu} = - \bar{R}_{0rsv}$,

$$a^{un}\bar{R}_{ursv,n}\,\epsilon^{msv} + c^{-2}\epsilon^{msv}\,\frac{\partial \bar{R}_{r0sv}}{\partial t} \sim 0.$$

Le premier terme peut être tranformé avec l'aide de (4.6); on obtient (puisque ϵ_{aur} joue le rôle d'une constante par rapport à la dérivation covariante)

$$\begin{aligned} a^{un}\bar{R}_{ursv,n}\,\epsilon^{msv} &= a^{un}E^{ab}{}_{,n}\,\epsilon_{aur}\epsilon_{bsv}\epsilon^{msv} \\ &= 2\delta_b{}^{m}a^{un}E^{ab}{}_{,n}\,\epsilon_{aur} \\ &= 2a^{un}E^{am}{}_{,n}\,\epsilon_{aur}. \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-001-3 Published online by Cambridge University Press

Par ailleurs, utilisant (4.11) et négligeant des termes tels que $c_0 H_r^{\,n}$ et

$$H_r^{\,n}\,\frac{\partial\epsilon_{nsv}}{\partial t}$$

on a

$$\epsilon^{msv}\,\frac{\partial\bar{R}_{r0sv}}{\partial t}\sim 2c\delta_n^{\,m}\,\frac{\partial H_r^{\,n}}{\partial t}\sim 2c\,\frac{\partial H_r^{\,m}}{\partial t}.$$

Alors notre équation peut s'écrire

$$a^{un}E^{am}{}_{,n}\,\epsilon_{aur}+c^{-1}\,\frac{\partial H_r^{\,m}}{\partial t}\sim 0,$$

ou encore

$$E^{m}{}_{s,n}\,\epsilon^{snr}+c^{-1}a^{tr}\,\frac{\partial H_t^{\,m}}{\partial t}\sim 0;$$

et finalement par suite de relations telles que

$$a^{tr}\,\frac{\partial H_t^{\,m}}{\partial t}\sim\frac{\partial H^{rm}}{\partial t},$$

on a

$$E_{ma,n}\,\epsilon^{anr}+c^{-1}\,\frac{\partial H_m^{\,r}}{\partial t}\sim 0.$$

Transcrivons encore une fois ce résultat en y ajoutant les équations (5.3) à (5.5) transformées de la même façon, quoique beaucoup plus aisément avec l'aide de (4.8) et (4.11). On obtient pour le système au complet

$$(6.2)\qquad\begin{cases} E_{ru,v}\,\epsilon^{uvs}+\dfrac{1}{c}\,\dfrac{\partial H_r^{\,s}}{\partial t}\sim 0,\\ H_{ru,v}\,\epsilon^{uvs}-\dfrac{1}{c}\,\dfrac{\partial E_r^{\,s}}{\partial t}\sim 0,\\ \qquad E^{rs}{}_{,s}\sim 0,\\ \qquad H^{rs}{}_{,s}\sim 0.\end{cases}$$

Il est pour ainsi dire superflu de souligner ici qu'on retrouve les opérateurs vectoriels de la divergence et du rotationnel, dans les termes $E^{rs}{}_{,s}$ et $E_{ru,v}\epsilon^{uvs}$ de nos équations (6.2). En conséquence on reconnait aisément la structure des équations de Maxwell étendue aux tenseurs E_{rs} et H_{rs}.

Il importe maintenant de noter que dans les dérivées de second ordre $E_{rs,uv}$ les indices (uv) sont permutables en première approximation puisque, ainsi que nous allons le montrer à l'instant, la différence entre dérivées covariantes et dérivées ordinaires provient de termes qui tombent dans la partie négligeable. Effectivement nous avons vu que les éléments $E_{rs,u}$ sont du même ordre de grandeur que n^2 alors que les $\Gamma_{nv}{}^r$ sont finis comme n^0 de sorte que dans

$$E^{r}{}_{s,uv}=\frac{\partial E^{r}{}_{s,u}}{\partial x^{v}}+\Gamma_{nv}{}^{r}E^{n}{}_{s,u}-\Gamma_{sv}{}^{n}E^{r}{}_{n,u}-\Gamma_{uv}{}^{n}E^{r}{}_{s,n}$$

le premier terme au second membre prédomine avec une valeur de l'ordre de n^3. On a donc

$$E^r{}_{s,uv} \sim \frac{\partial E^r{}_{s,u}}{\partial x^v} \sim \frac{\partial^2 E^r{}_s}{\partial x^v \partial x^u},$$

d'où

$$E^r{}_{s,vu} \sim E^r{}_{s,uv}.$$

En conséquence on peut s'en rapporter aux calculs classiques pour résoudre le système (6.2) et caractériser les ondes au moyen de l'équation

$$(6.3) \qquad \Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \sim 0.$$

Il est entendu ici que la fonction c intervenant dans les coefficients de nos équations (6.2) et (6.3) est considérée comme constante en première approximation et dans un voisinage qui peut contenir un certain nombre d'ondes (d'une part les potentiels oscillent avec des intensités qui sont de l'ordre de n^{-1} et d'autre part les variations de potentiel dues à la gravitation sont aussi très petites sauf au voisinage des singularités). Cette restriction a un voisinage est évidemment rendue nécessaire par la courbure du milieu de propagation mais elle n'en premet pas moins de reconnaître les caractéristiques essentielles des ondes électro-magnétiques dans ce nouvel aspect de la structure des équations de la gravitation.

7. Extension des résultats. Jusqu'à présent nos résultats sont limités au cas où les potentiels oscillent avec une amplitude de l'ordre de n^{-1}. Pour une amplitude plus grande, par exemple du même ordre que les $g_{\mu\nu}$, notre procédé d'approximation n'est plus valide car dans (6.1) les derniers termes sont du même ordre de grandeur que les dérivées secondes des premiers termes. En réalité, il n'y a pas lieu de considérer ce cas extrême pour lequel les potentiels changeraient périodiquement de signe.

Par contre nous allons montrer que l'onde reste maxwellienne pour des amplitudes aussi petites qu'on veut et indépendamment de la courbure du milieu de propagation. Considérons donc le cas où l'amplitude d'oscillation des potentiels est de l'ordre de n^{-r} avec $r > 1$ et posons $g_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ de telle façon que les $h_{\mu\nu}$ représentent en première approximation la partie oscillatoire de ces mêmes potentiels. Effectivement on peut toujours s'arranger pour que les $h_{\mu\nu}$ soient du même ordre de grandeur que l'amplitude d'oscillation, à savoir de l'ordre de n^{-r}, et que par ailleurs les $\gamma_{\mu\nu}$ oscillent avec des amplitudes $< n^{-r-1}$.

Notons alors les résultats suivants:

7.1. Les dérivées d'ordre k des $h_{\mu\nu}$ oscillent avec des amplitudes de l'ordre de n^{-r+k} et l'ordre de grandeur de ces quantités ne dépasse pas celui de leur amplitude d'oscillation.

7.2. Les $\gamma_{\mu\nu}$ et leurs dérivées jusqu'au deuxième ordre sont des grandeurs "finies" au plus.

Disons maintenant que sans nous inquiéter pour le moment de savoir à quoi cela conduit nous allons séparer les équations (5.1) de façon à ne garder que les termes oscillant avec la plus grande intensité. Nous allons voir tout de suite que nous avons tous ces termes en ne gardant que ceux qui contiennent les dérivées du troisième ordre des $h_{\mu\nu}$ et qu'ainsi l'intensité d'oscillation sera de l'ordre de n^{-r+3}. Effectivement un simple examen de (5.6), (5.7) et (6.1) nous montre que dans les termes ne contenant pas de dérivées du troisième ordre seulement *un* des facteurs peut être une dérivée seconde des $h_{\mu\nu}$ et que tous les autres facteurs sont des grandeurs *finies* au plus de sorte que les termes en question oscillent à l'ordre $-r+2$ au plus.

Par ailleurs on peut effectuer le développement de (5.1) en introduisant d'abord les $E_{ru,v}$ et $H_{ru,v}$ comme dans la section précédente et, puisque les dérivées du troisième ordre interviennent linéairement, on peut dédoubler ces tenseurs d'une façon qu'on peut représenter symboliquement par

$$E_{ru,v} = E_{ru,v}(\gamma) + E_{ru,v}(h)$$

pour ne garder que la partie oscillant avec la plus grande intensité, soit à l'ordre $-r+3$. Les $E_{ru,v}(h)$ et $H_{ru,v}(h)$ sont alors des tenseurs pour lesquels la métrique est déterminée en première approximation par les valeurs moyennes γ_{uv}.

Bien entendu les termes que nous voulons maintenant laisser de coté ne sont pas nécessairement plus petits que les autres (c'est plutôt le contraire pour $r > 2$), cependant si les équations (5.2) à (5.5) doivent être vérifiées il faut que les termes de la partie oscillatoire se compensent entre eux en première approximation et que leur somme (dans chaque équation) se réduise à une quantité n'oscillant plus qu'à l'ordre $-r+2$. Enfin l'ordre de grandeur de ces dernières quantités (ou sommes) ne dépassera pas $-r+2$ si les $h_{\mu\nu}$ sont convenablement choisis. En effet, il n'y a là qu'une question de partie constante en première approximation qui peut être renvoyée dans les $\gamma_{\mu\nu}$. Bref on est de nouveau conduit aux équations (6.2) pour la partie oscillatoire et les ondes de petite amplitude possèdent toujours les caractéristiques que comporte la structure maxwellienne.

Il est encore possible d'étendre nos résultats au cas où la fréquence n'est pas nécessairement très élevée mais cette fois nous serons limités à un milieu de propagation presqu'euclidien. Posons donc

$$c^2 = 1 + h_{00}, \qquad g_{rs} = -\delta_r^s - h_{rs},$$

où les h_{rs} et h_{00} sont des quantités élémentaires du premier ordre. Nous avons donc recours ici à un procédé classique d'approximation qui a permis, en particulier, de caractériser les ondes dites gravitationnelles au moyen de l'équation (6.3). Cependant l'introduction de nos tenseurs E_{rs} et H_{rs} va nous permettre d'apporter un élément nouveau à ce résultat.

Dans une première approximation suivant cette méthode on ne conserve que les termes linéaires. Alors le lecteur n'aura aucune peine à s'assurer que les équations (5.1) se réduisent aux dérivées de troisème ordre des $h_{\mu\nu}$ et qu'ainsi on retrouve encore le système (6.2) avec la différence que les dérivées covariantes sont remplacées par les dérivées ordinaires. Nous en déduisons que dans le domaine des fréquences de la radio nos ondes sont encore maxwelliennes pourvu que la courbure du milieu de propagation soit assez petite.

Ce n'est pas sans raison que nous faisons ici la distinction pour exclure de nos déductions les ondes gravitationnelles proprement dites. En effet dans ce cas la fréquence prend des valeurs extrêmement petites (de l'ordre de 10^{-18} dans le cas du mouvement de la terre autour du soleil et avec l'unité de temps comme plus haut) ce qui introduit dans le problème un aspect critique que nous ne voulons pas discuter ici.

8. Conclusion. Ainsi donc la structure des équations de Maxwell se retrouve en première approximation et comme conséquence directe des équations $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$ pour caractériser dans presque tous les cas les ondes qui pourraient exister dans le continuum espace-temps de la relativité. En résumé si la fréquence prend des valeurs correspondant à l'infra-rouge ou plus grandes nos ondes sont caractérisées par les équations (6.2) et (6.3) indépendamment de la courbure du milieu; par contre si la fréquence est moins élevée nos équations restent valides seulement si la courbure est petite. Notons encore une fois qu'en dernière analyse ce sont les éléments de courbure $\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}$ qui vérifient de telles équations et que cela est rendu possible simplement par la façon, à tout le moins remarquable, suivant laquelle les dits éléments se laissent regrouper en deux tenseurs E_{rs} at H_{rs} jouant le rôle des vecteurs **E** et **H** des équations de Maxwell.

En conséquence l'invariance du phénomène ne fait pas de doute car les oscillations qu'on imposerait arbitrairement au réseau de coordonneés ne pourraient être caractérisées par des équations invariantes. Nous avons donc bien une onde et nous faisons tout-de-suite le rapprochement avec les ondes électro-magnétiques. Or ces dernières se laissent représenter au moyen de vecteurs, du moins dans les aspects que nous leur connaissons, alors que pour les nouvelles ondes les tenseurs E_{rs} et H_{rs} présentent tout de même une structure plus complexe et laissent entrevoir de grandes possibilités.

Pouvons nous dire maintenant que, dans le continuum $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$, nous avons identifié les ondes électro-magnétiques sous une forme nouvelle dont nous ne connaissions que quelques aspects? Il faut avouer que pour le moment tout essai d'interprétation dans ce sens pose des problèmes dont la solution ne semble pas encore à notre portée. Tout d'abord les ondes que nous venons de caractériser existent-elles? Ou, plus précisément, existe-t-il des solutions de ce genre qui soient régulières à l'infini? Voilà une question qui nous laisse perplexes devant la complexité des équations $\bar{R}_{\mu\nu} = 0$. Et pourtant il serait du plus haut intérêt de savoir déterminer les possibilités de ces équations en ce qui concerne des singularités accompagnées d'un champ oscillatoire stationnaire ou irradiant de l'énergie, et qui entrainerait sans doute un phénomène de quantification. Quoiqu'il en soit nous terminons ce travail en exposant deux autres résultats qui prolongent encore l'analogie avec les équations de l'électro-magnétisme.

Note A. Dans cette section nous nous occuperons de deux invariants de l'espace-temps et, bien entendu toujours dans le cas de $g_{0r} = 0$, nous trouverons moyen de les exprimer en fonction des tenseurs E_{rs} et H_{rs}.

Tout d'abord on vérifie sans peine:

$$\begin{aligned}\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta\mu\nu} &= \bar{R}_{rs\mu\nu}\bar{R}^{rs\mu\nu} + 2\bar{R}_{r0\mu\nu}\bar{R}^{r0\mu\nu}\\ &= \bar{R}_{rsuv}\bar{R}^{rsuv} + 2\bar{R}_{rs0v}\bar{R}^{rs0v} + 2\bar{R}_{r0uv}\bar{R}^{r0uv} + 4\bar{R}_{r00v}\bar{R}^{r00v}\\ &= \bar{R}_{rsuv}\bar{R}^{rsuv} + 4\bar{R}_{rs0v}\bar{R}^{rs0v} + 4\bar{R}_{r00v}\bar{R}^{r00v}.\end{aligned} \tag{A.1}$$

D'un autre coté, avec l'aide de (2.1a) et (4.8) on a

$$\bar{R}^{r00v} = g^{r\alpha}g^{0\beta}g^{0\mu}g^{v\nu}\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu} = c^{-4}a^{rs}a^{uv}\bar{R}_{s00u} = c^{-2}E^{rv},$$

d'où

$$\bar{R}_{r00v}\bar{R}^{r00v} = E_{rs}E^{rs}. \tag{A.2}$$

Puis étant donné que $\bar{R}_{mnuv}$ est un tenseur dans $E(3)$ la relation (4.3):

$$4E^{rs} = \bar{R}_{mnuv}\epsilon^{mnr}\epsilon^{uvs}$$

entraine (compte tenu de (2.1a) comme précédemment

$$4E_{rs} = \bar{R}^{mnuv}\epsilon_{mnr}\epsilon_{uvs},$$

d'où

$$16E_{rs}E^{rs} = \bar{R}^{mnuv}\bar{R}_{abxy}\delta_{mn}{}^{ab}\delta_{uv}{}^{xy} = 4\bar{R}_{mnuv}\bar{R}^{mnuv}. \tag{A.3}$$

Rappelons maintenant (4.4):

$$2cH_r{}^s = \bar{R}_{r0uv}\epsilon^{uvs}.$$

Nous avons aussi comme pour les relations précédentes et tenant compte de (2.1a)

$$2cH^r{}_s = -c^2\bar{R}^{r0uv}\epsilon_{uvs}.$$

Enfin par contraction il vient

$$4c^2H_r{}^sH^r{}_s = -c^2\bar{R}_{r0uv}\bar{R}^{r0mn}\delta_{mn}{}^{uv}$$

ou

$$4H_{rs}H^{rs} = -2\bar{R}_{r0uv}\bar{R}^{r0uv}. \tag{A.4}$$

Alors les relations (A.2) à (A.4) permettent d'écrire (A.1) sous la forme

$$\bar{R}_{\alpha\beta\mu\nu}\bar{R}^{\alpha\beta\mu\nu} = 8(E_{rs}E^{rs} - H_{rs}H^{rs}). \tag{A.5}$$

Nous ferons de même avec un autre invariant dont l'expression fait intervenir le tenseur universel suivant

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = g^{\frac{1}{2}}e_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-001-3 Published online by Cambridge University Press

avec $e_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ou ± 1 d'après la règle:

0 si deux quelconques des indices $\alpha\beta\gamma\delta$ ont la même valeur

1 si $\alpha\beta\gamma\delta$ est une permutation paire nes nombres 0, 1, 2, 3.

-1 si $\alpha\beta\gamma\delta$ est une permutation impaire des mêmes nombres.

L'ensemble des composantes covariantes non nulles de ce tenseur peuvent aisément être représentées au moyen d'un tenseur de E(3) comme il a été expliqué dans §3. Le nouveau tenseur sera de troisième ordre puisqu'un des quatre indices $\alpha\beta\gamma\delta$ doit prendre la valeur zéro. On notera d'abord que les permutations $0rst$ et rst ont la même parité (c'est-à-dire le même signe) par rapport aux nombres 0, 1, 2, 3, et 1, 2, 3 respectivement. On a d'ailleurs $g^{\frac{1}{2}} = ica^{\frac{1}{2}}$ avec $i = (-1)^{\frac{1}{2}}$ de sorte que

$$\epsilon_{0rst} = ic\epsilon_{rst}.$$

Alors on a successivement

$$\begin{aligned}\bar{R}^{\alpha\beta\mu\nu}\bar{R}_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} &= \bar{R}^{mn\mu\nu}\bar{R}_{mn}{}^{.\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + 2\bar{R}^{n0\mu\nu}\bar{R}_{n0}{}^{\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \\ &= 2\bar{R}^{mnuv}\bar{R}_{mn}{}^{0s}\epsilon_{uv0s} + 2\bar{R}^{mn0v}\bar{R}_{mn}{}^{rs}\epsilon_{0vrs} \\ &\qquad + 4\bar{R}^{n0uv}\bar{R}_{n0}{}^{0s}\epsilon_{uv0s} + 4\bar{R}^{n00v}\bar{R}_{n0}{}^{rs}\epsilon_{0vrs} \\ &= 8\bar{R}^{n0uv}\bar{R}_{n0}{}^{0s}\epsilon_{0suv} + 4\bar{R}^{mnuv}\bar{R}_{mn}{}^{0s}\epsilon_{0suv} \\ &= 4ic(2\bar{R}^{n0uv}\bar{R}_{n0}{}^{0s}\epsilon_{suv} + \bar{R}^{mnuv}\bar{R}_{mn}{}^{0s}\epsilon_{suv}).\end{aligned}$$

Les deux termes de la parenthèse se retrouvent à un facteur près par la contraction de E_{rs} avec H^{rs} de deux façons différentes à partir de (4.3), (4.4) et (4.8). Les calculs sont analogues à ceux qui ont donné (A.2) à (A.4) et entrainent finalement

$$\bar{R}^{\alpha\beta\mu\nu}\bar{R}_{\alpha\beta}{}^{\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 32iE_{rs}H^{rs}. \tag{A.6}$$

Il faut remarquer que les relations (A.5) et (A.6) sont possibles en autant que la forme (1.1) de notre élément d'arc est conservée. Cependant les invariants au premier membre nous permettent de conclure que les fonctions

$$E_{rs}E^{rs} - H_{rs}H^{rs}, \quad E_{rs}H^{rs}$$

sont elles-mêmes invariantes par rapport à la transformation de Lorentz. On retrouve ainsi une propriété que la forme relativiste des équations électromagnétiques confère aux invariants

$$\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2, \quad \mathbf{E}\cdot\mathbf{H}.$$

Note B. Partant de (6.1) nous ferons $r = 0$ et nous séparerons les sommes relatives à l'indice α.

Alors

$$\bar{R}^{n}{}_{0sv} = \frac{\partial\bar{\Gamma}_{0v}{}^{n}}{\partial x^{s}} - \frac{\partial\bar{\Gamma}_{0s}{}^{n}}{\partial x^{v}} + \bar{\Gamma}_{0v}{}^{i}\bar{\Gamma}_{is}{}^{n} - \bar{\Gamma}_{0s}{}^{i}\bar{\Gamma}_{iv}{}^{n} + \bar{\Gamma}_{0v}{}^{0}\bar{\Gamma}_{0s}{}^{n} - \bar{\Gamma}_{0s}{}^{0}\bar{\Gamma}_{0v}{}^{n}.$$

Puis avec l'aide de (2.3),

$$\bar{R}^n{}_{0sv} = \frac{\partial(cA^n{}_v)}{\partial x^s} - \frac{\partial(cA^n{}_s)}{\partial x^v} + c(\Gamma_{is}{}^n A^i{}_v - \Gamma_{iv}{}^n A^i{}_s) + c_v A^n{}_s - c_s A^n{}_v$$

$$= c\left(\frac{\partial A^n{}_v}{\partial x^s} - \frac{\partial A^n{}_s}{\partial x^v}\right) + c(\Gamma_{is}{}^n A^i{}_v - \Gamma_{iv}{}^n A^i{}_s).$$

Ajoutons à ce dernier résultat le terme identiquement nul

$$c(-\Gamma_{sv}{}^i A^n{}_i + \Gamma_{vs}{}^i A^n{}_i),$$

et nous reconnaitrons immédiatement le développement de deux dérivées covariantes de sorte que

(B.1) $$\bar{R}^n{}_{0sv} = c(A^n{}_{v,s} - A^n{}_{s,v}).$$

Pour $v = n$ on retrouve les trois équations $\bar{R}_{0s} = 0$ sous la forme

(B.2) $$A^n{}_{n,s} - A^n{}_{s,n} = 0.$$

D'ailleurs en tenant compte de (2.1) l'équation (B.1) peut s'écrire

$$\bar{R}_{n0sv} = c(A_{ns,v} - A_{nv,s}),$$

d'où, après multiplication des deux membres par ϵ^{svr} et substitution au moyen de (4.4)

$$2cH_n{}^r = c(A_{ns,v} - A_{nv,s})\epsilon^{svr} = 2cA_{ns,v}\,\epsilon^{svr}.$$

On a donc finalement

(B.3) $$H_n{}^r = A_{ns,v}\,\epsilon^{svr}$$

et on retrouve la forme de la relation classique $\mathbf{H} = \mathbf{rot}\ \mathbf{A}$ étendue au tenseur A_{rs}.

Université Laval

https://doi.org/10.4153/CJM-1953-001-3 Published online by Cambridge University Press