Canad. Math. Bull. Vol. **57** (1), 2014 pp. 72–79
http://dx.doi.org/10.4153/CMB-2013-029-9

Un anneau commutatif associé à un design symétrique

A. Grari

Résumé. Dans plusieurs articles, A. R. Prince développe une représentation d'un plan projectif fini par un anneau commutatif unitaire dont les propriétés algébriques dépendent de la structure géométrique du plan. Dans un autre article, il étend cette représentation aux designs symétriques. Cependant D.-S. Yin fait remarquer que la multiplication définie dans ce cas ne peut être associative que si le design est un plan projectif. Dans cet article on mènera une étude de cette représentation dans le cas des designs symétriques. On y montrera comment on peut faire associer un anneau commutatif unitaire à tout design symétrique; on y précisera certaines de ses propriétés, en particulier, celles qui relèvent de son invariance. On caractérisera aussi les géométries projectives finies de dimension supérieure moyennant cette représentation.

Préliminaires

Soit v, k, λ trois entiers naturels non nuls. Un design symétrique de paramètres (v, k, λ) (voir [2]), est la donnée de deux ensembles non vides, dont l'un est dit formé de points et l'autre est dit formé de blocs, et d'une relation d'incidence vérifiant les axiomes suivants, énoncés ici en abusant du langage géométrique :

- L'ensemble des points (resp. blocs) contient exactement v points (resp. blocs).
- Chaque point (resp. bloc) appartient à(resp. contient) exactement k blocs (resp. points).
- Par deux points distincts (resp. deux blocs distincts) passent (resp. se coupent en) exactement λ blocs (points).

Dans cet article, D représente un design symétrique de paramètres (v, k, λ), $n = k-\lambda$ l'ordre de D, $X = \{a_1, a_2, \dots, a_v\}$ (resp. $Y = \{l_1, l_2, \dots, l_v\}$) l'ensemble des points (resp. des blocs) de D, A la matrice d'incidence de D tel que pour tout couple $(i, j) \in [1, v]^2$, $a_{i,j} = 1$ si $a_i \in l_j$ et $a_{i,j} = 0$ sinon, et ${}^tA$ représente la matrice transposée de A. On pose $\rho = (k-1)(k-\lambda)$, $B = \rho^tA$,

$$A_1 = \begin{bmatrix} & {}^tA & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B_1 = \begin{bmatrix} & \rho^tA & & \rho \\ & & & \rho \\ & & & \vdots \\ & & & \rho \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Enfin, S dénote le $\mathbb{Z}$-module libre sur $X \cup \{\omega\}$, où ω est un symbole n'appartenant pas à X, et pour toute partie P de X, on note $P = \sum_{x \in P} x$.

Reçu par la rédaction le 8 mai, 2012; revu le 1 août, 2013.
Publié electronique au 16 octobre, 2013.
Classification (AMS) par sujet: **05B05**, 16S99.
Mots clés: projective planes, symmetric designs, commutative rings.

1 Définition de la multiplication

On définit dans S une multiplication en posant : $\omega^2 = \omega$, et pour tout point a de X, $\omega a = a\omega = a$ et $a^2 = (k-1)(k-\lambda)a$, et en posant pour tout couple (a, b) de points distincts de X :

$$ab = \lambda(1-\lambda)X + (k-1)(l_{i_1} + l_{i_2} + \cdots + l_{i_\lambda}) - \lambda(k-1)(k-\lambda)^2\omega,$$

où $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_\lambda}$ sont les λ blocs passant par a et b, et en étendant ensuite par bilinéarité, ces produits aux éléments de S.

Lemme 1.1 *Pour tout point a de D et pour tout couple (l, m) de blocs distincts de D on a :*

$$\begin{aligned}
al &= (k-1)(k-\lambda)[\lambda a + l - \lambda(k-1)(k-\lambda)\omega] \quad \textit{si } a \in l,\\
al &= \lambda(k-\lambda)[X + (k-1)a - k(k-1)(k-\lambda)\omega] \quad \textit{si } a \notin l,\\
aX &= (k-1)(k-\lambda)[ka + X - k(k-1)(k-\lambda)\omega],\\
l^2 &= (k-1)(k-\lambda)[(k+\lambda)l - \lambda k(k-1)(k-\lambda)\omega],\\
lm &= \lambda(k-1)(k-\lambda)[m + l - (k+\lambda)(k^2-\lambda)\omega] + \lambda(k-\lambda)^2X,\\
lX &= k(k-1)(k-\lambda)[X + l - k(k-1)(k-\lambda)\omega],\\
X^2 &= (k-1)(k-\lambda)[(k+v)X - kv(k-1)(k-\lambda)\omega].
\end{aligned}$$

Preuve Soit a un point et l un bloc du design contenant a. On a :

$$al = a^2 + \sum_{x \in l - \{a\}} [\lambda(1-\lambda)X + (k-1)(l_{x_1} + l_{x_2} + \cdots + l_{x_\lambda}) - \lambda(k-1)(k-\lambda)^2\omega],$$

où $l_{x_1}, l_{x_2}, \ldots, l_{x_\lambda}$ dénotent les λ blocs passant par a et x.

Puisque chaque bloc contient k points et par deux points distincts passent exactement λ blocs alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{x \in l - \{a\}} l_{x_1} + l_{x_2} + \cdots + l_{x_\lambda} &= (k-1)l + (\lambda-1)\sum_{l_i \in Y_a - \{l\}} l_i\\
&= (k-\lambda)l + (\lambda-1)\sum_{l_i \in Y_a} l_i
\end{aligned}$$

où Y_a est l'ensemble des blocs passant par a.

De plus, $\sum_{l_i \in Y_a} = ka + \lambda(X-a) = (k-\lambda)a + \lambda X$, donc :

$$\sum_{x \in l - \{a\}} l_{x_1} + l_{x_2} + \cdots + l_{x_\lambda} = (k-\lambda)l + (\lambda-1)(k-\lambda)a + (\lambda-1)\lambda X,$$

d'où :

$$\begin{aligned} al &= (k-1)(k-\lambda)a + (k-1)\lambda(1-\lambda)X + (k-1)(k-\lambda)l \\ &\quad + (k-1)(\lambda-1)(k-\lambda)a + (k-1)(\lambda-1)\lambda X - \lambda(k-1)^2(k-\lambda)^2\omega, \end{aligned}$$

ou encore : $al = (k-1)(k-\lambda)[\lambda a + l - \lambda(k-1)(k-\lambda)\omega]$. Par des calculs analogues on vérifie les deuxième et troisième relations du lemme, et les autres s'en déduisent alors de celles-ci. ■

En utilisant le lemme précédant on montre par des calculs élémentaires le lemme suivant.

Lemme 1.2 *Pour tout triplet (a, b, c) de points distincts deux à deux de D on a :*

(i) $a(bc) = (ab)c = \lambda(k-1)(k-\lambda)[X - k(k-1)(k-\lambda)\omega]$ *s'il n'existe aucun bloc contenant à la fois a, b, et c.*

(ii)

$$a(bc) = (ab)c = (k-1)(k-\lambda)[\lambda(1-p)X - \lambda(k-1)(k-p)\omega + (k-1)(l_{i_1} + l_{i_2} + \cdots + l_{i_p})]$$

où $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_\lambda}$ sont les blocs, lorsqu'ils existent, contenant à la fois a, b et c.

(iii)

$$a(ab) = a^2b = (k-1)(k-\lambda)[\lambda(1-\lambda)X + (k-1)(l_{i_1} + l_{i_2} + \cdots + l_{i_\lambda}) - \lambda(k-1)(k-\lambda)^2\omega]$$

où $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_\lambda}$ sont les λ blocs passant par a et b.

Le lemme précédent montre que S muni de l'addition usuelle et de la multiplication définie ci-dessus est un anneau commutatif unitaire.

Dans la suite on posera :

$$e_X = \lambda[X - k(k-1)(k-\lambda)\omega] \quad \text{et} \quad e_l = -\lambda X + (k-1)l + \lambda(k-1)(k-\lambda)\omega$$

pour tout bloc l de D. On vérifie que cette famille possède les propriétés suivantes.

Lemme 1.3 *Pour tout point a de D et pour tout couple (l, m) de blocs distincts de D on a :*

$$e_l^2 = (k-1)^2(k-\lambda)^2 e_l, \quad e_X^2 = (k-1)^2(k-\lambda)^2 e_X,$$
$$e_l e_m = 0, \quad e_l e_X = 0, \quad a e_l = (k-1)(k-\lambda)e_l$$

si $a \in l$, $ae_l = 0$ si $a \notin l$, et $ae_X = (k-1)(k-\lambda)e_X$.

https://doi.org/10.4153/CMB-2013-029-9 Published online by Cambridge University Press

2 Représentation pleinement fidèle de l'anneau S

Considérons l'application $\mathbb{Z}$-linéaire $\gamma\colon S \to \mathbb{Z}^{v+1}$ tels que $\gamma(\omega) = (1, 1, \dots, 1)$, et pour tout point a_i de D :

$$\gamma(a_i) = (a^i_j)_{1\le j\le v+1)},$$

où $a^i_j = (k-1)(k-\lambda)$ si $j = v+1$ ou ($j \le v$ et $a_i \in l_j$) et $a^i_j = 0$ sinon. On a alors $\gamma(X) = (x_j)_{1\le j\le v+1}$ où $x_{v+1} = v(k-1)(k-\lambda)$; et $x_j = (k-1)(k-\lambda)k$ si $j \le v$, et pour tout bloc l_i de D :

$$\gamma(l_i) = (\beta^i_j)_{1\le j\le v+1} \quad \text{où } \beta^i_j = (k-1)(k-\lambda)k \text{ si } j = v+1 \text{ ou } j = i$$

et $\beta^i_j = (k-1)(k-\lambda)\lambda$ sinon.

Soit maintenant a et b deux points distincts de D et soit $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_\lambda}$ les λ blocs passant par a et b. Posons

$$\gamma(ab) = (c_j)_{1\le j\le v+1} \quad \text{et} \quad \gamma(l_{i_1}) + \gamma(l_{i_2}) + \cdots + \gamma(l_{i_\lambda}) = (d_j)_{1\le j\le v+1}.$$

On a $d_j = k$ si $j = v+1$ ou $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_\lambda\}$ et $d_j = \lambda$ sinon ; et puisque $\gamma(ab) = \lambda(1-\lambda)\gamma(X) + (k-1)\bigl(\gamma(l_{i_1}) + \gamma(l_{i_2}) + \cdots + \gamma(l_{i_\lambda})\bigr) - \lambda(k-1)(k-\lambda)^2\gamma(\omega)$, alors :

$$c_{v+1} = \lambda(1-\lambda)(k-1)(k-\lambda)v + (k-1)^2(k-\lambda)\lambda k - \lambda(k-1)(k-\lambda)^2 = \bigl((k-1)(k-\lambda)\bigr)^2$$

et pour tout $j \le v$,

$$\begin{aligned} c_j &= \lambda(1-\lambda)(k-1)(k-\lambda)k + (k-1)^2(k-\lambda)[\lambda(\lambda-1)+k] - \lambda(k-1)(k-\lambda)^2 \\ &= \bigl((k-1)(k-\lambda)\bigr)^2 \end{aligned}$$

si $j \in \{i_1, i_2, \dots, i_\lambda\}$, et

$$c_j = \lambda(1-\lambda)(k-1)(k-\lambda)k + (k-1)^2(k-\lambda)\lambda^2 - \lambda(k-1)(k-\lambda)^2 = 0$$

sinon. Cela montre que $\gamma(ab) = \gamma(a)\gamma(b)$, de plus, il est clair que $\gamma(a^2) = \gamma(a)^2$, donc γ est un homomorphisme d'anneaux. D'autre part B_1, qu'est la matrice de γ relativement à la base $X \cup \{\omega\}$ de S et à la base canonique de $\mathbb{Z}^{v+1}$ est régulière car $\det(B_1) = \rho^v \det(A_1) = \rho^v \det(C)$ où C est la matrice obtenue à l'aide de A_1 en retranchant de sa dernière ligne le quotient de la somme des autres lignes par k, et $\det(C) = (1 - \frac{v}{k})\det(A) \neq 0$ (voir [2]). Par conséquent, γ est une représentation pleinement fidèle de l'anneau S.

Dans la suite on posera $\Delta = \gamma(S)$.

Définition 2.1 Un sous-ensemble T de cardinal $v+1$ de S est dit distingué s'il vérifie les deux conditions suivantes:

(a) Pour tout $x \in T$, $x^2 = (k-1)^2(k-\lambda)^2 x$.
(b) Pour tout couple (x, y) d'éléments distincts de T, $xy = 0$.

Lemme 2.2 *Le sous-ensemble $E = \{e_X, e_{l_1}, e_{l_2}, \dots, e_{l_v}\}$ de S est l'unique sous-ensemble distingué de S.*

Preuve Le lemme 1.3 montre que E est un sous-ensemble distingué de S. D'autre part, si T est un sous-ensemble distingué de S, alors les conditions de la définition précédente montrent que toutes les composantes de chaque élément de $\gamma(T)$ sont nulles sauf une et une seule et celle-ci est égale à $(k-1)^2(k-\lambda)^2$, cela prouve l'unicité de E. ∎

Lemme 2.3 *Soit E l'unique sous-ensemble distingué de S. Si $v \neq 2k+1$ et $v \neq k+1$ alors il existe exactement v éléments r de S vérifiant chacun les conditions suivantes:*

(i) $\operatorname{card}\bigl(E \cap \operatorname{Ann}(r)\bigr) = v - k$.
(ii) *Pour tout $x \in E$, $x \notin \operatorname{Ann}(r) \Rightarrow rx = (k-1)(k-\lambda)x$.*
De plus l'ensemble de ces v éléments est exactement l'ensemble X des points de D.

Preuve Il suffit de faire la démonstration pour l'anneau Δ.

Les conditions (i) et (ii) du lemme montrent que chaque élément de E est de type $\rho^{k+1}0^{v-k}$ (c'est-à-dire que toutes ces composantes sont nulles sauf exactement $k+1$ d'entre elles, et celles-ci sont égale à ρ où $\rho = (k-1)(k-\lambda)$). Le reste de la preuve découle du lemme suivant. ∎

Lemme 2.4 *Si $v \neq 2k+1$ et $v \neq k+1$ alors les seuls vecteurs de Δ de type $\rho^{k+1}0^{v-k}$ (où $\rho = (k-1)(k-\lambda)$) sont les v premiers vecteurs lignes de la matrice B_1.*

Preuve Soit y un vecteur de type $\rho^{k+1}0^{v-k}$ de Δ il existe $x_1, x_2, \dots, x_{v+1} \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x_1U_1 + x_2U_2 + \cdots + x_{v+1}U_{v+1}$ où $U_1, U_2, \dots, U_{v+1}$ dénotent les vecteurs lignes de la matrice B_1. x_{v+1} est évidemment un multiple de ρ, donc si $y^* = \frac{1}{\rho}y$ alors y^* est un vecteur de type $1^{k+1}0^{v-k}$ du sous-module du $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}^{v+1}$ engendré par les vecteurs lignes de la matrice A_1. Notons z^* l'élément de $\mathbb{Z}^{v+1}$ tel que $y^* = z^*A_1$ et posons $y^* = (y_1, y_2, \dots, y_{v+1})$ et $z^* = (z_1, z_2, \dots, z_{v+1})$. On a alors $y_{v+1} = \sum_{i=1}^{i=v+1} z_i$ et $(y_1, y_2, \dots, y_v) = (z_1, z_2, \dots, z_v)^tA + (z_{v+1}, z_{v+1}, \dots, z_{v+1})$.

y_{v+1} est non nul. En effet, supposons le contraire et posons $c = \sum_{i=1}^{i=v} z_i$. On a alors $z_{v+1} = -c$ et

$$(y_1 + c, y_2 + c, \dots, y_v + c) = (z_1, z_2, \dots, z_v)^tA. \tag{2.1}$$

D'autre part, on vérifie que pour tout $(u_i)_{1\le i\le v}$, $(w_i)_{1\le i\le v}$ appartenant à $\mathbb{Z}^{v+1}$ tel que $(w_i) = (u_i)^tA$, on a :

$$\sum_{i=1}^{i=v} w_i = k\sum_{i=1}^{i=v} u_i \tag{2.2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=v} w_i^2 = (k-\lambda)\sum_{i=1}^{v} u_i^2 + \lambda\Bigl(\sum_{i=0}^{i=v} u_i\Bigr)^2. \tag{2.3}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2013-029-9 Published online by Cambridge University Press

En utilisant (2.1), (2.2), et (2.3), on obtient

$$k+1=(k-\nu)c, \tag{2.4}$$

$$(k-\lambda)\sum_{i=1}^{i=\nu} z_i^2=(\nu-\lambda)c^2+(k+1)(2c+1) \tag{2.5}$$

et en utilisant (2.4) et (2.5) et la relation $\nu = 1 + \frac{k(k-1)}{\lambda}$ (voir [2]) on obtient

$$(k-\lambda)\sum_{i=1}^{\nu} z_i(z_i+1)=(c+1)(k+1)\frac{k-\lambda-1}{k-1}.$$

Notez que $c \neq -1$; sinon $\nu = 2k+1$, ce qui est impossible, donc $c+1<0$. Or $(k-\lambda)\sum_{i=1}^{\nu} z_i(z_i+1) \geq 0$, donc on doit avoir $\lambda+1 \geq k$; donc $k=\lambda+1$ et par suite $\nu = k+1$; ce qui contredit les hypothèses.

Enfin, puisque $y_{\nu+1}=1$, alors $z_{\nu+1}=1-c$ d'où

$$(z_1,z_2,\dots,z_\nu)^t A=(y_1+c-1,y_2+c-1,\dots,y_\nu+c-1). \tag{2.6}$$

Les relations (2.2) et (2.6) entraînent $kc=k-\nu+\nu c$, donc $c=1$ d'où :

$$(z_1,z_2,\dots,z_\nu)^t A=(y_1,y_2,\dots,y_\nu). \tag{2.7}$$

Des relations (2.3) et (2.7) on obtient $(k-\lambda)\sum_{i=1}^{i=\nu} z_i^2 = k-\lambda$ donc $\sum_{i=1}^{i=\nu} z_i^2=1$. Par conséquent $\exists j \in [1,\nu]$ tel $z_j=1$ ou $z_j=-1$ et $\forall i \neq j$ $z_i=0$, or pour tout $i\in[1,\nu]; y_i \geq 0$ donc $z_j=1$. Cela montre alors que y^* (resp. y) est l'un des ν premiers vecteurs lignes de la matrice A_1 (resp. B_1). ■

Théorème 2.5 *Deux anneaux associés à deux designs symétriques dont les paramètres de chacun vérifient la condition $\nu \neq 2k+1$ sont isomorphes si et seulement si ces deux designs sont isomorphes.*

Preuve Deux designs symétriques n'ayant pas le même nombre de points sont associés à deux anneaux non isomorphes puisqu'ils sont de rang différent en tant que $\mathbb{Z}$-modules.

Soit maintenant S l'anneau associé à un design symétrique de paramètres (ν,k,λ) tel que $\nu \neq 2k+1$. On peut supposer que $\nu \neq k+1$ car il n'existe (à un isomorphisme prés) qu'un seul design symétrique de paramètres $(k+1,k,k-1)$. Le lemme 2.2 montre que la base $X \cup \{\omega\}$ du $\mathbb{Z}$-module S peut être identifiée parmi les bases de S, mais une fois cette base identifiée, les blocs du design peuvent être déterminés moyennant les formules $e_X=\lambda[X-k(k-1)(k-\lambda)\omega]$ et $e_l=-\lambda X+(k-1)l+\lambda(k-1)(k-\lambda)\omega$, où $\{e_X\}\cup\{e_l, l\in Y\}$ est l'unique sous-ensemble distingué de S. Par conséquent si deux designs symétriques de paramètres vérifiant $\nu\neq 2k+1$ sont associés à des anneaux isomorphes alors ces deux designs sont isomorphes. La réciproque est évidente. ■

Remarque 2.6 La preuve du théorème précédent ne s'applique pas aux designs symétriques de Hadamard, c'est-à-dire dont les paramètres vérifient $\nu=2k+1$. Des exemples de tels designs sont donnés dans l'article [2].

https://doi.org/10.4153/CMB-2013-029-9 Published online by Cambridge University Press

3 Algèbre commutative unitaire associée à un design symétrique

Soit K un corps commutatif de caractéristique p ; et S_K le K-espace vectoriel de base $X \cup \{\omega\}$. On définit dans S_K une multiplication de la manière suivante : Pour tout couple (a, b) de points distincts de S on pose : $\omega^2 = \omega$, $\omega a = a\omega = a$, $a^2 = (k-1)(k-\lambda)a$ et $ab = \lambda(1-\lambda)X + (k-1)(l_{i_1} + l_{i_2} + \cdots + l_{i_\lambda}) - \lambda(k-1)(k-\lambda)^2\omega$ où $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_\lambda}$ sont les λ blocs passant par a et b, et en étendant ensuite par bilinéarité ces produits aux éléments de S_K. S_K est évidement une algèbre commutative unitaire.

Théorème 3.1

(i) *Si p ne divise pas $(k-1)(k-\lambda)$ alors S_K est une K-algèbre semi-simple.*

(ii) *Si p divise $(k-\lambda)$ et p ne divise pas $(k-1)$ alors S_K est une K-algèbre locale dont l'idéal maximal est engendré en tant que sous-espace vectoriel de S_K par la famille formée des points de D.*

Preuve (i) Soit $E = \{e_X, e_{l1}, e_{l2}, \ldots, e_{lv}\}$ l'unique sous-ensemble distingué de S. Le lemme 1.3 montre que la famille formée de l'élément $\hat{e}_X = \frac{1}{\rho^2} e_X$ et des éléments $\hat{e}_{li} = \frac{1}{\rho^2} e_{li}$, $(i \in [1, v])$ est une famille d'idempotents orthogonaux deux à deux. De plus, $\hat{e}_X + \sum_{i=1}^{i=v} \hat{e}_{li} = \omega$, donc S_K est une algèbre semi-simple.

(ii) On remarque que pour tout élément x de l'idéal de S_K engendré par la famille des éléments de X on a $(\omega + x)^p = \omega$. ■

4 Une caractérisation des géométries projectives finies

Soit D un design symétrique de paramètres (v, k, λ). Supposons que D est une géométrie projective finie ; alors il existe un entier q qui soit une puissance d'un nombre premier et un entier $m \geq 2$ tels que $v = 1 + q + q^2 + \cdots + q^m$ et $k = v - q^m$ et $\lambda = k - q^{m-1}$. Soient alors a et b deux points distincts de D et soient $l_{i_1}, l_{i_2}, \ldots, l_{i_\lambda}$ les λ blocs passant par a et b. On a dans S : $a^2 = q^m\lambda a$ et $\sum_{j=1}^{j=\lambda} l_{i_j} = (\lambda - q^{m-2})X + q^{m-2}l$, où l est la droite de D joignant a à b ; donc $ab = \lambda q^{m-1}(l - \lambda q^m\omega)$. Cela montre que si D est une géométrie projective construite à partir du corps $GF(q)$ alors il est possible d'utiliser les relations $ab = l - q\omega$, $a^2 = qa$, $\omega^2 = \omega$, $\omega a = a\omega = a$ pour définir une multiplication dans le module $\mathbb{Z}^{X\cup\{\omega\}}$ et obtenir un anneau commutatif unitaire. S en est alors un sous-anneau.

Réciproquement, étant donné un design symétrique G de paramètres (v, k, λ) tel que λ divise $k-1$. Si dans le module libre $R = \mathbb{Z}^{X\cup\{\omega\}}$ on définit une multiplication en utilisant les formules $ab = l - q\omega$, $a^2 = qa$, $\omega^2 = \omega$, $\omega a = a\omega = a$ où $q = \frac{k-1}{\lambda}$; obtiendra-t-on un anneau?

Supposons que R est un anneau ; et considérons trois points a, b, et c de G qui soient distincts deux àdeux et non alignés.

Si $l_1, l_2, \ldots, l_s$ (resp. $(m_1, m_2, \ldots, m_t)$) représentent les droites de D passant par a (resp. par c) et rencontrant la droite (bc) (resp. (ab)) alors; de $(ab)c = a(bc)$; on déduit $\sum_{i=1}^{i=s} l_i - qa - sq\omega = \sum_{i=1}^{j=t} m_i - qc - qt\omega$; d'où $s = t = q + 1$. Par conséquent chaque droite de G contient exactement $\frac{v-\lambda}{k-\lambda}$ points; donc, d'après le théorème de Dembowski–Wagner [2, Théorème 1-7] on conclut que G est une géométrie projective. D'où le théorème.

https://doi.org/10.4153/CMB-2013-029-9 Published online by Cambridge University Press

Théorème 4.1 *Soient G un design symétrique de paramètres (v, k, λ) tel que λ divise $k-1$ et A une matrice d'incidence de G. Avec $q = \frac{k-1}{\lambda}$; les deux propositions suivantes sont équivalentes.*

(i) *G est une géométrie projective.*

(ii) *La multiplication définie dans $\mathbb{Z}^{X\cup\{\omega\}}$ à l'aide des formules $a^2 = qa$ et $ab = l - q\omega$, où l est la droite joignant a à b, est associative.*

Références

[1] P. Dembowski, *Finite geometries.* Ergeb. Math. Grenzgeb. **44**, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1968.

[2] E. S. Lander, *Symmetric designs: an algebraic approach.* London Math. Soc. Lecture Notes Ser. **74**, Cambridge University Press, Cambridge, 1983. http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511662164

[3] A. R. Prince, *A commutative ring associated with any finite projective plane.* J. Algebra **99**(1986), 295–303. http://dx.doi.org/10.1016/0021-8693(86)90027-X

[4] ———, *Local algebras and finite projective planes.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **96**(1984), 95–96. http://dx.doi.org/10.1017/S0308210500020497

[5] ———, *The commutative ring of a finite projective plane.* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **101**(1985), 57–59. http://dx.doi.org/10.1017/S0308210500026159

[6] ———, *The commutative ring of a symmetric design.* J. Discrete Math. **80**(1990), 101–103. http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(90)90300-7

[7] D.-S. Yin, *The commutative ring of a symmetric design is not associative when $\lambda \neq 1$. Erratum to: A. R. Prince "The commutative rings of a symmetric design [Discrete Math. **80**(1990), 101–103.* J. Math. Res. Exposition **19**(1999), 490. http://dx.doi.org/10.1016/0012-365X(90)90300-7

Université Mohamed V, Département de mathématique et informatique, Rabat, Maroc
courriel: x.grari@menara.ma