

UN RAFFINEMENT DU THÉORÈME DE GOLOD-SAFAREVIC

CHRISTIAN MAIRE

Abstract. Soient k un corps de nombres, p un nombre premier, et L la p -tour de Hilbert de k ; $G = \text{Gal}(L/k)$. Dans ce papier, on se propose de donner un raffinement du critère de Golod-Safarevic appliqué à G , construit en filtrant le groupe de nombres $\Lambda = \{x \in k^\times / (x) = \mathcal{O}^p\}$. Ce raffinement permettra alors de montrer qu'un corps quadratique réel dont le groupe des classes contient un sous-groupe de la forme $(4, 4, 4, 4)$, possède une 2-tour de Hilbert infinie.

§1. Introduction

Soient k un corps de nombres et p un nombre premier. Notons par L la p -extension maximale de k , non-ramifiée pour les places finies et totalement décomposée pour les places infinies; on dit que L est la p -tour de Hilbert de k ; soit G le groupe de Galois de L/k . Un problème classique est d'étudier la finitude ou non de G .

Le premier critère de non-finitude fut donné en 1964 par Golod-Safarevic [1]; il permet par exemple de montrer que dès que le 2-rang du groupe des classes d'un corps quadratique réel k est supérieur ou égal à six, alors k a une 2-tour de Hilbert infinie. Ce critère est une conséquence d'un résultat de théorie des p -groupes finis; plus précisément, Golod et Safarevic ont montré que si un p -groupe G est fini, alors on a l'inégalité

$$(1) \quad r > d^2/4,$$

où d est le p -rang de G , et où $r = d_p H_2(G, \mathbb{F}_p)$ est le nombre de relations de G (on rappelle que si A est un groupe, le p -rang de A , noté $d_p A$, est égal à la dimension sur \mathbb{F}_p de $A/A^p[A, A]$).

Deux raffinements de (1) ont alors été donné:

Le premier en 1965 par Koch et Vinberg ([5], [7], [15]); ce résultat fait intervenir les filtrations de Zassenhaus d'une représentation de G . Il permet par exemple de montrer, pour p différent de 2, que si le p -rang du groupe

Received July 16, 1996.

des classes d'un corps quadratique imaginaire k est supérieur ou égal à 3, alors la p -tour de Hilbert de k est infinie (Koch et Venkov [8]).

Le second raffinement a été donné en 1986 par Schoof [13]; il est obtenu après filtration du groupe $H_1(G, I)$, I étant l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{F}_p[G]$. Il permet alors de montrer par exemple les deux résultats suivants:

- i) Soit $p \geq 3$ et k un corps quadratique; alors si $d_p cl_k \geq 3$, k a une p -tour de Hilbert infinie [13].
- ii) Soit $p > 3$ et k un corps cubique cyclique sur \mathbb{Q} ; alors si $d_p cl_k \geq 4$, k a une p -tour de Hilbert infinie [10].

Ces deux résultats sont obtenus en utilisant l'action de $\text{Gal}(k/\mathbb{Q})$ sur certains groupes G -homologiques, en particulier la méthode utilisée ne s'applique pas lorsque $|G|$ et $[k:\mathbb{Q}]$ ne sont pas premiers entre eux.

A travers ce papier, on se propose alors de donner un autre raffinement de l'inégalité de Golod-Safarevic, obtenu en filtrant le groupe de nombres $\frac{\Lambda}{k^{\times p} N_{L/k} E_L}$, où $\Lambda = \{x \in k^\times / (x) = \mathcal{O}^p\}$ et où E_L est le groupe des unités de L (théorème 3.1).

Ce raffinement permettra alors de montrer le résultat suivant (corollaire 3.2):

*Soit k un corps quadratique **réel**; si le groupe des classes de k a un sous-groupe de la forme $(4, 4, 4, 4)$, alors k a une 2-tour de Hilbert infinie.*

Notons que ce corollaire complète le résultat de F. Hajir [3] suivant:

Soit k un corps quadratique **imaginaire**; si le groupe des classes de k contient un sous-groupe de la forme $(4, 4, 4)$, alors la 2-tour de Hilbert de k est infinie.

§2. Situation

Dans toute la suite, on suppose que le groupe $G = \text{Gal}(L/k)$ est fini. On a une filtration naturelle de G :

$$\begin{aligned} G_1 &= G, \\ G_2 &= G^p[G, G], \\ &\vdots \\ G_i &= (G_{i-1})^p[G_{i-1}, G], \quad i \geq 3; \end{aligned}$$

notons alors L_i le sous-corps de L fixé par G_i ; en particulier, $L_1 = k$.

On peut alors noter que la p -tour de Hilbert des corps L_i est égal à L .

Si l'on considère ensuite $\frac{\Lambda_i}{L_i^{\times p} N_{L/L_i} E_L}$, où $\Lambda_i = \{x \in L_i^\times / (x) = \mathcal{Q}_i^p\}$, \mathcal{Q}_i étant un idéal de L_i , on sait que l'on a alors l'isomorphisme suivant ([9], [11] chapitre 4):

$$(2) \quad \frac{\Lambda_i}{L_i^{\times p} N_{L/L_i} E_L} \xrightarrow{\sim} H_2(G_i, \mathbb{F}_p).$$

Posons alors pour $i \geq 1$,

$$(3) \quad \Delta_i = \frac{\Lambda_i}{L_i^{\times p} N_{L/L_i} E_L}.$$

On construit ensuite une filtration $(M_i)_i$ de Δ_1 de la manière suivante:

$$(4) \quad M_i = \frac{\text{Im}(\Delta_{i-1} \xrightarrow{N_{L_{i-1}/k}} \Delta_1)}{\text{Im}(\Delta_i \xrightarrow{N_{L_i/k}} \Delta_1)}, \quad i \geq 2;$$

posons $m_i = d_p M_i$; on a ainsi

$$(5) \quad \sum_{i \geq 2} m_i = r = d_p H_2(G, \mathbb{F}_p).$$

Rappelons finalement l'inégalité classique:

$$(6) \quad r - d \leq d_p E_k;$$

en particulier, si k est un corps quadratique réel, pour $p = 2$ on a:

$$(7) \quad r \leq d + 2.$$

§3. Résultats principaux

Sous les notations du paragraphe précédent, on a le théorème suivant:

THÉORÈME 3.1. *Si G est fini, on a $\forall t \in]0; 1[$,*

$$(8) \quad \sum_{i \geq 2} m_i t^i - dt + 1 > 0.$$

De ce théorème, que l'on montrera dans la paragraphe 4, on en déduit le corollaire suivant:

COROLLAIRE 3.2. *Soit k un corps quadratique réel. Si le groupe des classes cl_k de k contient un sous-groupe de la forme $(4, 4, 4, 4)$, alors la 2-tour de Hilbert de k est infinie.*

Démonstration. Notons tout d'abord que par l'inégalité de Golod-Safarevic, si $d_2 cl_k$ est supérieur ou égal à 6, alors la 2-tour de Hilbert de k est infinie.

Soit k_1 le 2-corps de Hilbert de k ; on a $k \subset L_2 \subset k_1$.

Par hypothèse, le groupe de Galois $\text{Gal}(k_1/L_2)$ contient un sous-groupe H de la forme $(2, 2, 2, 2)$; H va être engendré par quatre éléments σ_i , $i = 1, \dots, 4$.

On sait par la théorie du corps de classes, que $\sigma_i = (\mathcal{Q}_{2,i}, k_1/L_2)$, où $\mathcal{Q}_{2,i}$ est un idéal de L_2 et où $(\cdot, k_1/L_2)$ est le symbole d'Artin. On a $\mathcal{Q}_{2,i}^2 = (y_i)$, avec $y_i \in L_2$, ainsi y_i peut être vu dans Δ_2 . Regardons ensuite $N_{L_2/k} y_i$. On a alors le lemme suivant:

LEMME 3.3. *Les quatres éléments $(N_{L_2/k} y_i)_{i=1\dots 4}$ sont libres modulo $k^{\times 2} E_k$.*

Démonstration. Tout d'abord, notons que par la propriété du symbole d'Artin, on a

$$(9) \quad (\mathcal{Q}_{2,i}, k_1/L_2) = (N_{L_2/k} \mathcal{Q}_{2,i}, k_1/k),$$

car k_1/k est abélienne; ainsi, les idéaux $(N_{L_2/k} \mathcal{Q}_{2,i})_{i=1,\dots,4}$ sont libres modulo P_k . Ensuite, soient $0 \leq \theta_i < 2$, tels que

$$(10) \quad \prod_i N_{L_2/k} y_i^{\theta_i} \in k^{\times 2} E_k;$$

on a alors

$$(11) \quad \prod_i (N_{L_2/k} y_i)^{\theta_i} = (\alpha)^2,$$

avec $\alpha \in k^\times$; plus précisément, on a

$$(12) \quad \left(\prod_i (N_{L_2/k} \mathcal{Q}_{i,2})^{\theta_i} \right)^2 = (\alpha)^2,$$

i.e.

$$(13) \quad \prod_i (N_{L_2/k} \mathcal{Q}_{i,2})^{\theta_i} = (\alpha),$$

ou encore d'après (9)

$$(14) \quad \prod_i \sigma_i^{\theta_i} = 1.$$

Par l'hypothèse faite sur les σ_i , on en déduit que $\theta_i = 0$ □

De ceci, il vient alors que $d_2 \text{Im}(\Delta_2 \rightarrow \Delta_1) \geq 4$, i.e.

$$(15) \quad m_2 \leq r - 4.$$

Comme k est un corps quadratique réel, l'inégalité du théorème 3.1 avec (5), (7) et (15) donne alors:

Si G est fini, on a $\forall t \in]0; 1[$,

$$(16) \quad (d - 2)t^2 + 4t^3 - dt + 1 > 0.$$

Pour $d = 4$, le minimum de $2t^2 + 4t^3 - 4t + 1$ est atteint en $t_0 = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}$ et vaut $\frac{46-13\sqrt{13}}{27} \approx -0.032$.

Pour $d = 5$, le minimum de $3t^2 + 4t^3 - 5t + 1$ est atteint en $t_1 = \frac{-3+\sqrt{69}}{12}$ et vaut $\frac{171-23\sqrt{69}}{72} \approx -0.278$. □

REMARQUE 3.4. *De manière générale, si le groupe des classes de k contient un sous-groupe de la forme (p^2, \dots, p^2) , n fois, alors $m_2 \leq d + d_p E_k - n$.*

ILLUSTRATION NUMÉRIQUE 3.5. *On connaît à l'aide de résultats de Rédei et Reichardt [12], ou encore de Gras [2], des critères pour qu'un corps quadratique réel vérifie les hypothèses du corollaire 3.2; par exemple dans les deux cas suivants, k a une 2-tour infinie:*

- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1 * p_2 * p_3 * p_4 * p_5})$, avec $p_i \equiv 1(4)$, $\left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1, \forall i, j = 1, \dots, 5$, et la norme de l'unité fondamentale égale à -1 ;
- $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3 * p_1 * p_2 * p_3 * p_4})$, avec $p_i \equiv 1(4)$, et $\left(\frac{2}{p_i}\right) = \left(\frac{3}{p_i}\right) = \left(\frac{p_i}{p_j}\right) = 1, \forall i, j = 1, \dots, 4$.

*Ainsi les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{5 * 29 * 109 * 349 * 661})$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{3 * 73 * 97 * 673 * 1249})$ ont une 2-tour de Hilbert infinie.*

§4. Démonstration du théorème principal

4.1. Application d'un résultat de Schoof

On considère la filtration $(G_i)_i$ de G (voir §3). Notons par I_i l'idéal d'augmentation de l'algèbre $\mathbb{F}_p[G_i]$; $I_1 = I$ est l'idéal d'augmentation de $\mathbb{F}_p[G]$; on peut noter que l'on a alors ([5], [6]):

$$(17) \quad I_i \subset I^i, \quad \forall i \geq 1.$$

On a également pour tout i plus grand que 1, l'isomorphisme suivant:

$$(18) \quad H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} H_1(G_i, I_i).$$

Pour i fixé, il apparait alors la suite d'homomorphismes:

$$(19) \quad H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\sim} H_1(G_i, I_i) \xrightarrow{\text{Cor}} H_1(G, I_i) \longrightarrow H_1(G, I^i);$$

on a ainsi le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} H_2(G, \mathbb{F}_p) & \xrightarrow[\Phi]{\sim} & H_1(G, I) \\ \text{Cor}_{2,1} \uparrow & & \uparrow \\ H_2(G_2, \mathbb{F}_p) & \longrightarrow & H_1(G, I^2) \\ \text{Cor}_{3,2} \uparrow & & \uparrow \\ H_2(G_3, \mathbb{F}_p) & \longrightarrow & H_1(G, I^3) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Posons alors pour $i \geq 2$,

$$(20) \quad N_i = \frac{\text{Im}(H_2(G_{i-1}, \mathbb{F}_p) \rightarrow H_2(G, \mathbb{F}_p))}{\text{Im}(H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \rightarrow H_2(G, \mathbb{F}_p))},$$

et finalement, considérons $\Phi(N_i)$, l'image de N_i par Φ dans $H_1(G, I)$; $n_i = d_p N_i$.

Reprenant alors la démonstration du théorème 2.1 de [13], on en déduit la proposition suivante:

PROPOSITION 4.1. On a $\forall t \in]0; 1[$,

$$(21) \quad \sum_{i \geq 2} n_i t^i - dt + 1 \geq \frac{1}{P(t)}$$

où $P(t) = 1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots$, avec $a_i = d_p \frac{I^i}{I^{i+1}}$.

4.2. Interprétation de N_i

A partir de la proposition 4.1, pour montrer le théorème 3.1, il suffit de montrer la proposition suivante qui relie N_i à M_i :

PROPOSITION 4.2. On a pour tout $i \geq 2$,

$$(22) \quad M_i \simeq N_i,$$

i.e.

$$(23) \quad \frac{\text{Im}(H_2(G_{i-1}, \mathbb{F}_p) \rightarrow H_2(G, \mathbb{F}_p))}{\text{Im}(H_2(G_i, \mathbb{F}_p) \rightarrow H_2(G, \mathbb{F}_p))} \simeq \frac{\text{Im}(\Delta_{i-1} \xrightarrow{N_{L_{i-1}/k}} \Delta_1)}{\text{Im}(\Delta_i \xrightarrow{N_{L_i/k}} \Delta_1)}.$$

On voit en fait qu'il suffit de montrer que l'on a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Delta_1 & \xrightarrow{\sim} & H_2(G, \mathbb{F}_p) & \xrightarrow[\Phi]{\sim} & H_1(G, I) \\
 \uparrow N_{L_2/k} & & \uparrow \text{Cor}_{2,1} & & \uparrow \\
 \Delta_2 & \xrightarrow{\sim} & H_2(G_2, \mathbb{F}_p) & \longrightarrow & H_1(G, I_1^2) \\
 \uparrow N_{L_3/L_2} & & \uparrow \text{Cor}_{3,2} & & \uparrow \\
 \Delta_3 & \xrightarrow{\sim} & H_2(G_3, \mathbb{F}_p) & \longrightarrow & H_1(G, I_1^3) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Pour ceci, on voit qu'il suffit de montrer alors la proposition suivante:

PROPOSITION 4.3. *Pour tout $i \geq 2$, le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_{i-1} & \xrightarrow[\Theta_{i-1}]{\sim} & H_2(G_{i-1}, \mathbb{F}_p) \\
 \uparrow N_{L_i/L_{i-1}} & & \uparrow \text{Cor}_{i,i-1} \\
 \Delta_i & \xrightarrow[\Theta_i]{\sim} & H_2(G_i, \mathbb{F}_p)
 \end{array}$$

On se contentera de démontrer cette proposition pour $i = 2$; il suffira ensuite de remarquer que la démonstration reste encore valable pour i quelconque.

Tout d’abord quelques notations: \bar{k} désignera une p -clôture algébrique de k , et par conséquent des L_i ; on notera alors par \bar{G}_i le groupe de Galois $\text{Gal}(\bar{k}/L_i)$; $\bar{G}_1 = \bar{G} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$; H désignera le groupe $\text{Gal}(\bar{k}/L)$, en particulier H est engendré par les groupes d’inertie absolus des places finies de k , et par les groupes de décomposition absolus des places infinies.

A cause de l’hypothèse faite sur L/k , on a pour N assez grand

$$(24) \quad H = \bar{G}_N \subset \dots \subset \bar{G}_{i+1} \subset \bar{G}_i \subset \dots \subset \bar{G}_1 = \bar{G}.$$

Avant de montrer la proposition 4.3, on montre le lemme suivant:

LEMME 4.4. *On a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc}
 \Delta_1 & \xrightarrow{\Psi_1} & \frac{H}{H^p[\bar{G}, H]} \\
 \uparrow N_{L_2/k} & & \uparrow \text{Res}_{2,1} \\
 \Delta_2 & \xrightarrow{\Psi_2} & \frac{H}{H^p[\bar{G}_2, H]}
 \end{array}$$

Démonstration. Rappelons tout d’abord la description de Ψ_1 :

$$(25) \quad \Psi_1 : \Delta_1 \longrightarrow \frac{H}{H^p[\bar{G}, H]}$$

Soit $x \in \Delta_1$; il existe alors $j = (j_v)_v \in \mathcal{J}_k$, \mathcal{J}_k étant le groupe des idèles de k , et $y = (y_v)_v \in \prod_v U_{k_v} \hookrightarrow \mathcal{J}_k$, U_{k_v} étant le groupe des unités de k_v , tels que

$$(26) \quad x = yj.$$

Notons ensuite par ρ_1 l'homomorphisme construit sur $\prod_v U_{k_v}$, et à valeur dans $\frac{H}{H^p[\bar{G}, H]}$, défini comme suit ([9], [11]):

$$(27) \quad \rho_1(y) = \prod_v (y_v, \bar{k}_v/k) \text{ mod } H^p[\bar{G}, H],$$

$(\cdot, \bar{k}_v/k)$ étant le symbole de réciprocité local.

Tout ceci est parfaitement défini, et de plus, $\rho_1(N_{L/k}E_L) = 1$.

On a alors

$$(28) \quad \Psi_1(x) = \rho_1(y).$$

On construit de même, pour $i \geq 2$, $\Psi_i : \Delta_i \longrightarrow \frac{H}{H^p[\bar{G}_i, H]}$.

Montrons alors que le diagramme du lemme 4.4 est commutatif:

Soit $x_2 \in \Delta_2$, $x_2 = y_2 j_2$, avec $y_2 = (y_{2v})_v \in \prod_v U_{L_{2v}}$, et $j_2 \in \mathcal{J}_{L_2}$; alors d'après (29), on a:

$$(29) \quad \Psi_2(x_2) = \rho_2(y_2) = \prod_v (y_{2v}, \bar{k}_v/L_2) \text{ mod } H^p[\bar{G}_2, H].$$

Ainsi, il vient:

$$(30) \quad (Res_{2,1} \circ \Psi_2)(x_2) = \Psi_2(x_2) \text{ mod } H^p[\bar{G}, H]$$

$$(31) \quad = \rho_2(y_2) \text{ mod } H^p[\bar{G}, H]$$

$$(32) \quad = \rho_1(N_{L_2/k}y_2) \quad ([9], [11])$$

$$(33) \quad = \Psi_1(N_{L_2/k}x_2)$$

□

REMARQUE 4.5. Par construction de ρ_i , le diagramme suivant est commutatif pour tout $i \geq 1$ ([9], [11]):

$$\begin{array}{ccc} H_2(G_i, \mathbb{F}_p) & \xleftarrow{\phi_i} & \frac{H}{H^p[\bar{G}_i, H]} \\ \Theta_i \swarrow & & \nearrow \Psi_i \\ & \Delta_i & \end{array}$$

Notons ensuite le résultat homologique suivant (qui se voit bien après passage au dual):

LEMME 4.6. *On a le diagramme commutatif suivant:*

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{H}{H^p[\overline{G}_2, H]} & \xrightarrow{\text{Res}_{2,1}} & \frac{H}{H^p[\overline{G}, H]} \\
 \uparrow \phi_2 & & \uparrow \phi_1 \\
 H_2(G_2, \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\text{Cor}_{2,1}} & H_2(G, \mathbb{F}_p)
 \end{array}$$

On peut alors montrer la proposition 4.3: Soit $x \in \Delta_2$; on veut montrer que $y = (\Theta_1^{-1} \circ \text{Cor}_{2,1} \circ \Theta_2)(x)$ est égal à $N_{L_2/k}x$:

$$\begin{aligned}
 y &= (\Theta_1^{-1} \circ \text{Cor}_{2,1} \circ \Theta_2)(x) \\
 &\iff \Theta_1(y) = (\text{Cor}_{2,1} \circ \Theta_2)(x) \\
 &\iff (\phi_1 \circ \Theta_1)(y) = (\phi_1 \circ \text{Cor}_{2,1} \circ \Theta_2)(x) \quad (\text{car } \phi_1 \text{ est injectif}) \\
 &\iff (\phi_1 \circ \Theta_1)(y) = (\text{Res}_{2,1} \circ \phi_2 \circ \Theta_2)(x) \quad (\text{lemme 4.6}) \\
 &\iff \Psi_1(y) = (\text{Res}_{2,1} \circ \phi_2 \circ \Theta_2)(x) \quad (\text{remarque 4.5}) \\
 &\iff \Psi_1(y) = (\text{Res}_{2,1} \circ \Psi_2)(x) \quad (\text{remarque 4.5}) \\
 &\iff \Psi_1(y) = \Psi_1(N_{L_2/k}x) \quad (\text{lemme 4.4}) \\
 &\iff y = N_{L_2/k}x \quad (\text{car } \Psi_1 \text{ est injectif})
 \end{aligned}$$

□

REFERENCES

- [1] E.-S. Golod et I.-R. Safarevic, *On Class Field Towers*, Izv. Ak. SSSR (1964), 273–276, (russian); AMS Translations, **48** (1965), 91–102.
- [2] G. Gras, *Sur les l-classes d'idéaux dans les extensions cycliques relatives de degré premier l*, Ann. Inst. Fourier, **23** 4 (1973), 1–44.
- [3] F. Hajir, *On a theorem of Koch*, Pacific J. Math., **176** (1996), 15–18.
- [4] H. Koch, *Über den 2-Klassenkörperturm eines quadratischen Zahlkörper I*, J. Reine Angew. Math., **214/215** (1964), 201–206.
- [5] H. Koch, *Galoissche Theorie der p-Erweiterungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1970.
- [6] H. Koch, *Number theory II*, EMS 62, Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [7] H. Koch, *Zum Satz von Golod-Schafarewitsch*, Math. Nachr., **42** (1969), 321–333.
- [8] H. Koch et B. Venkov, *Über den p-Klassenkörperturm eines imaginär quadratischen Zahlkörpers*, Astérisque, **24/25** (1975), 57–67.
- [9] C. Maire, *Extensions T-ramifiées modérées, S-décomposées*, Thèse, Faculté des Sciences de Besançon (1995).

- [10] C. Maire, *Tours de Hilbert des extensions cubiques cycliques sur \mathbb{Q}* , Manuscripta Math., à paraître.
- [11] C. Maire, *Compléments à un résultat de Safarevic*, Math. Nachrichten, à paraître.
- [12] L. Rédei et H. Reichardt, *Die Anzahl der durch 4 teilbaren Invarianten der Klassengruppe eines beliebigen quadratischen Zahlkörpers*, J. reine angew. Math., **170** (1933), 69–74.
- [13] R. Schoof, *Infinite class field towers of quadratic fields*, J. reine angew. Math., **372** (1986), 209–220.
- [14] J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Springer-Verlag, 1995.
- [15] E.-B. Vinberg, *On the dimension theorem of associative algebras*, Izv. Ak. Nauk. SSSR, **29** (1965), 209–214, (russian).

*Laboratoire de Mathématiques-UMR 6623
Université de Besançon
16, route de Gray
25000 Besançon*