



COMPOSITIO MATHEMATICA

Équivalence motivique des groupes algébriques semisimples

Charles De Clercq

Compositio Math. **153** (2017), 2195–2213.

[doi:10.1112/S0010437X17007369](https://doi.org/10.1112/S0010437X17007369)



FOUNDATION
COMPOSITIO
MATHEMATICA



LONDON
MATHEMATICAL
SOCIETY
EST. 1865



Équivalence motivique des groupes algébriques semisimples

Charles De Clercq

ABSTRACT

We prove that the standard motives of a semisimple algebraic group G with coefficients in a field of order p are determined by the upper motives of the group G . As a consequence of this result, we obtain a partial version of the motivic rigidity conjecture of special linear groups. The result is then used to construct the higher indexes which characterize the motivic equivalence of semisimple algebraic groups. The criteria of motivic equivalence derived from the expressions of these indexes produce a dictionary between motives, algebraic structures and the birational geometry of twisted flag varieties. This correspondence is then described for special linear groups and orthogonal groups (the criteria associated with other groups being obtained in De Clercq and Garibaldi [*Tits p -indexes of semisimple algebraic groups*, J. Lond. Math. Soc. (2) **95** (2017) 567–585]). The proofs rely on the Levi-type motivic decompositions of isotropic twisted flag varieties due to Chernousov, Gille and Merkurjev, and on the notion of pondered field extensions.

RÉSUMÉ

On prouve dans cet article que l'ensemble des motifs standards d'un groupe semisimple G à coefficients dans un corps à p éléments est déterminé par l'ensemble des motifs supérieurs du groupe G . En conséquence de ce résultat, on obtient une version partielle de la conjecture de rigidité motivique des groupes spéciaux linéaires. Ce résultat est ensuite utilisé pour construire les indices supérieurs qui caractérisent l'équivalence motivique des groupes semisimples. Les critères d'équivalence motivique dérivés de l'expression de ces indices fournissent un dictionnaire mêlant motifs, structures algébriques et géométrie birationnelle des variétés de drapeaux généralisées. Cette correspondance est ensuite décrite pour les groupes spéciaux linéaires et les groupes orthogonaux (les critères afférents pour les autres groupes faisant l'objet de De Clercq and Garibaldi [*Tits p -indexes of semisimple algebraic groups*, J. Lond. Math. Soc. (2) **95** (2017) 567–585]). Les preuves de ces résultats reposent principalement sur les décompositions motiviques de type Levi de Chernousov, Gille et Merkurjev des variétés de drapeaux isotropes, ainsi que sur la notion d'extension pondérée.

1. Introduction

L'objet de cet article est de classifier les motifs de Grothendieck associées aux groupes algébriques semisimples. Rappelons qu'à tout tel groupe G défini sur un corps quelconque on peut associer

Received 27 June 2016, accepted in final form 14 February 2017, published online 27 July 2017.

2010 Mathematics Subject Classification 14C15, 14M15, 20G15 (primary).

Keywords: motives, semisimple groups, flag varieties.

This journal is © [Foundation Compositio Mathematica](#) 2017.

l'ensemble des G -variétés de drapeaux généralisées. Le premier exemple d'étude systématique des motifs des variétés de drapeaux généralisées est proposé dans [Köc91]. Köck y détermine ces motifs sur un corps de base séparablement clos et montre qu'ils admettent description complète en fonction du groupe de Weil du groupe semisimple associé. La situation bien plus délicate où le corps de base est quelconque, et où donc ces variétés ne sont plus cellulaires, fait l'objet d'une étude intensive depuis plus de quinze ans. Une première avancée fondamentale est proposée dans l'article [CGM05] (voir aussi [Bro05]) par Chernousov, Gille et Merkurjev. Les auteurs y montrent que le motif d'une G -variété de drapeaux généralisée X possédant un point rationnel admet une décomposition de la forme

$$M(X) = \bigoplus_{\delta \in \Delta} M(Z_\delta)[l(\delta)],$$

où Δ est un ensemble d'orbites du diagramme de G sous l'action du groupe de Galois absolu et les variétés Z_δ sont de drapeaux généralisées pour la partie semisimple d'une composante de Levi associée à X . Lorsque le groupe semisimple sous-jacent possède un tore maximal déployé, ces décompositions correspondent aux décompositions obtenues par Köck. Une conséquence essentielle de l'existence de ces décompositions, dites de type Levi, est le principe de nilpotence de Rost [CGM05, Theorem 8.2]. Plus récemment Petrov, Semenov et Zainoulline introduisent la notion de J -invariant des groupes semisimples [PSZ08] dont l'objectif est une étude fine des motifs associés aux variétés de Borel. Le J -invariant intervient dans la classification des variétés de drapeaux génériquement déployées [PS10a, PS10b], ainsi que pour relier les motifs des variétés de Borel et les algèbres de Tits des groupes semisimples [GPS16, QSZ12].

Les motifs et les décompositions motiviques encodent les propriétés arithmétiques des variétés algébriques. Les invariants subtils fournis par les motifs des quadriques de Pfister sont une part essentielle de la preuve de la conjecture de Milnor. Dans le cas plus général des variétés de drapeaux généralisées, l'interface entre l'arithmétique et les motifs s'exprime très souvent en fonction des invariants discrets associés aux structures algébriques qui vivent sur le corps de base. Une des incarnations les plus frappantes de ce phénomène est le critère de Vishik d'équivalence motivique des quadriques, qui stipule que le motif de deux quadriques sont isomorphes si et seulement si les formes quadratiques associées sont de même dimension et si leur indices de Witt coïncident sur toute extension de leur corps de définition (on renvoie à [Kah06, Kah08] pour un panorama de la théorie de Vishik). Les connexions profondes entre motifs et invariants discrets associés aux groupes semisimples ont permis la résolution de nombreux problèmes classiques, notamment les conjectures de Hoffmann [Kar03] et Kaplansky [Vis10] de la théorie algébrique des formes quadratiques. L'étude des décompositions motiviques est en outre l'unique invariant connu permettant de détecter la dimension p -canonique des variétés [Kar10a].

Le présent article propose deux contributions majeures. La première est de nature motivique : on y démontre une version partielle de la conjecture de rigidité motivique des groupes spéciaux linéaires. La seconde est de nature algébro-géométrique, il s'agit classifier les groupes semisimples à équivalence motivique près. Cette classification peut être vue comme un analogue motivique de la classification de Tits des groupes semisimples sur un corps quelconque. Les expressions des invariants combinatoires construits dans cet article pour caractériser l'équivalence motivique fournissent un dictionnaire mêlant motifs, structures algébriques et géométrie birationnelle des variétés de drapeaux généralisées. Le lien sous-jacent à ces différentes notions est décrit par le biais des motifs supérieurs, qui généralisent aux variétés de drapeaux généralisées les motifs de Voevodsky associés aux schémas simpliciaux de Cech considérés par Vishik [Vis04].

Dans toute la suite on travaille dans la catégorie des motifs de Grothendieck construits à partir des correspondances de Chow. Tous les résultats annoncés désormais sont donc valables quelle que soit la caractéristique du corps de base considéré.

Un groupe semisimple G étant fixé, on associe en § VI à tout sous-ensemble (des sommets) du diagramme de Dynkin de G un motif standard. Lorsque G est intérieur, ces motifs correspondent aux motifs des G -variétés de drapeaux généralisées de type fixé, au sens de Borel et Tits [BT65]. De la même manière on peut associer à tout sous-ensemble Θ du diagramme de Dynkin de G le motif *supérieur* du motif standard de G de type Θ , que l'on note $U_{\Theta,G}$.

Les motifs supérieurs d'un groupe semisimple G fournissent en général un invariant moins fin que l'ensemble de ses motifs standards. Néanmoins, le théorème de structure de Karpenko [Kar10b] stipule que lorsque G est p -intérieur (cf. § 5) les motifs standards de G appartiennent à la sous-catégorie épaisse de Tate engendrée par les motifs supérieurs G . La conjecture suivante de rigidité motivique des groupes spéciaux linéaires prévoit que la combinatoire des décompositions motiviques des variétés de drapeaux généralisées est de nature purement algébrique [DeC13, Zhy12].

CONJECTURE A. Soit G le groupe spécial linéaire d'une algèbre simple centrale A , p un nombre premier et X une G -variété de drapeaux généralisée. Le motif de X à coefficients dans un corps à p éléments admet une décomposition de la forme

$$M(X) = \bigoplus_{\Theta \in \Delta_X} U_{\Theta,G}[i_{\Theta}],$$

où l'ensemble Δ_X et les entiers i_{Θ} ne dépendent que de la dimension et de la valuation p -adique de l'indice de l'algèbre A .

Une démonstration de cette conjecture semble actuellement hors de portée. On sait néanmoins qu'elle est vérifiée en basse dimension [DeC13, Zhy12], ainsi que pour les variétés de Borel [CSPZ06].

Nous allons désormais exprimer une version faible de la Conjecture A, ainsi que le lien qu'elle entretient avec la notion d'équivalence motivique, dont l'objectif est de classer les groupes semisimples en fonction de leurs motifs standards.

DÉFINITION 1. Soit Λ un anneau commutatif et G, G' deux groupes semisimples, tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. On dit que G et G' sont motiviquement équivalents à coefficients dans Λ si pour tout ensemble Θ fixé de leur diagramme de Dynkin, les motifs standards de type Θ de G et G' sont isomorphes à coefficients dans Λ .

Lorsque Λ est un corps à p éléments, on dira que G et G' sont motiviquement équivalents modulo p . On dira enfin simplement que G et G' sont *motiviquement équivalents* s'ils sont motiviquement équivalents modulo tout nombre premier p .

Le choix de l'anneau des coefficients est primordial : comme nous le verrons lors de l'étude de l'équivalence motivique des groupes spéciaux linéaires (cf. § 10) l'équivalence motivique à coefficients entiers se révèle être un invariant trop rigide pour s'exprimer en fonction des invariants classiques des algèbres simples centrales. En somme, l'invariant motivique adapté à l'arithmétique et la géométrie birationnelle des variétés de drapeaux généralisées n'est pas le motif à coefficients entiers, mais plutôt la collection de tous les motifs à coefficients dans \mathbb{F}_p , pour tout nombre premier p .

Jusqu'à la fin de cette introduction, les groupes semisimples considérés seront tous supposés p -intérieurs. L'analogie de l'équivalence motivique modulo p dans le contexte des motifs supérieurs s'énonce comme suit.

DÉFINITION 2. Soient G et G' deux groupes semisimples, tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. On dit que G et G' sont équivalents modulo p si pour tout ensemble Θ de leur diagramme de Dynkin, les motifs supérieurs $U_{\Theta,G}$ et $U_{\Theta,G'}$ sont isomorphes.

Notons que la flexibilité des motifs supérieurs permet de définir l'équivalence modulo p des groupes de semisimples de manière purement géométrique (cf. Définition 6). On dit enfin que deux groupes semisimples sont *équivalents* s'ils sont équivalents modulo tout nombre premier p . La conjecture suivante stipule que l'ensemble des motifs supérieurs d'un groupe semisimple G détermine la totalité de ses motifs standards.

CONJECTURE B. Soient G et G' deux groupes semisimples, tous deux formes intérieures d'un même groupe déployé. Les groupes G et G' sont motiviquement équivalents si et seulement s'ils sont équivalent.

La Conjecture B pour les groupes de type A_n correspond à la Conjecture A de rigidité motivique des groupes spéciaux linéaires, lorsque les classes d'isomorphismes de motifs supérieurs sont fixées.

Nous prouvons dans cet article la Conjecture B (cf. Corollaire 14) et donc la Conjecture A dans de très nombreux cas. On examine ensuite plusieurs conséquences de la Conjecture B, notamment la détermination des invariants combinatoires qui permettent la classification des groupes semisimples à équivalence motivique près : les p -indices de Tits supérieurs. La notion de p -indice de Tits d'un groupe semisimple est introduite en § 9 et correspond à la donnée de diagramme de Dynkin du groupe considéré muni de l'action du groupe de Galois absolu, et dont un certain nombre d'orbites sont colorées. Ces indices sont les analogues motiviques des indices de Tits (aussi appelés diagrammes de Satake) qui apparaissent dans la classification de Tits des groupes semisimples. La preuve du critère suivant (Corollaire 17 de la § 9) est utilisée de manière essentielle la Conjecture B.

THÉORÈME 3. *Deux groupes semisimples intérieurs sont motiviquement équivalents si et seulement si pour tout nombre premier p leur p -indices de Tits supérieurs coïncident.*

Les p -indices de Tits supérieurs des groupes intérieurs caractérisent donc les classes d'équivalence motiviques. L'expression des p -indices de Tits en fonction des invariants algébriques classiques associés aux groupes semisimples permettent de généraliser le critère de Vishik à tous les groupes semisimples. Les valeurs des p -indices de Tits pour les groupes spéciaux linéaires et les groupes orthogonaux ainsi que les critères suivants d'équivalence motiviques sont démontrés en § 10.

CRITÈRE A. *Deux groupes spéciaux linéaires $SL(A)$ et $SL(B)$ sont motiviquement équivalents si et seulement si A et B sont de même dimension et leurs classes engendrent le même sous-groupe du groupe de Brauer du corps de base.*

Ces conditions sont équivalentes à l'équivalence birationnelle stable des variétés de Severi–Brauer $SB(A)$ et $SB(B)$.

CRITÈRE B. Deux groupes spéciaux orthogonaux $SO(q)$ et $SO(q')$ sont motiviquement équivalents si et seulement si q et q' sont de même dimension et pour toute extension E/F , les indices de Witt de q_E et q'_E coïncident.

Ces conditions sont équivalentes à l'isomorphisme entre les motifs des quadriques projectives associées à q et q' (à coefficients dans \mathbb{Z} ou \mathbb{F}_2).

La détermination de l'ensemble de toutes les valeurs possibles des p -indices de Tits des groupes semisimples, ainsi que des critères d'équivalence motivique en fonction notamment des invariants cohomologiques des groupes semisimples fait l'objet du travail [DG17] en commun avec Skip Garibaldi.

La preuve de la Conjecture B repose sur deux étapes principales. Elle tire parti dans un premier temps des décompositions de type Levi de Chernousov, Gille et Merkurjev pour traiter du cas des variétés de drapeaux généralisées dites isotropes, c'est à dire possédant un point rationnel. Pour obtenir une preuve de la conjecture dans le cas général à partir du cas isotrope, il est nécessaire de construire des extensions qui respectent les propriétés arithmétiques et tout en déployant légèrement les motifs des variétés de drapeaux généralisées. Ces extensions dites *pondérées* sont introduites en §5 et permettent la descente de la Conjecture B au corps de base.

2. Dominance, équivalence modulo p des variétés projectives

Dans toute la suite on fixe un corps de base F , et p désignera toujours un nombre premier. Pour tout nombre premier p on introduit une relation de préordre sur la classe des F -variétés propres et lisses : la relation de *dominance modulo p* . Suivant [EKM08, Ful98], on note par $\mathrm{CH}_k(X)$ le groupe de Chow des cycles algébriques de dimension k sur une F -variété X modulo équivalence rationnelle.

Soit $\alpha : X \rightsquigarrow Y$ une correspondance de Chow de degré 0 entre F -variétés, Y étant supposée propre – c'est à dire un élément du groupe de Chow $\mathrm{CH}_{\dim(X)}(X \times Y)$. Si π est la projection naturelle de $X \times Y$ sur le premier facteur, la *multiplicité* de α est l'unique entier $\mathrm{mult}(\alpha)$ satisfaisant la relation $\pi_*(\alpha) = \mathrm{mult}(\alpha) \cdot [X]$.

DÉFINITION 4. Soient X et Y deux F -variétés propres. On dit que X *domine* Y s'il existe une correspondance de Chow $X \rightsquigarrow Y$ de degré 0 et de multiplicité 1. S'il existe une correspondance $\alpha : X \rightsquigarrow Y$ de degré 0 et de multiplicité première à p , on dit que X *domine* Y *modulo p* .

Un calcul montre que la multiplicité de la composée $\alpha \circ \beta$ de deux correspondances (au sens de [Man68, §2]) est le produit des multiplicités respectives de α et β . La dominance définie précédemment est donc une relation de préordre sur la classe des F -variétés propres et lisses, la relation d'équivalence qui lui est associée sera simplement appelée relation d'*équivalence*. Ces considérations valent bien entendu aussi pour les relations de dominance modulo p , et on parle alors d'*équivalence modulo p* pour les relations d'équivalences associées.

Les relations d'équivalence et d'équivalence modulo p sont étroitement liées à la géométrie birationnelle des variétés. En effet la relation d'équivalence coïncide avec la relation d'équivalence birationnelle stable pour les variétés de Severi–Brauer, tout comme pour nombre d'autres variétés de drapeaux généralisées. Notons que la situation est encore plus ténue entre deux quadriques projectives, qui sont stablement birationnellement équivalentes si et seulement si elles sont équivalentes modulo 2, en vertu du théorème de Springer [Spr52].

3. Classifications de Tits et Borel–Tits

Le lecteur non familier avec la classification des groupes semisimples et la classification de Borel–Tits des variétés de drapeaux généralisées est fortement invité à consulter [Bor91, BT65, KMRT98, MPW96, MPW98, Tit66] pour plus de détails.

Comme d'accoutumée, on considère dans un premier temps un groupe algébrique semisimple G sur un corps F supposé séparablement clos. Un tore maximal $T \subset G$ fixé donne lieu à un système de racines $\Phi(G, T)$ au sens de [Bou81], et donc à un diagramme de Dynkin, une fois un système de racines simples choisi. Les sous-tores maximaux de G étant tous conjugués, ce diagramme de Dynkin ne dépend pas du choix de T , et il ne dépend pas non plus du choix du système de racines simples. Le diagramme de Dynkin d'un groupe semisimple G , que l'on note $\Delta(G)$, caractérise complètement sa classe d'isogénie stricte. Le nombre de sommets de $\Delta(G)$ est le *rang* du groupe G .

Considérons désormais le cas où F est quelconque, et notons en $F_{\text{sép}}$ une clôture séparable. En vertu de [SGA3, Exposé XIV, Théorème 1.1] un groupe semisimple G sur F possède toujours un tore maximal, qui n'est cependant cette fois pas nécessairement déployé. On associe à G le système de racine $\Phi(G_{F_{\text{sép}}}, T_{F_{\text{sép}}})$, ainsi que le diagramme de Dynkin $\Delta(G_{F_{\text{sép}}})$, que l'on note à nouveau $\Delta(G)$. Le groupe de Galois absolu $\text{Gal}(F_{\text{sép}}/F)$ agit naturellement sur le système de racines $\Phi(G_{F_{\text{sép}}}, T_{F_{\text{sép}}})$.

Borel et Tits [BT65] introduisent une seconde action du groupe de Galois absolu de F sur le diagramme de Dynkin de G . Le groupe de Weil agissant simplement transitivement sur les systèmes de racines simples de $\Phi(G_{F_{\text{sép}}}, T_{F_{\text{sép}}})$, il existe pour tout tel système Π un élément w_σ qui le stabilise. L'action associée sur le diagramme de Dynkin est appelée la $*$ -action.

Les classes d'isomorphisme des $G_{F_{\text{sép}}}$ -variétés de drapeaux sont en bijection avec les avec les sous-ensembles (des sommets) du diagramme de Dynkin de $G_{F_{\text{sép}}}$, par [BT65]. Si Θ est le sous-ensemble associé à une $G_{F_{\text{sép}}}$ -variétés de drapeaux X , on dit que X est de *type* Θ . Par descente [BS68], les classes d'isomorphismes de G -variétés de drapeaux généralisées sont alors en correspondance bijective avec les sous-ensembles de $\Delta(G)$ invariants pour la $*$ -action. Les constructions et définitions ultérieures étant toutes visiblement invariantes par isomorphisme, nous noterons dans la suite $X_{\Theta, G}$ toute G -variété de drapeaux généralisée de type Θ , identifiant ces variétés et leur classe d'isomorphisme.

CONVENTION 5. On fixe par la suite pour convention que la variété des sous-groupes de Borel de G est de type $\Delta(G)$. Une SL_n -variété (respectivement une SO_n -variété) de drapeau généralisée de type $\Theta = \{k\}$ correspond alors à une Grassmannienne de k -plans dans un espace de dimension n (respectivement une variété de k -plans isotropes). Dans ce contexte, la variété de Severi–Brauer d'une algèbre simple centrale A est alors de type $\{1\}$ pour le groupe spécial linéaire de A (on renvoie à la § 10 pour plus de détails).

Le *type* d'un groupe algébrique semisimple G est la donnée de son diagramme de Dynkin, muni de la $*$ -action du groupe de Galois absolu sur l'ensemble de ses sommets. Deux groupes semisimples sont de même type si et seulement s'ils sont tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi déployé.

DÉFINITION 6. Soient G et G' deux groupes semisimples sur F , tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. On dit que G et G' sont *équivalents modulo* p si pour tout sous-ensemble $*$ -invariant Θ de leur diagramme de Dynkin, leurs variétés de drapeaux généralisées respectives sont équivalentes modulo p .

Notons que les classes équivalence modulo p des groupes semisimples sont bien connues lorsque F est séparablement clos. En effet sous cette hypothèse un groupe semisimple sur F est *déployé* (c'est à dire qu'il possède un tore maximal déployé). Les variétés de drapeaux généralisées sont alors rationnelles, et deux groupes semisimples de même type sont équivalents modulo tout nombre premier p .

4. Indices de Tits, sous groupes de Levi

Les indices de Tits sont les données combinatoires qui déterminent l'isotropie des groupes semisimples. L'indice de Tits d'un groupe semisimple G est la donnée du diagramme de Dynkin de G muni de la $*$ -action, ainsi que d'un sous-ensemble $\Delta_0(G)$ des sommets de ce diagramme.

La coloration des sommets du diagramme de Dynkin de G est déterminée comme suit. On fixe un tore maximal T de G , ainsi qu'un tore *déployé* maximal S contenu dans T . L'ensemble des racines simples de $\Phi(G_{F_{\text{sép}}}, T_{F_{\text{sép}}})$ qui s'annulent sur S correspond à un sous-ensemble des sommets du diagramme de Dynkin de G que l'on note δ_0 . L'ensemble δ_0 est celui des *orbites distinguées* de $\Delta(G)$ et correspond au complémentaire de Δ_0 (voir [Tit66]). On dit que le groupe G est *quasi-déployé* lorsque $\delta_0(G) = \Delta(G)$, tandis dans le cas extrême inverse – c'est à dire lorsque $\delta_0(G)$ est vide – G est dit *anisotrope*. La détermination de l'ensemble des valeurs possibles des indices de Tits possibles est présentée dans [Tit66].

L'indice de Tits d'un groupe semisimple est d'autant plus important qu'il détermine l'isotropie (c'est à dire l'existence de points rationnels) des variétés de drapeaux généralisées. On a en effet le résultat [BS68] de type Witt suivant : une G -variété de drapeaux généralisée possède un point rationnel si et seulement si le sous-ensemble qui lui est associé est contenu dans $\delta_0(G)$.

Nous aurons enfin besoin de la construction suivante, qui généralise celle de *noyau anisotrope* de G , et que nous utiliserons pour ramener la preuve du théorème 13 au cas anisotrope. Soit G un groupe semisimple possédant un sous-groupe parabolique P de type Θ défini sur F . Suivant [Bor91] (voir aussi [BT65, KR94, Tit66]) on note G_Θ la partie semisimple d'un sous-groupe de Levi de P . Le type du groupe G_Θ est obtenu à partir du type de G en lui ôtant les sommets qui appartiennent à Θ , ainsi que toutes les arrêtes du diagramme de Dynkin de G qui atteignent ces sommets.

PROPOSITION 7. *Soient G et G' deux groupes semisimples sur F , tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé. Les groupes G et G' sont équivalents modulo p si et seulement si pour tout sous-ensemble $*$ -invariant Θ de leur diagramme de Dynkin contenu dans $\delta_0(G) \cap \delta_0(G')$, les groupes G_Θ et G'_Θ sont équivalents modulo p .*

Démonstration. On s'attarde sur la condition nécessaire, la condition suffisante étant claire. On fixe un sous-ensemble $*$ -invariant Θ contenu dans $\delta_0(G) \cap \delta_0(G')$ ainsi qu'un autre sous ensemble $*$ -invariant $\tilde{\Theta}$ de $\Delta \setminus \Theta$.

Par hypothèse, les variétés de drapeaux généralisées $X_{\tilde{\Theta}, G}$ et $X_{\tilde{\Theta}, G'}$ sont équivalentes modulo p . En outre par [KR94, Theorem 3.18], le corps des fonctions de la variété $X_{\tilde{\Theta}, G'}$ est une extension transcendante pure de celui de $X_{\tilde{\Theta}, G'_\Theta}$. L'invariance par homotopie des groupes de Chow [EKM08, Theorem 57.13] assure donc de l'existence d'un zéro cycle de degré premier à p sur la variété $X_{\tilde{\Theta}, G}$ après extension au corps des fonctions de $X_{\tilde{\Theta}, G'_\Theta}$. On voit donc que la variété $X_{\tilde{\Theta}, G'_\Theta}$ domine $X_{\tilde{\Theta}, G}$ modulo p , par [EKM08, Lemma 75.1].

Ainsi, $X_{\tilde{\Theta}, G}$ possède un point fermé sur le corps des fonctions de $X_{\tilde{\Theta}, G'_\Theta}$ dont le corps résiduel, qu'on note E , est une extension finie de degré premier à p . Le corps des fonctions de la G_E -variété

de drapeaux généralisée $X_{\tilde{\Theta}, G_E}$ est donc une extension transcendante pure de E . Invoquant à nouveau l'invariance par homotopie des groupes de Chow, $X_{\tilde{\Theta}, G_E}$ a un zéro-cycle de degré premier à p sur E , puisqu'elle en possède un sur le corps des fonctions de $X_{\tilde{\Theta}, G_E}$. On en déduit que $X_{\tilde{\Theta}, G'_E}$ domine $X_{\tilde{\Theta}, G_E}$ modulo p et le même raisonnement interchangeant leur rôles induit que ces variétés sont équivalentes modulo p . \square

5. Extensions pondérées

Deux variétés équivalentes modulo un nombre premier p le demeurent sur n'importe quelle extension du corps de base. On s'intéresse dans cette partie via la notion d'extension pondérée au problème inverse, c'est à dire aux extensions vérifiant des propriétés de descente pour l'équivalence modulo p .

Un groupe semisimple G est dit *de type intérieur* s'il est forme intérieure d'un groupe déployé. Il existe une extension finie, minimale et Galoisienne, définie de manière unique à isomorphisme près, sur laquelle G devient de type intérieur. Si le degré de cette extension est une puissance d'un nombre premier p , on dit alors que G est *p -intérieur* (notons par exemple qu'un groupe intérieur est alors p -intérieur pour tout nombre premier p).

Dans toute la suite de cette section, on fixe un groupe semisimple p -intérieur G et on note F_{int}/F une extension minimale sur laquelle G est de type intérieur. On dit qu'une F -variété X est une *quasi- G -variété de drapeaux généralisée* s'il existe une tour d'extensions $F_{\text{int}}/L/F$ et une G_L -variété de drapeaux généralisée Y dont X est la corestriction au corps de base.

DÉFINITION 8. Soit X une G -variété de drapeaux généralisée. Une extension E/F est *pondérée pour X modulo p* si pour toutes quasi- G -variétés de drapeaux Y et Y' dominant X modulo p , Y et Y' sont équivalentes modulo p si et seulement si Y_E et Y'_E le sont.

On dit simplement qu'une extension E/F est *pondérée* pour X si elle l'est modulo tout nombre premier. Bien que moins élémentaire, le contexte dans lequel la notion d'extension pondérée est la plus limpide est celui des *motifs supérieurs* : les extensions pondérées pour X sont les extensions qui respectent les motifs indécomposables apparaissant dans la décomposition du motif de X (on renvoie à la section suivante pour plus de détails). La classe des extensions pondérées pour une variété X modulo p est visiblement stable par sous-extension et par extensions successives. Une extension unirationnelle est pondérée pour toute variété X , en vertu de l'invariance par homotopie des groupes de Chow. Le résultat suivant est essentiellement contenu dans [Kar12].

PROPOSITION 9. *Le corps des fonctions d'une G -variété de drapeaux généralisée X est une extension pondérée pour X .*

Démonstration. Fixons un nombre premier l et considérons deux quasi- G -variétés de drapeaux généralisées Y et Y' qui dominent X modulo l . La variété X possède sur le corps des fonctions de Y un point fermé dont le corps résiduel E est une extension de degré premier à l . Le corps des fonctions de la G_E -variété de drapeaux généralisée X_E est donc une extension transcendante pure de E .

Supposons de plus que Y et Y' soient équivalentes modulo l sur le corps des fonctions de X . Par hypothèse, la variété Y' possède un zéro-cycle de degré premier à l sur l'extension composée des corps de fonctions de X et Y , donc a fortiori sur le corps des fonctions de X_E . L'invariance par homotopie des groupes de Chow implique donc que Y' possède un zéro-cycle de degré premier

à l sur E , c'est à dire que Y domine Y' modulo l . Le même raisonnement les rôles de Y et Y' étant intervertis permet de conclure. \square

6. Motifs, décompositions

On s'appuie principalement sur [EKM08, Man68] pour ces quelques rappels sur la catégorie $\text{Mot}(F, \Lambda)$ des motifs de Grothendieck construits à l'aide des groupes de Chow à coefficients dans un anneau commutatif Λ .

Dans un premier temps on considère la catégorie des correspondances, qui est obtenue à partir de celle des F -variétés projectives lisses en remplaçant les morphismes de variétés par les correspondances graduées à coefficients dans Λ , munies de leur composition habituelle. La catégorie ainsi obtenue est préadditive, et la catégorie des motifs $\text{Mot}(F, \Lambda)$ est obtenue à partir de celle-ci par complétion additive, puis Karoubienne.

La catégorie $\text{Mot}(F, \Lambda)$ est tensorielle, et ses objets sont donc des sommes directes finies de triplets $(X, \pi)[i]$, où X est une F -variété projective lisse irréductible, π est un projecteur des endomorphismes de X , c'est à dire une correspondance de degré 0 de X vers lui-même idempotente, et i est un entier. Le motif $M(X)$ d'une variété X est par définition le triplet $(X, \Gamma_{\text{id}_X})[0]$, où Γ_{id_X} est la classe du graphe de l'identité de X . Pour alléger les notations on omet très régulièrement le graphe de l'identité en mentionnant le motif de X par la suite.

Un exemple fondamental est celui des *motifs de Tate*, qui sont les motifs décalés du point. Comme d'usage, un entier i étant fixé, le motif de Tate $\text{Spec}(F)[i]$ sera noté $\Lambda[i]$.

DÉFINITION 10. Soit G un groupe algébrique semisimple, Θ un sous ensemble des sommets de son diagramme de Dynkin et F_Θ/F une extension minimale sur laquelle Θ est $*$ -invariant. Le *motif standard de G de type Θ à coefficients dans Λ* , noté $M_{\Theta, G}$, est le motif à coefficients dans Λ de la corestriction de la variété $X_{\Theta, G_{F_\Theta}}$ au corps de base.

Si Θ est invariant sous l'action du groupe de Galois, c'est le cas par exemple lorsque G est de type intérieur, le motif standard de type Θ de G n'est autre que le motif d'une G -variété de drapeaux généralisée de ce type. Dans la suite on omet fréquemment de préciser l'anneau des coefficients des motifs standard que l'on considère, dans un soucis de légèreté. Ce choix est primordial, ne serait-ce que pour utiliser la propriété de Krull–Schmidt, c'est à dire l'existence et l'unicité des décompositions motiviques. En effet d'après Chernousov et Merkurjev [CM06, Example 32] (voir aussi le [CSPZ06, Corollary 2.7]) cette propriété n'est par exemple pas vérifiée à coefficients entiers. Ces décompositions motiviques sont fondamentales pour l'étude de l'équivalence motivique et requièrent certaines hypothèses, notamment de finitude sur l'anneau des coefficients, comme le montrent [CM06, Kar13].

Notons que si l'on néglige la torsion des groupes de Chow, par exemple en considérant les motifs à coefficients rationnels, tous les motifs standards sont *déployés*, c'est à dire somme directe de motifs de Tate. Deux groupes semisimples de même type sont ainsi toujours motiviquement équivalents à coefficients rationnels, c'est une conséquence des décompositions motiviques obtenues par Köck [Köc91].

Fixons désormais un nombre premier p et notons $\text{Mot}_G(F, \mathbb{F}_p)$ la sous-catégorie épaisse de $\text{Mot}(F, \mathbb{F}_p)$ engendrée par les facteurs directs des motifs de quasi- G -variétés de drapeaux généralisées. En vertu de [CM06, Corollary 35], [Kar13, Corollary 2.6] la catégorie $\text{Mot}(F, \mathbb{F}_p)$ est de Krull–Schmidt.

Notons que par [DeC10, VY07], tous les résultats obtenus dans cet article à coefficients dans \mathbb{F}_p s'étendent à tout anneau fini, local et dont le corps résiduel est de caractéristique p . Il en va en fait de même pour tout corps de caractéristique p , sous réserve de Krull–Schmidt.

7. Chirurgie des motifs de variétés de drapeaux

On fixe désormais un nombre premier p , et tous les groupes semisimples considérés par la suite seront supposés p -intérieurs. Comme vu précédemment, le motif à coefficients dans un corps à p éléments d'une variété de drapeaux généralisée admet une décomposition essentiellement unique. La théorie des motifs supérieur a pour objectif de décrire et classifier les motifs indécomposables qui apparaissent dans ces décompositions.

Si X est une quasi- G -variété de drapeaux généralisée, il existe à isomorphisme près un unique facteur indécomposable du motif de X à coefficient dans \mathbb{F}_p qui contient le motif de Tate $\mathbb{F}_p[0]$ après extension des scalaires. Ce motif est noté U_X et appelé le *motif supérieur* de X .

Si Θ est un sous-ensemble des sommets du diagramme de Dynkin d'un groupe semisimple G , le *motif supérieur standard de G de type Θ* , noté $U_{\Theta,G}$, est le motif supérieur du motif standard $M_{\Theta,G}$. Le théorème de structure de Karpenko [Kar10b, Theorem 1.1] stipule que l'ensemble U_G^p des motifs supérieurs standards décalés de G à coefficients dans \mathbb{F}_p décrit tous les motifs indécomposables de $\text{Mot}_G(F; \mathbb{F}_p)$.

DÉFINITION 11. Soit p un nombre premier, G un groupe semisimple p -intérieur et M un objet de $\text{Mot}_G(F; \mathbb{F}_p)$. L'application caractéristique $\chi_M : U_G^p \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}$ de M est l'application qui associe à tout couple $(U_{\Theta,G}, i)$ le nombre de facteurs directs de M isomorphes à $U_{\Theta,G}[i]$.

Tout motif M de $\text{Mot}_G(F, \mathbb{F}_p)$ est visiblement déterminé de manière unique à isomorphisme près par son application caractéristique. Pour tout entier i , la *tranche supérieure à i* de M , notée $M^{\geq i}$, est le motif dont l'application caractéristique prend les mêmes valeurs que χ_M pour tout couple $(U_{\Theta,G}, j)$ lorsque i est inférieur ou égal à j , et nulle partout ailleurs. On définit de manière similaire la *tranche inférieure à i* de M , ainsi que les tranches supérieures et inférieures strictes à i de M en remplaçant l'inégalité $i \leq j$ par $j \leq i$, $i > j$ et $i < j$, respectivement. Ces motifs sont sans surprise notés respectivement $M^{\leq i}$, $M^{>i}$ et $M^{<i}$.

Nous l'avons vu précédemment, la notion d'extension pondérée fournit une classe d'extensions de corps qui respecte les classes d'équivalence des quasi- G -variétés de drapeaux. Ces classes d'équivalences sont en correspondance bijective avec les classes d'isomorphismes de motifs supérieurs standards de G , c'est l'objet de [Kar13, Corollary 2.15]. La proposition suivante permet de montrer comment partiellement reconstruire le motif d'une G -variété de drapeau généralisée à partir de son motif sur une extension pondérée.

PROPOSITION 12. Soit X une variété de drapeaux généralisée de type Θ d'un groupe p -intérieur et E/F une extension pondérée pour X modulo p . Pour toute quasi- G -variété de drapeaux Y dominant X modulo p et pour tout entier i , on a

$$\chi_{M(X)}(U_Y, i) = \chi_{M(X_E)}(U_{Y_E}, i) - \chi_{(M(X)^{<i})_E}(U_{Y_E}, i).$$

Démonstration. Observons tout d'abord que la décomposition motivique $M(X) = M(X)^{\geq i} \oplus M(X)^{<i}$ évidente donne lieu à l'égalité

$$\chi_{M(X_E)}(U_{Y_E}, i) = \chi_{(M(X)^{\geq i})_E}(U_{Y_E}, i) + \chi_{(M(X)^{<i})_E}(U_{Y_E}, i).$$

Il s'agit donc de montrer que $\chi_{M(X)}(U_Y, i) = \chi_{(M(X)^{\geq i})_E}(U_{Y_E}, i)$. Considérons un facteur direct M du motif $(M(X)^{\geq i})_E$ qui soit isomorphe à $U_{Y_E}[i]$. Le motif M provient d'un facteur direct motivique indécomposable sur F de $M(X)^{\geq i}$ que l'on note N , par Krull–Schmidt.

Le motif N est isomorphe au motif supérieur décalé $U_Z[j]$ d'une quasi- G -variété de drapeaux généralisée Z qui domine X modulo p , par le théorème de structure de Karpenko. Par définition de $M(X)^{\geq i}$ les entier i et j sont visiblement égaux, et quitte à les décaler convenablement, on peut les supposer nuls. Le motif N_E n'est autre que le motif supérieur de la E -variété Z_E . En particulier, la propriété de Krull–Schmidt sur l'extension E implique que les motifs supérieurs U_{Y_E} et U_{Z_E} sont isomorphes, autrement dit Y_E et Z_E sont équivalentes modulo p . L'extension E/F étant supposée pondérée pour X modulo p , les F -variétés Y et Z sont équivalentes modulo p , et leurs motifs supérieurs U_Y et U_Z sont de fait isomorphes, d'où l'égalité recherchée. \square

8. Équivalence motivique et motifs supérieurs

On dispose désormais de tous les outils nécessaires pour démontrer la Conjecture B. La démonstration du critère suivant, qui correspond à la version locale en p de la Conjecture B, requiert plusieurs étapes. On traite premièrement des variétés de drapeaux généralisées isotropes à l'aide des décompositions de type Levi de Chernousov, Gille et Merkurjev. Le cas général est ensuite déduit du cas isotrope par construction d'une bonne extension pondérée et descente au corps de base.

THÉORÈME 13. *Soient G et G' deux groupes semisimples sur F , tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi- p -déployé. Les groupes G et G' sont motiviquement équivalents modulo p si et seulement s'ils sont équivalents modulo p .*

Démonstration. Si G et G' sont motiviquement équivalents modulo p , les motifs supérieurs standards $U_{\Theta, G}$ et $U_{\Theta, G'}$ sont visiblement isomorphes, pour tout sous-ensemble $*$ -invariant de leur diagramme de Dynkin. Les variétés de drapeaux généralisées de type fixé sont donc équivalentes modulo p .

On démontre le sens réciproque pour l'ensemble des groupes semisimples sur F , par récurrence sur le rang commun de G et G' , le résultat étant trivial s'ils sont tous deux de rang nul. Supposons donc G et G' sont de rang strictement positif, et fixons un sous-ensemble Θ de Δ invariant sous l'action du groupe de Galois absolu, excluant le cas évident où Θ est vide.

Il s'agit donc de montrer que les motifs standards $M_{\Theta, G}$ et $M_{\Theta, G'}$ sont isomorphes dans $\text{Mot}(F; \mathbb{F}_p)$. On commence par traiter le cas où Θ est invariant pour l'action du groupe de Galois absolu, et les variétés de drapeaux généralisées de type Θ associées à G et G' ont un point rationnel. Dans ce cas d'après théorème de décomposition de type Levi des variétés de drapeaux généralisées [CGM05, Theorem 7.4], les motifs $M_{\Theta, G}$ et $M_{\Theta, G'}$ se décomposent en une somme directe de motifs standards de G_{Θ} et G'_{Θ} , respectivement. En outre, les types de ces motifs ainsi que les décalages qui apparaissent dans ces décompositions ne dépendent que du type de G et G' . Les groupes semisimples G_{Θ} et G'_{Θ} étant de même type et de rang strictement inférieur à G et G' , l'hypothèse de récurrence et la proposition 7 assurent qu'ils sont motiviquement équivalents modulo p . Les facteurs apparaissant dans les décompositions de type Levi de $M_{\Theta, G}$ et $M_{\Theta, G'}$ sont ainsi isomorphes deux à deux, et les motifs standards de type Θ de G et G' sont isomorphes.

On traite désormais le cas où la variété standard de type Θ n'a pas de point rationnel. Notons que l'extension composée E/F des corps des fonctions des variétés $X_{\Theta, G}$ et $X_{\Theta, G'}$ est pondérée pour $X_{\Theta, G}$ modulo p . En effet, si Y et Y' sont deux variétés quasi- G -homogènes équivalentes

modulo p sur E et qui dominent $X_{\Theta,G}$ modulo p , elles dominent aussi $X_{\Theta,G'}$, puisque G et G' sont équivalents modulo p . Elles dominent en particulier la $G \times G'$ -variété de drapeaux généralisée $X_{\Theta,G} \times X_{\Theta,G'}$, de par le produit externe des cycles. En vertu de la proposition 9 l'extension E/F est pondérée pour $X_{\Theta,G} \times X_{\Theta,G'}$, et les variétés Y_E et Y'_E étant équivalentes modulo p , il en va de même pour Y et Y' .

Puisque les groupes G_E et G'_E possèdent des sous-groupes paraboliques de type Θ , les motifs standards de type Θ de G_E et G'_E sont isomorphes d'après le cas isotrope. Supposons par l'absurde que les applications caractéristiques des motifs $M_{\Theta,G}$ et $M_{\Theta,G'}$ diffèrent, en considérant un hypothétique entier i_0 minimal tel qu'il existe une quasi- G -variété de drapeaux généralisée Y pour laquelle $\Phi_{M_{\Theta,G}}(U_Y, i_0) \neq \Phi_{M_{\Theta,G'}}(U_Y, i_0)$. Le calcul de la proposition 12 implique que

$$\begin{aligned} \Phi_{M_{\Theta,G}}(U_Y, i_0) &= \Phi_{(M_{\Theta,G})_E}(U_{Y_E}, i_0) - \Phi_{(M_{\Theta,G}^{<i_0})_E}(U_{Y_E}, i_0) \\ &= \Phi_{(M_{\Theta,G'})_E}(U_{Y_E}, i_0) - \Phi_{(M_{\Theta,G'}^{<i_0})_E}(U_{Y_E}, i_0) \\ &= \Phi_{M_{\Theta,G'}}(U_Y, i_0), \end{aligned}$$

ce qui contredit la définition de i_0 . Les applications caractéristiques des motifs $M_{\Theta,G}$ et $M_{\Theta,G'}$ coïncident donc, et ces motifs sont isomorphes. Le résultat lorsque Θ est quelconque se déduisant aisément du cas précédent en appliquant le foncteur de corestriction à une extension F_Θ/F minimale pour laquelle le sous-ensemble Θ est invariant pour l'action du groupe de Galois absolu sur le diagramme de Dynkin de G et G' , ces groupes semisimples sont motiviquement équivalents modulo p . □

La conjecture B suivante correspond au résultat précédent appliqué aux groupes semisimples intérieurs localement en tout nombre premier.

COROLLAIRE 14. *Deux groupes semisimples intérieurs et de même type sont motiviquement équivalents si et seulement si pour tout sous-ensemble de leur diagramme de Dynkin, les variétés standards respectives de type fixé sont équivalentes.*

9. Indices de Tits supérieurs

L'objectif de cette section est de construire les versions locales en p des indices de Tits, les *p-indices de Tits*, qui fournissent les données combinatoires que nous utilisons par la suite pour caractériser l'équivalence motivique des groupes semisimples.

DÉFINITION 15. Soit p un nombre premier et G un groupe semisimple sur un corps F . Le p -indice de Tits de G est la donnée du diagramme de Dynkin de G ainsi que d'un sous-ensemble $\delta_0^p(G)$ de ses sommets. Une orbite Θ de $\Delta(G)$ pour la $*$ -action est contenue dans $\delta_0^p(G)$ si et seulement si une G -variété de drapeaux généralisée de type Θ devient isotrope sur une extension de degré premier à p de F .

L'ensemble $\delta_0^p(G)$ des orbites *p-distinguées* peut être défini de manière équivalente comme l'union de orbites distinguées apparaissant dans les indices de Tits de G sur toutes les extensions de degré premier à p de son corps de définition. On dit que G est quasi- p -déployé lorsque $\Delta(G)$ est lui-même une orbite p -distinguée, et le *p-indice de Tits supérieur* de G est le foncteur qui associe à toute extension E/F du corps de base le p -indice de Tits du groupe semisimple G_E .

THÉOREME 16. *Soient G et G' deux groupes semisimples sur F , tous deux formes intérieures d'un même groupe quasi- p -déployé. Les groupes G et G' sont motiviquement équivalents modulo p si et seulement si leur p -indices de Tits supérieurs coïncident.*

Démonstration. Considérons deux groupes semisimples p -intérieurs G et G' dont les p -indices de Tits supérieurs coïncident, et fixons un sous-ensemble Θ de leur diagramme de Dynkin. Par corestriction d'une extension minimale sur laquelle Θ est $*$ -invariant au corps de base, on peut supposer que Θ est invariant sous l'action du groupe de Galois. Une G -variété de drapeaux généralisée de type Θ possède visiblement un zéro-cycle de degré premier à p sur le corps des fonctions de la variété $X_{\Theta, G'}$, puisque les p -indices de Tits de G et G' coïncident cette extension. Une G -variété de drapeaux généralisée de type Θ est donc dominée modulo p par une G' -variété de drapeaux même type, et ces variétés sont même équivalentes modulo p , par le même raisonnement en intervertissant leurs rôles. Les groupes G et G' sont donc équivalents modulo p , donc motiviquement équivalents modulo p en vertu du théorème 13.

Montrons désormais que les p -indices de Tits supérieurs de deux groupes semisimples G et G' motiviquement équivalents modulo p coïncident, c'est à dire que pour toute extension fixée E/F les sous-ensembles $\delta_0^p(G_E)$ et $\delta_0^p(G'_E)$ sont égaux. Par définition, il existe une extension L/E de degré premier à p sur laquelle la variété $X_{\delta_0^p(G_E), G}$ est isotrope. En outre, les groupes G et G' étant motiviquement équivalents modulo p , les variétés standards de type $\delta_0^p(G_E)$ associées à G et G' sont équivalentes modulo p , et la variété $X_{\delta_0^p(G_E), G'}$ a un zéro-cycle de degré premier à p sur l'extension composée de L et du corps de fonctions de $X_{\delta_0^p(G_E), G}$. Puisque $X_{\delta_0^p(G_E), G_L}$ est rationnelle, $X_{\delta_0^p(G_E), G'_E}$ a un zéro-cycle de degré premier à p . On a donc visiblement l'inclusion de $\delta_0^p(G_E)$ dans $\delta_0^p(G'_E)$, et le même raisonnement interchangeant les rôles de G et G' implique l'égalité de ces sous-ensembles. Les p -indices de Tits des groupes semisimples G_E et G'_E sont donc égaux. \square

COROLLAIRE 17. *La classe d'équivalence motivique modulo d'un groupe semisimple intérieur est uniquement déterminée par son type et par l'ensemble de ses p -indices de Tits supérieurs.*

La classification des groupes semisimples p -intérieurs à équivalence motivique modulo p près est ainsi réduite à la détermination des différents p -indices de Tits qui apparaissent sur les extensions sur corps de base. On s'attache désormais à décrire dans plusieurs cas classiques les valeurs prises par les p -indices de Tits. La détermination des valeurs possibles des p -indices de Tits pour tous les groupes semisimples fait l'objet du travail [DG17] en commun avec Skip Garibaldi.

10. Équivalence motivique, groupes classiques et structures algébriques associées

Suivant Weil [Wei61] et Tits [Tit66], les groupes semisimples de type classique s'écrivent comme groupes d'automorphismes d'algèbres centrales simples munies d'involutions. On s'attarde ici principalement sur les groupes orthogonaux ainsi que les groupes spéciaux linéaires, les tables complètes de tous les p -indices de Tits des groupes semisimples et les différents critères d'équivalence motivique faisant l'objet de [DG17].

Un groupe semisimple G est quasi- p -déployé si n'est pas p un nombre premier de torsion homologique de G , au sens de [Gro58, Tit92]. Les expressions des p -indices de Tits en fonction des invariants classiques associés aux structures algébriques sous-jacentes aux groupes semisimples nous permettent de produire des critères d'équivalence motivique purement algébriques.

Ils clarifient en outre le lien qu'entretiennent les motifs et la géométrie birationnelle des variétés de drapeaux généralisées.

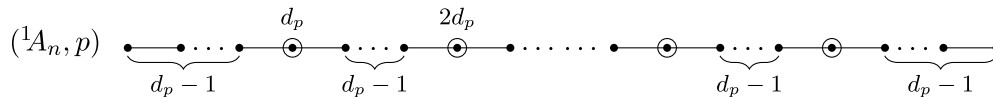
Par soucis de simplicité, on se concentre principalement dans cette partie sur les groupes de type intérieur. D'une part, deux groupes strictement isogènes étant motiviquement équivalents, il est loisible de limiter l'étude aux groupes simplement connexes (on pourrait faire de même en remplaçant *simplement connexe* par *adjoint*). Un tel groupe est alors isomorphe à un produit fini de groupes absolument simples, eux mêmes simplement connexes. En outre, par définition de l'équivalence motivique (ou par le théorème 16, au choix) deux produits $G_1 \times \dots \times G_n$ et $G'_1 \times \dots \times G'_n$ de groupes absolument simples sont motiviquement équivalents modulo p si et seulement si les facteurs le sont deux à deux, à permutation près.

10.1 Groupes intérieurs de type A_n

Rappelons qu'une F -algèbre simple est dite *centrale* si elle est de dimension finie et de centre F . Les groupes absolument simples simplement connexes intérieurs de type A_n sont les groupes spéciaux linéaires associés aux algèbres simples centrales (les groupes projectifs linéaires étant leurs analogues adjoints).

Le *groupe de Brauer de F* est le groupe obtenu à partir de l'ensemble des classes de similitudes de F -algèbres simples centrales, muni de la structure induite par le produit tensoriel. On notera dans la suite $[A]$ la classe de similitude d'une F -algèbre simple centrale A . À isomorphisme près, toute algèbre simple centrale A est semblable à une unique algèbre à division, dont le degré (c'est à dire la racine carrée de la dimension) est l'*indice* de A .

Soit donc A une F -algèbre simple centrale et p un nombre premier. On note d_p la plus grande puissance de p divisant l'indice de A . Le p -indice de Tits du groupe spécial linéaire $SL_1(A)$ est de la forme suivante, suivant les tables de [DG17].



Le théorème 16 assorti à cette description permet donc de caractériser l'équivalence motivique des groupes spéciaux linéaire comme suit.

CRITÈRE 18. *Deux groupes spéciaux linéaires $SL(A)$ et $SL(B)$ sont motiviquement équivalents modulo p si et seulement si pour toute extension E/F , les valuations p -adiques des indices de A_E et B_E coïncident.*

Les $SL(A)$ -variétés de drapeaux généralisées sont les variétés de drapeaux d'idéaux de A de dimension fixée. Suivant nos conventions, une $SL(A)$ -variété de drapeaux généralisée de type $\{i_1, \dots, i_k\}$ associée à une suite strictement croissante d'entiers est isomorphe à la variété des drapeaux d'idéaux à droite de A de dimension réduite i_1, \dots, i_k .

Démonstration du Critère A. Les groupes $SL(A)$ et $SL(B)$ sont motiviquement équivalents si et seulement si leurs indices de Tits coïncident sur toutes extension de corps, c'est le corollaire 17. Cette condition est équivalente, c'est bien connu, à l'équivalence birationnelle stable des variétés de Severi Brauer associées. □

Les classes d'équivalences motiviques des groupes intérieurs de type A_n sont donc déterminées par les indices de Tits classiques. Comme observé précédemment, le lien posé entre l'équivalence

motivique de ces groupes et les classes d'équivalence birationnelle stables de variétés de Severi–Brauer ne vaut absolument pas si l'on considère l'équivalence motivique à coefficients entiers. On peut en effet montrer que deux tels groupes sont motiviquement équivalents à coefficients entiers si et seulement s'ils sont isomorphes. En particulier on peut construire des groupes semisimples intérieurs de type A_n qui ne sont *pas* motiviquement équivalents à coefficients entiers, alors même que les variétés de Severi–Brauer associées sont *birationnellement équivalentes*.

Avant de nous attarder sur les groupes orthogonaux, observons deux conséquences frappantes des critères d'équivalence motivique des groupes spéciaux linéaires.

THÉORÈME 19. *Soient A et B deux algèbres simples centrales de même degré, et deux variétés de drapeaux généralisées $X_{\Theta, \mathrm{SL}_1(A)}$ et $X_{\Theta, \mathrm{SL}_1(B)}$ anisotropes et de même type. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *les motifs supérieurs $U_{\Theta, \mathrm{SL}_1(A)}$ et $U_{\Theta, \mathrm{SL}_1(B)}$ à coefficients dans un corps fini à p éléments sont isomorphes ;*
- (ii) *les variétés $X_{\Theta, \mathrm{SL}_1(A)}$ et $X_{\Theta, \mathrm{SL}_1(B)}$ sont équivalentes modulo p ;*
- (iii) *les motifs $M_{\Theta, \mathrm{SL}_1(A)}$ et $M_{\Theta, \mathrm{SL}_1(B)}$ à coefficients dans un corps à p éléments sont isomorphes ;*
- (iv) *les groupes $\mathrm{SL}_1(A)$ et $\mathrm{SL}_1(B)$ sont motiviquement équivalents modulo p .*

Démonstration. Il suffit en vertu des discussions précédentes de montrer que la condition (i) implique la condition (iv). Supposons donc que les motifs supérieurs $U_{\Theta, \mathrm{SL}_1(A)}$ et $U_{\Theta, \mathrm{SL}_1(B)}$ à coefficients dans un corps à p éléments soient isomorphes. Le théorème de structure de Karpenko implique que ces motifs sont isomorphes respectivement à deux motifs supérieurs $U_{\{p^k\}, \mathrm{SL}_1(D)}$ et $U_{\{p^l\}, \mathrm{SL}_1(D')}$, où D et D' sont deux algèbres à division semblables aux parties p -primaires de A et B . La dichotomie motivique des groupes projectifs linéaires [DeC11, Theorem 4.2, Corollary 4.3] induit donc d'une part que k et l sont égaux, et d'autre part que les motifs supérieurs de type fixé de $\mathrm{SL}_1(D)$ et $\mathrm{SL}_1(D')$ sont isomorphes deux à deux. Il en va donc de même pour $\mathrm{SL}_1(A)$ et $\mathrm{SL}_1(B)$ et le théorème 13 permet d'affirmer que ces groupes sont donc motiviquement équivalents modulo p . \square

COROLLAIRE 20. *Soient A et B deux algèbres simples centrales non-déployées et de même degré. Les groupes $\mathrm{SL}_1(A)$ et $\mathrm{SL}_1(B)$ sont motiviquement équivalents si et seulement si deux variétés de drapeaux anisotropes $X_{\Theta, \mathrm{SL}_1(A)}$ et $X_{\Theta, \mathrm{SL}_1(B)}$ sont stablement birationnellement équivalentes.*

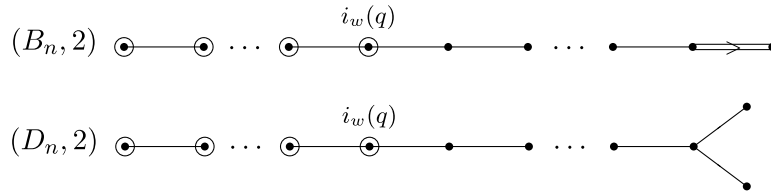
Démonstration. La condition nécessaire est contenue dans le corollaire 14. En outre, si deux variétés $X_{\Theta, \mathrm{SL}_1(A)}$ et $X_{\Theta, \mathrm{SL}_1(B)}$ sont stablement birationnellement équivalentes, elle sont à fortiori équivalentes modulo tout nombre premier p . La condition suffisante découle donc du théorème 19. \square

10.2 Groupes orthogonaux

Le groupe spécial orthogonal $\mathrm{SO}(q)$ d'une forme quadratique non-dégénérée sur un corps quelconque est, suivant la parité de la dimension de q , de type B_n ou D_n , éventuellement extérieur. Comme expliqué précédemment, les groupes orthogonaux peuvent être remplacés par leurs revêtements simplement connexes (c'est à dire les groupes spinoriels) dans l'ensemble des énoncés suivants.

Si deux formes quadratiques sont de même dimension impaire, ou si leur dimension est paire et leur discriminant est de même nature, l'équivalence motivique des groupes orthogonaux

associés peut se déduire directement du théorème 16 et des indices suivants, extraits de [DG17].



Un petit travail supplémentaire est cependant nécessaire si l'on veut éviter les circonvolutions concernant le type des groupes considérés dans le cas D_n .

Suivant [DG17], on se concentre ici sur 2-indices de Tits (2 étant l'unique nombre premier de torsion homologique des groupes orthogonaux). Observons 2-indice de Tits d'un groupe spécial orthogonal correspond à l'indice de Tits classique et est déterminé par l'indice de Witt de la forme quadratique sous-jacente, c'est le théorème de Springer.

Démonstration du Critère B. La première équivalence est claire pour deux groupes orthogonaux de même type, d'après la discussion précédente. Pour démontrer le cas général, on observe que si les indices de Witt de q et q' coïncident sur toute extension du corps de base, les groupes $SO(q)$ et $SO(q')$ sont nécessairement formes intérieures d'un même groupe quasi-déployé, c'est l'objet de [Kar00, Lemma 2.6].

Sous ces conditions les motifs des quadriques projectives de q et q' sont isomorphes à coefficients dans \mathbb{F}_2 . Cet isomorphisme se relève en un isomorphisme des motifs de ces quadriques à coefficients entiers par [Hau10]. Le critère de Vishik [Kar00, Criterion 0.1] assure donc que les indices de Witt de q et q' coïncident sur toutes les extensions de leur corps de définition. \square

Notons que sous certaines hypothèses supplémentaires les conditions du Critère B sont équivalentes au fait que les groupes $SO(q)$ et $SO(q')$ (ou les quadriques projectives de q et q' , c'est équivalent) soient isomorphes. C'est par exemple en dimension impaire et en basse dimension [Izh98], ou sur les corps globaux [Hof15].

Comme signalé par Vishik, le critère précédent peut être partiellement retrouvé à partir des résultats de [Vis04] sous l'hypothèse que le corps de base soit de caractéristique 0 et en se restreignant aux variétés de drapeaux de sous-espaces isotropes de dimensions consécutives $0, \dots, k$. En effet les décompositions de [Vis04, Claim 3.2] obtenues dans la catégorie des motifs de Voevodsky permettent de montrer que si les motifs de deux quadriques à coefficients entiers sont isomorphes, il en va de même pour les motifs de drapeaux consécutifs de sous-espaces isotropes. Les motifs supérieurs considérés dans cet article généralisent les schémas simpliciaux \mathcal{X}_{Q^i} de Vishik aux variétés de drapeaux généralisées.

Notons enfin que le lien entre la géométrie birationnelle des quadriques et l'équivalence motivique des groupes orthogonaux est moins riche que celui observé pour les variétés de Severi–Brauer. On peut construire des formes quadratiques dont les quadriques respectives sont *birationnellement équivalentes*, sans pour autant que les groupes orthogonaux associés soient motiviquement équivalents [AO95, Rou05]. L'équivalence motivique est donc un invariant trop fin pour être utilisé autour du problème de Zariski sur les quadriques [Hof98, Lam05, ch. XIII, Question 6.10], contrairement au problème d'Amitsur des variétés de Severi–Brauer [Ami55].

REMERCIEMENTS

Je remercie Skip Garibaldi, Bruno Kahn, Nikita Karpenko, Vincent Maillot et Anne Quéguiner-Mathieu pour leurs diverses remarques sur les premières versions de ce travail, réalisé partiellement au sein de l'ANR GATHo.

REFERENCES

- AO95 H. Ahmad and J. Ohm, *Function fields of Pfister neighbors*, J. Algebra **178** (1995), 653–664.
- Ami55 S. Amitsur, *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. of Math. (2) **62** (1955), 8–43.
- Bor91 A. Borel, *Linear algebraic groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 126, second edition (Springer, New York, 1991).
- BS68 A. Borel and T. A. Springer, *Rationality properties of linear algebraic groups II*, Tohoku Math. J. **20** (1968), 443–497.
- BT65 A. Borel and J. Tits, *Groupes réductifs*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **27** (1965), 55–151.
- Bou81 N. Bourbaki, *Éléments de mathématique*, in *Groupes et algèbres de Lie* (Masson, Paris, 1981), chs 4, 5 and 6.
- Bro05 P. Brosnan, *On motivic decompositions arising from the method of Bia lynicki-Birula*, Invent. Math. **161** (2005), 91–111.
- CSPZ06 B. Calmès, N. Semenov, V. Petrov and K. Zainoulline, *Chow motives of twisted flag varieties*, Compositio Math. **142** (2006), 1063–1080.
- CGM05 V. Chernousov, S. Gille and A. Merkurjev, *Motivic decomposition of isotropic projective homogeneous varieties*, Duke Math. J. **126** (2005), 137–159.
- CM06 V. Chernousov and A. Merkurjev, *Motivic decomposition of projective homogeneous varieties and the Krull–Schmidt theorem*, Transform. Groups **11** (2006), 371–386.
- DeC10 C. De Clercq, *Motivic decompositions of projective homogeneous varieties and change of coefficients*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **348** (2010), 955–958.
- DeC11 C. De Clercq, *Classification of upper motives of algebraic groups of inner type A_n* , C. R. Math. Acad. Sci. Paris **349** (2011), 433–436.
- DeC13 C. De Clercq, *Motivic rigidity of Severi–Brauer varieties*, J. Algebra **373** (2013), 30–38.
- DG17 C. De Clercq and S. Garibaldi, *Tits p -indexes of semisimple algebraic groups*, J. Lond. Math. Soc. (2) **95** (2017), 567–585.
- EKM08 R. Elman, N. Karpenko and A. Merkurjev, *The algebraic and geometric theory of quadratic forms*, AMS Colloquium Publications, vol. 56 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2008).
- Ful98 W. Fulton, *Intersection theory*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, vol. 2 (Springer, Berlin, 1998).
- GPS16 S. Garibaldi, V. Petrov and N. Semenov, *Shells of twisted flag varieties and the Rost invariant*, Duke Math. J. **165** (2016), 285–339.
- Gro58 A. Grothendieck, *La torsion homologique et les sections rationnelles*, Anneaux de Chow et applications, Exposé 5, Séminaire C. Chevalley, 1958.
- Hau10 O. Haution, *Lifting of coefficients for Chow motives of quadrics*, in *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, Developments in Mathematics, vol. 18 (Springer, New York, 2010), 239–247.
- Hof98 D. W. Hoffmann, *Similarity of quadratic forms and half-neighbors*, J. Algebra **204** (1998), 255–280.
- Hof15 D. W. Hoffmann, *Motivic equivalence and similarity of quadratic forms*, Doc. Math. **Extra Volume** (2015), 265–275.
- Izh98 O. Izhboldin, *Motivic equivalence of quadratic forms*, Doc. Math. **3** (1998), 341–351.
- Kah06 B. Kahn, *Formes quadratiques et cycles algébriques [d’après Rost, Voevodsky, Vishik, Karpenko...]*, Exposé Bourbaki no. 941, Astérisque **307** (2006), 113–163.
- Kah08 B. Kahn, *Formes quadratiques sur un corps*, Cours spécialisé no. 15, SMF, 2008.

- Kar00 N. Karpenko, *Criteria of motivic equivalence for quadratic forms and central simple algebras*, Math. Ann. **317** (2000), 585–611.
- Kar03 N. Karpenko, *On the first Witt index of quadratic forms*, Invent. Math. **153** (2003), 455–462.
- Kar10a N. Karpenko, *Canonical dimension*, in *Proc. int. congress of mathematicians (ICM 2010)*, Vol. II (Hindustan Book Agency, New Delhi, India, 2010), 146–161.
- Kar10b N. Karpenko, *Upper motives of outer algebraic groups*, in *Quadratic forms, linear algebraic groups, and cohomology*, Developments in Mathematics, vol. 18 (Springer, New York, 2010), 249–258.
- Kar12 N. Karpenko, *Sufficiently generic orthogonal grassmannians*, J. Algebra **372** (2012), 365–375.
- Kar13 N. Karpenko, *Upper motives of algebraic groups and incompressibility of Severi–Brauer varieties*, J. Reine Angew. Math. **677** (2013), 179–198.
- KR94 I. Kersten and U. Rehmann, *Generic splitting of reductive groups*, Tohoku Math. J. **46** (1994), 35–70.
- KMRT98 M.-A. Knus, A. Merkurjev, M. Rost and J.-P. Tignol, *The book of involutions*, with a preface by J. Tits, AMS Colloquium Publications, vol. 44 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1998).
- Köc91 B. Köck, *Chow motif and higher Chow theory of G/P* , Manuscripta Math. **70** (1991), 363–372.
- Lam05 T. Y. Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 67 (American Mathematical Society, Providence, RI, 2005).
- Man68 Yu. I. Manin, *Correspondence, motifs, and monoidal transformations*, Mat. Sb. **77** (1968), 475–507; English transl.: Math. USSR-Sb. **6** (1968), 439–470.
- MPW96 A. Merkurjev, A. Panin and A. Wadsworth, *Index reduction formulas for twisted flag varieties I*, J. K-Theory **10** (1996), 517–596.
- MPW98 A. Merkurjev, A. Panin and A. Wadsworth, *Index reduction formulas for twisted flag varieties II*, J. K-Theory **14** (1998), 101–196.
- PS10a V. Petrov and N. Semenov, *Generically split projective homogeneous varieties*, with an appendix by M. Florence, Duke Math. J. **152** (2010), 155–173.
- PS10b V. Petrov and N. Semenov, *Generically split projective homogeneous varieties II*, J. K-Theory **10** (2010), 1–8.
- PSZ08 V. Petrov, N. Semenov and K. Zainoulline, *J-invariant of linear algebraic groups*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **41** (2008), 1023–1053.
- QSZ12 A. Quéguiner-Mathieu, N. Semenov and K. Zainoulline, *J. Pure Appl. Algebra* **216** (2012), 2614–2628.
- Rou05 S. Roussey, *Corps de fonctions et équivalences birationnelles des formes quadratiques*, Doctoral Thesis, Université de Franche-Comté (2005).
- SGA3 M. Demazure and A. Grothendieck (eds), *Schémas en groupes. II : Groupes de type multiplicatif, et structure des schémas en groupes généraux. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1962/64 (SGA 3)*. Dirigé par M. Demazure et A. Grothendieck. Lecture Notes in Mathematics, vol. 152 (Springer, Berlin, 1970); MR 274459.
- Spr52 T. A. Springer, *Sur les formes quadratiques d'indice zéro*, C. R. Acad. Sci. Paris **234** (1952), 1517–1519.
- Tit66 J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, in *Algebraic groups and discontinuous subgroups*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. 9 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1966), 33–62.
- Tit92 J. Tits, *Sur les degrés des extensions de corps déployant les groupes algébriques simples*, C. R. Acad. Sci. Paris **315** (1992), 1131–1138.
- Vis04 A. Vishik, *Motives of quadrics with applications to the theory of quadratic forms*, in *Geometric methods in the algebraic theory of quadratic forms*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1835 (Springer, 2004), 25–101.

ÉQUIVALENCE MOTIVIQUE DES GROUPES ALGÈBRIQUES SEMISIMPLES

- Vis10 A. Vishik, *Fields of u -invariant $2^r + 1$* , in *Algebra, arithmetic and geometry – in honor of Yu. I. Manin* (Birkhäuser, Boston, MA, 2010), 661–685.
- VY07 A. Vishik and N. Yagita, *Algebraic cobordisms of a Pfister quadric*, *J. Lond. Math. Soc. (2)* **76** (2007), 586–604.
- Wei61 A. Weil, *Algebras with involutions and the classical groups*, *J. Indian Math. Soc. (N.S.)* **24** (1961), 589–623.
- Zhy12 M. Zhykhovich, *Decompositions of motives of generalized Severi–Brauer varieties*, *Doc. Math.* **17** (2012), 151–165.

Charles De Clercq de.clercq.charles@gmail.com

LAGA, UMR 7539, Institut Galilée, Université Paris 13, 93430 Villetaneuse, France