BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 46B20, 46C05
VOL. 42 (1990) [465-482]

CONSTANTE RECTANGLE ET BIAIS D'UN ESPACE DE BANACH

JOCELYN DESBIENS

We study in this paper the relations existing between Joly's rectangular constant (μ) and the degree of asymmetry of Birkhoff-James's orthogonality relation (β). New bounds on the variation of μ in terms of β and estimation of the values taken by β in the case of uniformly convex Banach spaces are given.

1. NOTATIONS

$(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$	Espace de Banach réel.
$\mathcal{O}$	Le vecteur origine de l'espace $\mathcal{B}$.
$S(x;\rho)$	$\{y \in \mathcal{B} \mid \|x-y\| = \rho\}, \rho > 0$.
$B(x;\rho)$	$\{y \in \mathcal{B} \mid \|x-y\| \leqslant \rho\}, \rho > 0$.
$\mathcal{S}$	$S(\mathcal{O};1)$.
$\mathcal{C}(x,y)$	Le cercle unité du plan $\mathcal{P}$, où $\mathcal{P}$ est le plan contenant les vecteurs indépendants x et y et l'origine $\mathcal{O}$. Donc $\mathcal{C}(x,y) = \mathcal{S} \cap \mathcal{P}$. Nous le noterons par $\mathcal{C}$ lorsque le contexte sera clair.
$\dim(\mathcal{B})$	La dimension algébrique de $\mathcal{B}$.
$[x,y]$	Le segment de droite ayant les vecteurs x et y comme extrémités.
T_γ	L'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre $\gamma \geqslant 1$ et à l'application $T: X \to \mathcal{B}$, c'est-à-dire $T_\gamma = \{x \in \mathcal{B} \mid T(x) = \gamma x\}$.
$\mathrm{F}(T)$	L'ensemble des points fixes de l'application $T: X \to \mathcal{B}$. Donc $\mathrm{F}(T) = T_1$.
$\mu(\mathcal{B})$ ou μ	La constante rectangle de l'espace $\mathcal{B}$.
$\beta(\mathcal{B})$ ou β	Le biais de l'espace $\mathcal{B}$.

2. PRÉLIMINAIRES

Rappelons en premier lieu la définition suivante:

DÉFINITION 1: (Birkhoff [3], p.169) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $(x,y) \in \mathcal{B}^2$. Nous dirons que x est *orthogonal à y au sens de Birkhoff-James*, ce que nous noterons par $x \perp_{BJ} y$, si et seulement si $\|x + \lambda y\| \geqslant \|x\|$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$.

Nous aurons besoin du lemme suivant dû à James:

Received 9th January 1990.

Lemme 1. (James [13], Corollaire 2.2 et Théorème 2.3) *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors pour tout couple de vecteurs $(x,y) \in \mathcal{B}^2$ on a que*

(i) $x \perp_{BJ} y \Longrightarrow \alpha x \perp_{BJ} \beta y$, $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$,

(ii) *il existe au moins un couple $(\alpha,\beta) \in \mathbf{R}^2$ tel que $x + \alpha y \perp_{BJ} y$ et $x \perp_{BJ} \beta x + y$.*

La définition originale de la relation de Birkhoff-James a été donnée par Birkhoff [3] en 1935. Elle fut reprise un peu plus tard par Fortet [9] et James [13] et utilisée par Joly [15] en 1969 dans sa définition de la mesure de convexité d'un espace de Banach. C'est ce qu'il a dénommé la "constante rectangle" d'un espace vectoriel normé. En voici la définition formelle:

Définition 2: (Joly [15], Définition 2) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la *constante rectangle* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on dénote $\mu(\mathcal{B})$, par la formule

$$\mu(\mathcal{B}) = \sup_{x \perp_{BJ} y} \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x+y\|}.$$

Joly a montré que $\sqrt{2} \leqslant \mu(\mathcal{B}) \leqslant 3$. On a en fait la caractérisation suivante (Joly n'a vérifié cette assertion que dans le cas où $\dim(\mathcal{B}) \geqslant 3$ ([15], Proposition, p.307).)

Proposition 1. (Del Rio et Benitez [6], Théorème, p.18) *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Pour que la norme soit issue d'un produit scalaire il faut et il suffit que $\mu(\mathcal{B}) = \sqrt{2}$.*

C'est dans le même esprit que nous avons introduit dans l'article [7] une constante associée à un espace de Banach $\mathcal{B}$, que nous notons $\beta(\mathcal{B})$, et dont la définition est:

Définition 3: Soit $\mathcal{B}$ une espace de Banach. On définit le *biais* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on dénote $\beta(\mathcal{B})$, par la formule

$$\beta(\mathcal{B}) = \sup\{\gamma \in \mathbf{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; 0 < \|x\| \leqslant \|y\|; x,y \in \mathcal{B}\}.$$

Nous montrerons ci-dessous que ce paramètre peut en fait se redéfinir dans les termes suivants:

Définition 4: (Smith [21], p.225) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la *constante de projection métrique* de l'espace $\mathcal{B}$, que l'on dénote $\mathrm{MPB}(\mathcal{B})$, par la formule

$$\mathrm{MPB}(\mathcal{B}) = \sup\{\|P_{\mathcal{E}}\| \in \mathbf{R} \mid \mathcal{E} \text{ est un sous-espace proximal de } \mathcal{B}\}$$

où

$$\|P_{\mathcal{E}}\| = \sup\{\|y\| \in \mathbf{R} \mid y \in P_{\mathcal{E}}(x), \|x\| \leqslant 1\}$$

et $P_{\mathcal{E}}(x)$ est la projection du vecteur x sur le sous-espace $\mathcal{E}$ de $\mathcal{B}$.

Rappelons qu'un sous-ensemble $\mathcal{E}$ d'un espace de Banach $\mathcal{B}$ est *proximal* si, pour tout $x \in \mathcal{B}$,

$$P_{\mathcal{E}}(x) = \{y \in \mathcal{B} \mid \|x - y\| = d(x, \mathcal{E})\} \neq \emptyset$$

où

$$d(x, \mathcal{E}) = \inf\{\|x - y\| \in \mathsf{R} \mid y \in \mathcal{E}\}.$$

DÉFINITION 5: (Baronti [2], p.1076). Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On définit la constante $\mathrm{MPB}'(\mathcal{B})$ associée à l'espace $\mathcal{B}$ par la formule

$$\mathrm{MPB}'(\mathcal{B}) = \sup\{\|P_{\mathcal{E}}\| \in \mathsf{R} \mid \mathcal{E} \text{ est un sous-espace dimension 1 de } \mathcal{B}\}.$$

DÉFINITION 6: Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. La *projection radiale* définie sur $\mathcal{B}$ est la fonction $\rho: \mathcal{B} \to B(\mathcal{O}; 1)$ donnée par la formule

$$\rho(x) = \begin{cases} x, & \text{si } \|x\| \leqslant 1 \\ \dfrac{x}{\|x\|}, & \text{si } \|x\| \geqslant 1. \end{cases}$$

Notons par $k(\mathcal{B})$ la plus petite constante de Lipschitz de la projection ρ, c'est-à-dire le plus petit nombre réel ayant la propriété que

$$\|\rho(x) - \rho(y)\| \leqslant k(\mathcal{B})\|x - y\|$$

et ce pour tout $x, y \in \mathcal{B}$. Les majorants donnés par Dunkl et Williams [8] et Massera et Schäffer [17] montrent que ce nombre est bien défini et a une valeur comprise entre 1 et 2. De plus, DeFigueiredo et Karlovitz [5] ont montré que la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur un espace de Banach $\mathcal{B}$ est symétrique si et seulement si $k(\mathcal{B}) = 1$.

PROPOSITION 2. (Thele [22], p.483) *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors*

$$k(\mathcal{B}) = \sup\{\frac{\|y\|}{\|x - y\|} \in \mathsf{R} \mid x \perp_{BJ} y, y \neq \mathcal{O}\}.$$

PROPOSITION 3. (Baronti [2], Théorème 5) *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On a toujours que*

$$MPB(\mathcal{B}) = MPB'(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B}).$$

3. Propriétés du biais d'un espace de Banach

Les résultats suivants sont tirés de l'article [7].

Proposition 4. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors*

(1) $1 \leqslant \beta(\mathcal{B}) \leqslant 2$.
(2) $\beta(\mathcal{B}) = \sup\{\gamma \in \mathsf{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; 0 < \|x\| = \|y\|; x, y \in \mathcal{B}\}$.
(3) $\beta(\mathcal{B}) = \sup\{\gamma \in \mathsf{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; x, y \in \mathcal{S}\}$.
(4) *Si* $[x, y] \subset \mathcal{S}$ *alors* $\beta(\mathcal{B}) \geqslant \|x - y\|$.
(5) *Supposons que* $\dim(\mathcal{B}) = 2$. *Pour que* $\beta(\mathcal{B}) = 2$ *il faut et il suffit que le cercle unité* $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ *soit un parallélogramme.*

Proposition 5. *Soit $\mathcal{B}$ une espace de Banach. Pour que la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie dans cet espace soit symétrique il faut et il suffit que* $\beta(\mathcal{B}) = 1$.

Exemple 1. Soit $\mathcal{B}_r = \mathsf{R}^2$ et $r, s \geqslant 1$ deux nombres réels conjugués, c'est-à-dire que $r^{-1} + s^{-1} = 1$. Définissons une norme sur $\mathcal{B}_r$ par la formule:

$$\|(x, y)\|_r = \begin{cases} \sqrt[r]{|x|^r + |y|^r} & \text{si } \operatorname{sgn}(x) = \operatorname{sgn}(y), \\ \sqrt[s]{|x|^s + |y|^s} & \text{si } \operatorname{sgn}(x) \neq \operatorname{sgn}(y). \end{cases}$$

Il n'est pas difficile de voir que, pour $r \geqslant 1$, l'orthogonalité de Birkhoff-James est symétrique dans $\mathcal{B}_r$. Donc $\beta(\mathcal{B}) = 1$. Par contre $\mathcal{B}_r$ n'est pas hilbertien ($r \neq 2$).

Définition 7: Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Nous dirons que $\mathcal{B}$ *a la propriété* $\mathcal{P}'$ si, pour tout scalaire $\gamma > 1$ et pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in \mathcal{B}^2$, l'implication suivante est vraie:

$$\|x\| \leqslant \|y\| \Longrightarrow \|x + y\| \leqslant \|x + \gamma y\|.$$

Proposition 6. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, Alors*

(1) $\beta(\mathcal{B}) = 1$ *entraîne que* $\mathcal{B}$ *possède la propriété* $\mathcal{P}'$.
(2) *Si* $\mathcal{B}$ *a la propriété* $\mathcal{P}'$ *et que* $\beta(\mathcal{B}) > 1$ *alors* $\mathcal{B}$ *n'est pas strictement convexe.*
(3) *Le fait que* $\mathcal{B}$ *est soit strictement convexe et qu'il ait un biais égal à 1 est équivalent au fait que* $\mathcal{B}$ *possède la propriété* $\mathcal{P}'$.

Définition 8: Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $x \in \mathcal{S}$ et $z \in \mathcal{S}(\mathcal{O}; \varepsilon)$. Parcourons le segment $[x, z]$ dans le sens de x à z et notons par y le premier point de contact entre le segment $[x, z]$ et la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{O}; \varepsilon)$. Nous dirons alors que $\mathcal{B}$ *a la propriété* $\mathcal{P}''$ si, quel que soit le choix du rayon ε et des vecteurs x et z, l'inégalité

$$\|x - y\| \leqslant 1$$

est toujours vérifiée.

Géométriquement, la propriété $\mathcal{P}''$ signifie que, pour un observateur placé en un point x de la sphère unité $\mathcal{S}$, tous les points visibles de la sphère $\mathcal{S}(\mathcal{O};\varepsilon)$ $(0 < \varepsilon \leqslant 1)$ appartiennent à la boule $\mathcal{B}(x;1)$.

PROPOSITION 7: Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach.

(1) Si, dans cet espace, la relation d'orthogonalité de Birkhoff-James est symétrique alors cet espace à la propriété $\mathcal{P}''$.

(2) Si $\mathcal{B}$ est strictement convexe et s'il possède la propriété $\mathcal{P}''$, il possède alors la propriété $\mathcal{P}'$.

PROPOSITION 8. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe. Les conditions suivantes sont alors équivalentes:*

(1) *La relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur $\mathcal{B}$ est symétrique.*

(2) $\beta(\mathcal{B}) = 1$.

(3) *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}'$.*

(4) *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}''$.*

PROPOSITION 9. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe avec* $\dim(\mathcal{B}) \geqslant 3$. *Les conditions suivantes sont alors équivalentes:*

(1) *La norme sur $\mathcal{B}$ est issue d'un produit scalaire.*

(2) *La relation d'orthogonalité de Birkhoff-James définie sur $\mathcal{B}$ est symétrique.*

(3) $\beta(\mathcal{B}) = 1$.

(4) *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}'$.*

(5) *$\mathcal{B}$ possède la propriété $\mathcal{P}''$.*

DÉFINITION 9: Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach, $X \subset \mathcal{B}$ et $T: X \to \mathcal{B}$ une application. Nous dirons que T est *pseudo-contractante* si $\forall (x,y) \in X^2$ et $\forall r > 0$ on a que

$$\|x - y\| \leqslant \|(1 + r)(x - y) - r(T(x) - T(y))\|.$$

PROPOSITION 10. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe de biais égal à 1 et $T: X \to \mathcal{B}$ une application pseudo-contractante telle que $T_\gamma \neq \emptyset$ pour tout $\gamma \in]1,\tau]$ avec $\tau > 1$. Il existe alors une application $\phi:]1,\tau] \to X$ définie par*

$$\phi(\gamma) = \omega_\gamma \iff \omega_\gamma \in T_\gamma, \quad \forall \gamma \in]1,\tau]$$

ayant les propriétés suivantes:

(1) *ϕ est continue sur tout $]1,\tau]$.*

(2) $\gamma \leqslant \mu \Longrightarrow \|\phi(\mu)\| \leqslant \|\phi(\gamma)\|$.

(3) $\sup\{\|\phi(\gamma)\| \mid \gamma \in]1,\tau]\} \leqslant \inf\{\|x\| \mid x \in F(T)\}$.

(4) $\mathcal{O} \in X$ *et* $\gamma \to \infty \Longrightarrow \phi(\gamma) \to \mathcal{O}$.

(5) *La fonction* $h:]1, \tau] \to [0, \infty]$ *définie par*

$$h(\gamma) = \|\phi(\gamma) - T(\phi(\gamma))\|, \quad \forall \gamma \in]1, \tau]$$

est non décroissante.

Proposition 11. (Morales [**19**]) *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach strictement convexe, X un convexe fermé de $\mathcal{B}$ et $T: X \to X$ une application continue et pseudo-contractante. Alors $F(T)$ est un convexe fermé de $\mathcal{B}$.*

Géométriquement, nous pouvons dire que l'ensemble des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\gamma > 1$ d'une application continue et pseudo-contractante T forme une courbe de Jordan dans l'ensemble $X \subset \mathcal{B}$ originant, si X est un convexe fermé de $\mathcal{B}$, de l'unique point fixe de norme minimale de l'application T et tendant progressivement vers l'origine de l'espace $\mathcal{B}$. Les prochaines propositions (Nous tenons à remercier ici le professeur Dan Amir de l'Université de Tel-Aviv pour les conseils qu'il nous a donnés concernant le lien existant entre les différents paramètres que nous étudions ici.) n'apparaissent pas dans [**7**].

Proposition 12. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. On a toujours que*

$$MPB(\mathcal{B}) = MPB'(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B}) = \beta(\mathcal{B}).$$

Démonstration: Au vu de la Proposition 3, il ne reste qu'à démontrer la validité de l'égalité de droite. Soit donc x et y deux vecteurs de $\mathcal{S}$. On peut trouver un nombre réel γ tel que $x + \gamma y \perp_{BJ} y$. Posons $\omega = x + \gamma y$. Alors

$$\begin{aligned} \|\omega - x\| &= \|(x + \gamma y) - x\| \\ &= \|\gamma y\| \\ &= |\gamma| \cdot \|y\| \\ &= |\gamma|. \end{aligned}$$

Ainsi $|\gamma|$ est égal à la longueur de la projection du vecteur x sur le sous-espace de dimension 1 $\mathbf{R}y = \{\lambda y \in \mathcal{B} \mid \lambda \in \mathbf{R}\}$. Il suffit maintenant d'appliquer la Proposition 3. □

Une conséquence immédiate de cette proposition est que, pour tout espace de Banach $\mathcal{B}$, on a $\beta(\mathcal{B}) = \beta(\mathcal{B}^*)$, où $\mathcal{B}^*$ est le dual topologique de $\mathcal{B}$ (Franchetti [**10**], Théorème, p.427). De la même façon, on peut montrer que $\mathcal{B}$ est *uniformément non carrable* (James [**14**], Définition 1.1) si et seulement si $\beta(\mathcal{B}) < 2$ (Smith [**21**], Théorème 2.1).

4. Constante rectangle et biais d'un espace de Banach

4.1 Résultats préliminaires

Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et x, y deux vecteurs de $\mathcal{B}$. Rappelons auparavant les inégalités suivantes:

$$\|x+y\| \geqslant \begin{cases} \left(\frac{\|x\|+\|y\|}{4}\right)\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|, & \text{(Dunkl et Williams)} \\ \frac{1}{2}\max\{\|x\|,\|y\|\}\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|, & \text{(Massera et Schäffer)} \\ \frac{1}{k(\mathcal{B})}\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|, & \text{(Thele)} \\ c_p\sqrt[p]{\|x\|^p+\|y\|^p}\left\|\frac{x}{\|x\|}+\frac{y}{\|y\|}\right\|, & \text{(Al-Rashed)} \end{cases}$$

où, dans le dernier cas, $c_p = 1/4$ si $p \geqslant 1$ et $c_p = 2^{-1-1/p}$ si $0 < p \leqslant 1$. Ces inégalités sont dues respectivement à Dunkl et Williams [8], Massera et Schäffer [**17**], Thele [**22**] et Al-Rashed [**1**]. Il est à noter aussi que l'inégalité de Thele n'est vraie que pour des vecteurs x, y tels que $\|x\| \geqslant 1$ et $\|y\| \geqslant 1$. Les autres inégalités sont vraies cependant pour toutes les valeurs de x et y.

Soit donc x et y deux vecteurs de $\mathcal{S}$ tels que $x + \beta y \perp_{BJ} y$, c'est-à-dire tels que le coefficient γ associé à ces deux vecteurs atteint sa plus grande valeur. Si tel n'est pas le cas, il est toujours possible de trouver un nombre réel $\gamma = \beta - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ tel que $x + \gamma y \perp_{BJ} y$. Il suffit ensuite d'utiliser des arguments de continuité et de passage à la limite pour arriver aux résultats désirés. Par mesure de simplicité, nous assumerons tout au long de ce chapitre l'existence de tels vecteurs x et y.

Proposition 13. *Soit $x, y \in \mathcal{S}$ deux vecteurs tels que $x + \beta y \perp_{BJ} y$. Alors*

(1) $\|x + \beta y\| \leqslant \mu - \beta$.
(2) $\|x + y\| \leqslant 1$.
(3) $\mu \geqslant 2\sqrt{\|x + y\|}$.
(4) $\|x + y\| = 1 \Longrightarrow \mu \geqslant 2$.
(5) $\|x + y\| = 1 \Longrightarrow \mathcal{B}$ *n'est pas strictement convexe.*

Démonstration:

(1) En effet, $\mu \geqslant \|x + \beta y\| + \beta$ car $x + \beta y \perp_{BJ} y$ et $\|y\| = 1$.
(2) La fonction $\varphi(\lambda) = \|x + \lambda y\|$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$, est convexe et atteint son minimum absolu au point $\beta \geqslant 1$. Or $\varphi(0) = \|x\| = 1$. Si $\varphi(1) = \|x + y\| > 1$, il est impossible dans ce cas que φ puisse atteindre son minimum au point β. Contradiction.
(3) On sait que $\|x + \beta y\| \leqslant \mu - \beta$. Appliquant l'inégalité de Thele et la

Proposition 12 aux vecteurs x et βy ($\|\beta y\| = \beta\|y\| = \beta \geqslant 1$) on obtient

$$\|x+\beta y\| \geqslant \frac{1}{\beta}\|x+y\|$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu - \beta \geqslant \frac{1}{\beta}\|x+y\|.$$

Ainsi

$$\mu \geqslant \frac{\|x+y\|}{\beta} + \beta \geqslant 2\sqrt{\|x+y\|}$$

car la fonction $x \mapsto c/x + x$ atteint son minimum au point $x = \sqrt{c}$.

(4) Conséquence immédiate de la relation précédente.

(5) En effet, le cercle unité $\mathcal{C}(x,y)$ contient dans ce cas le segment de droite $[x, x+\beta y]$ $\square$

Il est démontré dans Baronti [**2**], Théorème 3, que la double inégalité suivante est toujours vraie:

$$2\beta - 1 \leqslant \mu \leqslant \beta + 1. \tag{1}$$

L'inégalité de gauche est une conséquence de la relation 13.1. En effet, $\mu \geqslant \|x+\beta y\| + \beta \geqslant \beta\|y\| - \|x\| + \beta = 2\beta - 1$ car $\|x\| = \|y\| = 1$. Nous verrons un peu plus loin que l'inégalité de droite se déduit aussi d'une relation plus spécifique unissant μ à β.

4.2 Minorant de la constante rectangle

Nous nous attaquons maintenant au problème consistant à minorer la valeur de $\mu(\mathcal{B})$ en fonction de la valeur de $\beta(\mathcal{B})$. Nous voulons aussi obtenir une meilleure estimation que celle donnée par l'inégalité (1). La Proposition 13.1 affirme que $\|x + \beta y\| \leqslant \mu - \beta$. On sait de plus (Proposition 12) que $\beta(\mathcal{B}) = k(\mathcal{B})$ et que

$$\|x+\beta y\| \geqslant \begin{cases} \frac{1}{\beta}\|x+y\| & \text{(Thele)} \\ \frac{1}{2}\max\{1,\beta\}\|x+y\| & \text{(Massera et Schäffer)} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \|x+y\| \leqslant \begin{cases} \beta(\mu-\beta), & 1 \leqslant \beta \leqslant \sqrt{2} \\ \frac{2}{\beta}(\mu-\beta), & \sqrt{2} \leqslant \beta \leqslant 2. \end{cases}$$

Mais

$$\mu \geqslant \frac{\|x+\beta y\| + (\beta-1)}{\|x+y\|} \geqslant \begin{cases} \frac{1}{\beta} + \frac{\beta-1}{\|x+y\|}, & \text{(Thele)} \\ \frac{\beta}{2} + \frac{\beta-1}{\|x+y\|}, & \text{(Massera et Schäffer)} \end{cases}$$

https://doi.org/10.1017/S000497270002863X Published online by Cambridge University Press

$$\Longrightarrow \qquad \|x+y\| \geqslant \begin{cases} \frac{\beta(\beta-1)}{\mu\beta-1}, & 1 \leqslant \beta \leqslant \sqrt{2} \\ \frac{2(\beta-1)}{2\mu-\beta}, & \sqrt{2} \leqslant \beta \leqslant 2. \end{cases}$$

En conclusion,

$$\frac{\beta(\beta-1)}{\mu\beta-1} \leqslant \|x+y\| \leqslant \beta(\mu-\beta) \quad \text{et} \quad \frac{2(\beta-1)}{2\mu-\beta} \leqslant \|x+y\| \leqslant \frac{2}{\beta}(\mu-\beta)$$

d'où

$$\beta - 1 \leqslant (\mu-\beta)(\mu\beta-1) \tag{2}$$

$$\beta - 1 \leqslant (\mu-\beta)\Big(2\frac{\mu}{\beta}-1\Big). \tag{3}$$

Résolvons l'inégalité (2). On peut la réécrire sous la forme

$$\mu^2\beta - \mu(1+\beta^2) + 1 \geqslant 0.$$

Ce qui donne

$$\mu \geqslant \frac{1+\beta^2+\sqrt{(1+\beta^2)^2-4\beta}}{2\beta},$$

l'autre solution étant impossible ($\mu > 1$). Cette borne inférieure est meilleure que celle de Baronti pour toutes les valeurs de β comprises entre 1 et la solution β_0 de l'équation

$$2\beta - 1 = \frac{1+\beta^2+\sqrt{(1+\beta^2)^2-4\beta}}{2\beta}$$

$$\Longrightarrow \qquad \beta_0 = \frac{1+\sqrt{17}}{4} \approx 1.280776407 < \sqrt{2}.$$

Remarquons que, de cette inégalité, on tire

$$\mu - \beta \geqslant \frac{\mu-1}{\mu\beta},$$

expression qui est une meilleure estimation du minorant de la valeur de $\mu-\beta$ que celle donnée par l'inégalité (1). Finalement, de l'inégalité (3) on tire

$$2\mu^2 - 3\beta\mu + \beta \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow \qquad \mu \geqslant \frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\beta}}{4},$$

l'autre solution étant impossible ($\mu < 1$). Il n'est pas possible d'obtenir dans ce cas un meilleur minorant de μ car

$$2\beta - 1 \geqslant \frac{3\beta+\sqrt{9\beta^2-8\beta}}{4}$$

pour tout $1 \leqslant \beta \leqslant 2$.

4.3 Majorant de la constante rectangle

Montrons en premier que $\mu - \beta \leqslant 1/\beta$, pour $1 \leqslant \beta \leqslant \sqrt{2}$. Considérons deux cas. Premier cas: $\beta = 1$. Alors $\mu \leqslant \beta + 1 = 2$ et donc $\mu - \beta \leqslant 2 - 1 = 1 \leqslant 1/\beta$. Second cas: $\beta > 1$. Posons

$$k \geqslant \frac{\beta(\beta - 1)}{\mu\beta - 1}$$

et résolvons pour μ. On a alors

$$\mu \geqslant \frac{\beta - 1}{k} + \frac{1}{\beta}.$$

Posons

$$\mu_k = \frac{\beta - 1}{k} + \frac{1}{\beta}.$$

Si $\mu_k \geqslant \mu_{k'}$ il est possible alors de conclure que $k \leqslant k'$. Résolvons maintenant les inégalités

$$\frac{\beta(\beta - 1)}{\mu\beta - 1} \leqslant \|x + y\| \leqslant \beta(\mu - \beta) = k$$
$$\frac{\beta(\beta - 1)}{\mu\beta - 1} \leqslant \|x + y\| \leqslant 1 = k'.$$

La seconde inégalité provient de la Proposition 13. On trouve en résolvant pour μ que, dans le premier cas,

$$\mu \geqslant \frac{1 + \beta^2 + \sqrt{(1 + \beta^2)^2 - 4\beta}}{2\beta} = \mu_k$$

et que, dans le second cas,

$$\mu \geqslant \frac{\beta^2 - \beta + 1}{\beta} = \mu_{k'}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que, pour $1 \leqslant \beta \leqslant \sqrt{2}$, on a $\mu_k \geqslant \mu_{k'}$. Donc, en se basant sur ce qui a été dit ci-dessus, on peut conclure que $k \leqslant k'$ ou, en d'autres mots, que $\beta(\beta - \mu) \leqslant 1$. Donc

$$\mu - \beta \leqslant \frac{1}{\beta}, \qquad 1 \leqslant \beta \leqslant \sqrt{2}.$$

Montrons maintenant que $\mu - \beta \leqslant \beta/2$, pour $\sqrt{2} \leqslant \beta \leqslant 2$. Puisque $\beta \geqslant \sqrt{2}$, il n'y a alors qu'un seul cas à considérer. Posons

$$k \geqslant \frac{2(\beta - 1)}{2\mu - \beta}$$

https://doi.org/10.1017/S000497270002863X Published online by Cambridge University Press

et résolvons pour μ. On a alors

$$\mu \geqslant \frac{\beta-1}{k} + \frac{\beta}{2}.$$

Posons

$$\mu_k = \frac{\beta-1}{k} + \frac{\beta}{2}.$$

Si $\mu_k \geqslant \mu_{k'}$ il est possible alors de conclure que $k \leqslant k'$. Résolvons maintenant les inégalités

$$\frac{2(\beta-1)}{2\mu-\beta} \leqslant \|x+y\| \leqslant \frac{2}{\beta}(\mu-\beta) = k$$
$$\frac{2(\beta-1)}{2\mu-\beta} \leqslant \|x+y\| \leqslant 1 = k'.$$

La seconde inégalité provient de la Proposition 13. On trouve en résolvant pour μ que, dans le premier cas,

$$\mu \geqslant \frac{3\beta + \sqrt{9\beta^2 - 8\beta}}{4} = \mu_k$$

et que, dans le second cas,

$$\mu \geqslant \beta - 1 + \frac{\beta}{2} = \frac{3}{2}\beta - 1 = \mu_{k'}.$$

Il n'est pas difficile de vérifier que, pour $\sqrt{2} \leqslant \beta \leqslant 2$, on a $\mu_k \geqslant \mu_{k'}$. Donc, en se basant sur ce qui a été dit ci-dessus, on peut conclure que $k \leqslant k'$ ou, en d'autres mots, que $2/\beta(\beta-\mu) \leqslant 1$. Donc

$$\mu - \beta \leqslant \frac{\beta}{2}, \qquad \sqrt{2} \leqslant \beta \leqslant 2.$$

En résumé, nous venons de prouver que μ est dominé par le majorant

$$\mu \leqslant \begin{cases} \beta + \frac{1}{\beta}, & \text{si } 1 \leqslant \beta \leqslant \sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\beta, & \text{si } \sqrt{2} \leqslant \beta \leqslant 2 \end{cases}$$

ce qui est une amélioration par rapport au majorant ($\mu \leqslant \beta + 1$) donné par l'inégalité (1).

https://doi.org/10.1017/S000497270002863X Published online by Cambridge University Press

4.4 Bornes de la constante rectangle

Nous pouvons combiner les résultats précédents dans une seule proposition:

Proposition 14. *Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. Alors*

$$\mu \geqslant \begin{cases} \frac{1+\beta^2+\sqrt{(1+\beta^2)^2-4\beta}}{2\beta}, & si\ 1 \leqslant \beta \leqslant \frac{1+\sqrt{17}}{4} \\ 2\beta - 1, & si\ \frac{1+\sqrt{17}}{4} \leqslant \beta \leqslant 2 \end{cases}$$

et

$$\mu \leqslant \begin{cases} \beta + \frac{1}{\beta}, & si\ 1 \leqslant \beta \leqslant \sqrt{2} \\ \frac{3}{2}\beta, & si\ \sqrt{2} \leqslant \beta \leqslant 2. \end{cases}$$

Il est facile de montrer à partir de cette proposition que $\mu \leqslant \beta + 1$. Ainsi le théorème de Baronti ([**2**], Théorème 3) est-il une conséquence directe de la Proposition 14 et la Proposition 13.1.

Exemple 2. Kapoor et Mathur [**16**] ont donné les valeurs des paramètres $\beta(l_3^2)$ et $\beta(l_4^2)$ qui sont égaux à

$$\beta(l_3^2) = \frac{1}{3}\sqrt[3]{17 + 7\sqrt{7}} \approx 1.0957314$$

$$\beta(l_4^2) = \sqrt[4]{1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}} \approx 1.211565.$$

Par ailleurs, Gastinel et Joly [**11**] ont trouvé les valeurs correspondantes de μ qui sont:

$$\mu(l_3^2) \approx 1.703 \quad \text{et} \quad \mu(l_4^2) \approx 1.888.$$

Vérifions dès lors le bien-fondé des bornes que nous donnons ci-dessus.

$$1.703 \approx \mu(l_3^2) \leqslant \beta(l_3^2) + \frac{1}{\beta(l_3^2)} \approx 2.0083638$$

et

$$1.888 \approx \mu(l_4^2) \leqslant \beta(l_4^2) + \frac{1}{\beta(l_4^2)} \approx 2.0369437.$$

5. Majorant du biais d'un espace uniformément convexe

5.1 Cas général

Les résultats suivants sont fortement inspirés de [**11**]. Rappelons auparavant la définition suivante:

https://doi.org/10.1017/S000497270002863X Published online by Cambridge University Press

DÉFINITION 10: (Clarkson [4]) Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach. $\mathcal{B}$ est dit *uniformément convexe*, si, quels que soient x et y dans $\mathcal{B}$ et $0 < \varepsilon < 2$, il existe une fonction $\delta(\varepsilon) > 0$ telle que les conditions

$$\|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1, \|x-y\| \geqslant \varepsilon$$

entraînent

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1-\delta(\varepsilon).$$

Nous appellerons $\delta(\varepsilon)$ le *module d'uniformité* de $\mathcal{B}$.

Soit donc $\mathcal{B}$ un espace de Banach uniformément convexe de module d'uniformité $\delta(\varepsilon)$ et x et y deux vecteurs de $\mathcal{S}$. Appliquons le lemme 1.*ii*. On peut alors trouver un nombre réel γ tel que

$$x+\gamma y \perp_{BJ} y.$$

De la Proposition 4.1 on tire que $|\gamma| \leqslant 2$. Posons $\varepsilon = |\gamma|$. Puisque $x+\gamma y \perp_{BJ} y$ alors, par définition, $\|x+\lambda y\| \geqslant \|x+\gamma y\|$, $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. En posant $\lambda = 0$ on trouve que

$$\begin{aligned}\|x+\gamma y\| &\leqslant \|x\| \\ &= 1.\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}\|\gamma y\| &= |\gamma| \cdot \|y\| \\ &= |\gamma| \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Posons maintenant $X = x$ et $Y = x+\gamma y$. Alors

$$\begin{aligned}\|X\| &= \|x\| = 1, \\ \|Y\| &= \|x+\gamma y\| \leqslant 1\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\|X-Y\| &= \|x-(x+\gamma y)\| \\ &= \|-\gamma y\| \\ &= |\gamma| \cdot \|y\| \\ &= |\gamma| \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Ce qui entraîne que

$$\left\|\frac{X+Y}{2}\right\| \leqslant 1-\delta(\varepsilon)$$

$$\Longrightarrow \qquad \left\|x+\frac{\gamma}{2}y\right\| \leqslant 1-\delta(\varepsilon).$$

Puisque

$$\|x + \frac{\gamma}{2}y\| \geqslant \|x + \gamma y\|$$

alors
$$\|x + \gamma y\| \leqslant 1 - \delta(\varepsilon)$$
et
$$\|x + \gamma y\| + \delta(\varepsilon) \leqslant 1.$$

Or

$$\begin{aligned}\|x + \gamma y\| &\geqslant \|\gamma y\| - \|x\| \\ &= |\gamma| \cdot \|y\| - \|x\| \\ &= |\gamma| - 1\end{aligned}$$

$\Longrightarrow$
$$|\gamma| + \delta(\varepsilon) \leqslant 2$$

c'est-à-dire que

$$\varepsilon + \delta(\varepsilon) \leqslant 2. \tag{4}$$

On sait que la fonction $\varepsilon \mapsto \delta(\varepsilon)$ est une fonction croissante de l'intervalle $]0,2]$ dans l'intervalle $]0,1]$. Il existe donc un nombre réel ε_0 tel que

$$\varepsilon_0 = \sup\{\varepsilon \in \mathbf{R} \mid \varepsilon + \delta(\varepsilon) \leqslant 2\}.$$

Par conséquent,

$$\beta(\mathcal{B}) = \sup\{\gamma \in \mathbf{R} \mid x + \gamma y \perp_{BJ} y; x, y \in \mathcal{S}\} \leqslant \varepsilon_0$$

car un nombre γ tel que $x + \gamma y \perp_{BJ} y$ (avec x et y dans $\mathcal{S}$) doit nécessairement satisfaire l'inégalité ci-dessus.

5.2 Cas d'un espace de Hilbert

On sait [20] que si $\mathcal{B}$ est un espace de Hilbert alors

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$$

pour $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2$. Remplaçons $\delta(\varepsilon)$ par sa valeur dans l'inégalité ci-dessus. Alors

$$\varepsilon + 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} \leqslant 2.$$

En résolvant cette inégalité, on trouve que $\varepsilon \leqslant 8/5$ ou encore que $\beta(\mathcal{B}) \leqslant 8/5$. En revanche, la Proposition 5 donne la meilleure valeur possible: $\beta(\mathcal{B}) = 1$.

5.3 Cas des espaces L^p, $p \geqslant 2$

Soit $p \geqslant 2$. On sait [12] que si $B = L^p$ alors

$$\delta(\varepsilon) = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

avec $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 2$. Substituons dans l'inégalité (4). On trouve que

$$(\varepsilon - 1)^p + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p \leqslant 1.$$

On peut borner supérieurement la solution de l'inégalité précédente en approximant la solution de l'équation

$$(\varepsilon - 1)^p + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p = 1.$$

Ce qui entraîne que, pour $p \geqslant 2$, on a

$$\beta(L^p) \leqslant 2 - \frac{2}{3p}.$$

Remarquons que l'inégalité donnée par Gastinel et Joly ([11], p.211) est une conséquence de l'inégalité ci-dessus car $\mu \leqslant \beta + 1$ ([2], Théorème 3).

5.4 Cas des espaces L^p, $1 \leqslant p \leqslant 2$

Le résultat suivant, dû à Meir, est nécessaire pour majorer la constante $\beta(L^p)$ dans le cas $1 \leqslant p \leqslant 2$.

Proposition 15. *(Meir [18], Corollaire, p.424) Soit $1 < p \leqslant 2$, $0 < \lambda < 1$, $x, y \in L^p$ avec $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ et $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$. Alors*

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leqslant 1 - \frac{p-1}{4} m\varepsilon^2,$$

où $m = \min\{\lambda, 1-\lambda\}$.

Tout comme au paragraphe 5.1, posons $X = x$ et $Y = x + \gamma y$. Alors

$$\|X\| = \|x\| = 1,$$
$$\|Y\| = \|x + \gamma y\| \leqslant 1$$
et
$$\|X - Y\| = |\gamma| = \varepsilon.$$

Ce qui entraîne que

$$\|\lambda X + (1-\lambda)Y\| \leqslant 1 - \frac{p-1}{4} m\varepsilon^2$$

$$\Longrightarrow \quad \|x + (1-\lambda)\gamma y\| \leqslant 1 - \frac{p-1}{4} m\varepsilon^2.$$

https://doi.org/10.1017/S000497270002863X Published online by Cambridge University Press

Puisque

$$\|x + (1-\lambda)\gamma y\| \geqslant \|x + \gamma y\|$$

alors
$$\|x + \gamma y\| \leqslant 1 - \frac{p-1}{4} m\varepsilon^2$$

et
$$\|x + \gamma y\| + \frac{p-1}{4} m\varepsilon^2 \leqslant 1.$$

Or $\|x + \gamma y\| \geqslant |\gamma| - 1$,

$\Longrightarrow$
$$|\gamma| + \frac{p-1}{4} m\varepsilon^2 \leqslant 2$$

c'est-à-dire que
$$\varepsilon + \frac{p-1}{4} m\varepsilon^2 \leqslant 2$$

ou encore que
$$\varepsilon + \frac{p-1}{4} m\varepsilon^2 - 2 \leqslant 0.$$

Il suffit maintenant de raisonner comme il a été fait au paragraphe 5.1. L'équation $\varepsilon + p - 1/4m\varepsilon^2 - 2 = 0$ ayant comme racines les expressions

$$r_0 = \frac{2\left(\sqrt{1+2m(p-1)} - 1\right)}{m(p-1)} > 0$$

$$r_1 = \frac{-2\left(\sqrt{1+2m(p-1)} + 1\right)}{m(p-1)} < 0$$

on obtient que $\varepsilon_0 = \dfrac{2\left(\sqrt{1+2m(p-1)} - 1\right)}{m(p-1)} = \dfrac{4}{1+\sqrt{1+2m(p-1)}}$.

Naturellement, cette expression est minimisée lorsque la valeur du paramètre m est maximale, c'est-à-dire lorsque $\lambda = 1/2$. Ce qui entraîne que, pour $1 < p \leqslant 2$, on a

$$\beta(L^p) \leqslant \frac{4}{1+\sqrt{p}}.$$

L'inégalité est encore vraie dans le cas $p = 1$. En effet, la Proposition 4.5 affirme que $\beta(L^1) = 2 = 4/1 + \sqrt{1}$. En conclusion

$$\beta(L^p) \leqslant \frac{4}{1+\sqrt{p}}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant 2.$$

En se servant de l'inégalité (1) on obtient le majorant de μ suivant:

$$\mu(L^p) \leqslant \frac{5+\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}$$

avec $1 \leqslant p \leqslant 2$. En résumé, nous avons trouvé que

$$\beta(L^p) \leqslant \begin{cases} \frac{4}{1+\sqrt{p}}, & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant 2 \\ 2 - \frac{2}{3p}, & \text{si } 2 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

et que

$$\mu(L^p) \leqslant \begin{cases} \frac{5+\sqrt{p}}{1+\sqrt{p}}, & \text{si } 1 \leqslant p \leqslant 2 \\ 3 - \frac{2}{3p}, & \text{si } 2 \leqslant p < \infty. \end{cases}$$

Ce dernier résultat étend celui de Gastinel et Joly ([**11**], p.211).

References

[1] A.M. Al-Rashed, 'Norm inequalities and characterizations of inner product spaces', *Amer. Math. Soc.* (submitted).

[2] M. Baronti, 'Su alcuni parametri degli spazi normati', *Boll. Un. Mat. Ital. B (5)* **18** (1981), 1065–1085.

[3] G. Birkhoff, 'Orthogonality in linear metric spaces', *Duke Math. J.* **1** (1935), 169–172.

[4] J.A. Clarkson, 'Uniformly convex spaces', *Trans. Amer. Math. Soc.* **40** (1936), 396–414.

[5] D.G. DeFigueiredo and L.A. Karlovitz, 'On the radial projection in normed spaces', *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 364–368.

[6] M. Del Rio and C. Benitez, 'The rectangular constant for two-dimensional spaces', *J. Approx. Theory* **19** (1977), 15–21.

[7] J. Desbiens, 'Sur le biais d'un espace de Banach', *Ann. Sci. Math. Québec* (to appear).

[8] C.F. Dunkl and K.S. Williams, 'A simple norm inequality', *Amer. Math. Monthly* **71** (1964), 53–54.

[9] R. Fortet, 'Remarques sur les espaces uniformément convexes', *Bull. Soc. Math. France* **67–69** (1939–41), 23–46.

[10] C. Franchetti, 'On the radial constant of real normed spaces', in *Approximation Theory III*, pp. 425–428 (Academic Press, New York, 1980).

[11] N. Gastinel and J.L. Joly, 'Condition numbers and general projection method', *Linear Algebra Appl.* **3** (1970), 185–224.

[12] O. Hanner, 'On the uniform convexity of L^p and l^p', *Ark. Mat* **3** (1955), 239–244.

[13] R.C. James, 'Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces', *Trans. Amer. Math. Soc.* **61** (1947), 265–292.

[14] R.C. James, 'Uniformly non-square banach spaces', *Ann. of Math.* **80** (1964), 542–550.

[15] J.L. Joly, 'Caractérisation d'espace hilbertien au moyen de la constante rectangle', *J. Approx. Theory* **2** (1969), 301–311.

[16] O.P. Kapoor and S.B. Mathur, 'Metric Projection Bound and the Lipschitz Constant of the Radial Retraction', *J. Approx. Theory* **38** (1983), 66-70.

[17] J.L. Massera and J.J. Schäffer, 'Linear differential equations and functional analysis', *Ann. of Math.* **67** (1958), p. 538.

[18] A. Meir, 'On the uniform convexity of L^p spaces, $1 < p \leqslant 2$', *Illinois J. Math.* **25** (1984), 420–424.

[19] C. Morales, 'Pseudo-contractive mappings and the Leray-Schauder boundary conditions', *Comment. Math. Univ. Carolin.* **20** (1979), 745–756.

[20] G. Nordlander, 'The modulus of convexity in normed linear spaces', *Ark. Mat.* **4** (1958), 15–17.

[21] M.A. Smith, 'On the Norms of Metric Projections', *J. Approx. Theory* **31** (1981), 224–229.

[22] R.L. Thele, 'Some results on the radial projection in Banach spaces', *Proc. Amer. Math. Soc.* **42** (1974), 483–486.

Département d'informatique
Collège Militaire Royal de Saint-Jean
Saint-Jean-sur-Richelieu
Québec, Canada, J0J 1R0