Canad. Math. Bull. Vol. **44** (2), 2001 pp. 129–139

Linéarisation symplectique en dimension 2

Carlos Currás-Bosch

Abstract. In this paper the germ of neighborhood of a compact leaf in a Lagrangian foliation is symplectically classified when the compact leaf is $\mathbb{T}^2$, the affine structure induced by the Lagrangian foliation on the leaf is complete, and the holonomy of $\mathbb{T}^2$ in the foliation linearizes. The germ of neighborhood is classified by a function, depending on one transverse coordinate, this function is related to the affine structure of the nearly compact leaves.

Introduction

Dans cet article on se propose de continuer l'étude du germe de feuilletage Lagrangien au voisinage d'une feuille compacte d'un feuilletage Lagrangien, entreprise dans [1], [2], [3], [4]. De façon générale, soient $(M^{2n}, \Omega, \mathcal{L})$ une variété symplectique munie d'un feuilletage Lagrangien $\mathcal{L}$, et L_0 une feuille compacte de $\mathcal{L}$, on sait [11] que L_0 est munie d'une connexion affine plate ∇_0, et c'est le couple (L_0, ∇_0) qui sera pour nous à proprement parler la feuille du feuilletage Lagrangien. On identifiera, toujours suivant [11], un voisinage ouvert U de L_0 dans (M, Ω) à un voisinage ouvert U_0 de la section nulle dans (T^*L_0, Ω_0). Dans (T^*L_0, Ω_0), la connexion ∇_0 définit un nouveau feuilletage Lagrangien $\mathcal{L}_0$: si $(q^1, \dots, q^n)$ est un système de coordonnées locales affines sur L_0, dans les coordonnées correspondantes (q^i, p_i) de T^*L_0, $\mathcal{L}_0$ sera défini par $\{dp_i = 0\}$. Dans $U_0 = U$, on aura deux feuilletages Lagrangiens, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_0$, admettant tous deux (L_0, ∇_0) comme feuille. On dit que $\mathcal{L}_0$ est le *linéarisé symplectique* de $\mathcal{L}$ au voisinage de L_0, et on dit que $\mathcal{L}$ est *symplectiquement linéarisable* au voisinage de L_0 s'il est symplectiquement équivalent à son linéarisé. Une condition nécessaire est bien entendu que les deux feuilletages aient la même dynamique, c.a.d. la même holonomie.

L'holonomie linéaire de L_0, dans $\mathcal{L}$ comme dans $\mathcal{L}_0$, correspond via la dualité symplectique à l'holonomie de la connexion ∇_0 [5]; comme d'autre part l'holonomie de L_0 dans $\mathcal{L}_0$ est linéaire on s'interessera, en particulier, *au cas où l'holonomie de L_0 dans $\mathcal{L}$ est linéarisable.*

Rappelons ce qu'on connait autour de ça:

Si ∇_0 est sans holonomie, (L_0, ∇_0) est un tore plat. L'hypothèse de linéarisation de l'holonomie signifie que $\mathcal{L}$ est simple; on se trouve alors dans les conditions du Théorème d'Arnold-Liouville, et le feuilletage Lagrangien est symplectiquement linéarisable.

Si $n = 1$, l'hypothèse de linéarisation de l'holonomie suffit pour conclure que le feuilletage Lagrangien est symplectiquement linéarisable, vid. [8] ou [4].

Reçu par les éditeurs le 3 juin, 1999; revisée le 6 avril, 2000.
Classification (AMS) par sujet: 53C12, 58F05.
Mots clés: symplectic manifold, Lagrangian foliation, affine connection.

En dimension 4 ($n = 2$), on a vu [3], [4] que dans le cas $(L_0, \nabla_0) = (\mathbb{T}^2, \nabla_{NY})$, ∇_{NY} étant la structure affine plate complète à holonomie entière décrite par N. Kuiper [6] et T. Nagano-K. Yagi [9], les germes de feuilletage Lagrangien au voisinage de $(\mathbb{T}^2, \nabla_{NY})$ à holonomie linéarisable sont classifiés, à symplectomorphisme près, par les germes à l'origine de fonctions d'une coordonnée transverse, chacun de ces germes de fonction ayant une signification géométrique trés claire comme invariant de la structure affine des feuilles compactes voisines.

Dans ce papier on va donner une méthode qui permettra de résoudre le problème de linéarisation symplectique pour toutes les feuilles Lagrangiennes compactes $(\mathbb{T}^2, \nabla)$, à holonomie linéarisable, ∇ étant une connexion affine plate complète. La méthode va consister à utiliser une 1-forme différentielle primitive de la 2-forme symplectique, dans un voisinage ouvert de la section zéro de $T^*\mathbb{T}^2$, on va l'exprimer en termes de 1-formes différentielles adaptées au problème et on va arriver à l'expression la plus simple possible dans laquelle leurs coefficients vont classifier, à symplectomorphisme préservant le feuilletage près, le voisinage de la feuille donnée.

Dans §2 on considère le cas où ∇ est une connexion affine plate complète à holonomie entière et on donne une démonstration, en utilisant cette technique de la primitive, plus simple que celle obtenue dans [4], du théorème de détermination du germe de feuilletage Lagrangien. De manière similaire on trouve dans Section 3 un théorème de détermination pour le cas où ∇ est la connexion affine plate complète à holonomie irrationelle.

L'étude des germes de feuilletages Lagrangiens a été entreprise avec P. Molino depuis quelque temps; je veux le remercier de son aide pendant la réalisation de ce travail.

1 Préliminaires

Dorénavant la feuille compacte est $L_0 = \mathbb{T}^2$; soit ∇_0 une connexion affine plate de $\mathbb{T}^2$. Il faut rappeller des résultats bien connus sur les structures affines plates complètes et non-triviales sur $\mathbb{T}^2$:

Les deux structures affines plates complètes et non triviales sur $\mathbb{T}^2$ sont, suivant N. Kuiper [6]:

La structure entière On peut la décrire au moyen de son parallélisme intégrable local donné par un couple de champs de vecteurs, qui est dans ce cas

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^2} - a\theta^2 \frac{\partial}{\partial\theta^1} \right\},$$

le second étant multi-valué. La constante a est le seul invariant pour cette structure affine.

La structure irrationelle Cette structure est donnée, comme dans le cas antérieur par le couple de champs de vecteurs parallèles

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial\theta^2} - b\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^1} - a(\theta^1 + b\theta^2) \left(\frac{\partial}{\partial\theta^2} - b\frac{\partial}{\partial\theta^1} \right) \right\},$$

où $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, et a et b sont les seuls invariants pour ce type de structure.

Pour simplifier on va se référer à la structure entière comme ∇_{NY} et à l'irrationelle comme ∇_{irr}.

On va donner *le feuilletage Lagrangien linéaire associée à ces structures affines*:

Dans $(T^*\mathbb{T}^2, \Omega_0)$, le feuilletage Lagrangien linéarisé associé à ∇_{NY} est donné, en utilisant les coordonnées standard du cotangent $\{u, v, \theta^1, \theta^2\}$, par:

$$d\left(\left\langle ud\theta^1 + vd\theta^2, \frac{\partial}{\partial\theta^1}\right\rangle\right) = d\left(\left\langle ud\theta^1 + vd\theta^2, \frac{\partial}{\partial\theta^2} - a\theta^2\frac{\partial}{\partial\theta^1}\right\rangle\right) = 0,$$

$\mathcal{L}_0$, qui va être noté dans ce cas $\mathcal{L}_{NY}$, est:

$$du = dv - uad\theta^2 = 0.$$

Une expression globale de la distribution correspondant à $\mathcal{L}_{NY}$, est:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \frac{\partial}{\partial\theta^2} + ua\frac{\partial}{\partial v}\right).$$

Observons finalement qu'on peut écrire Ω_0 comme:

$$\Omega_0 = d\theta^1 \wedge du + d\theta^2 \wedge dv = d\theta^1 \wedge du + d\theta^2 \wedge (dv - uad\theta^2).$$

Dans le cas ∇_{irr} on voit que $\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$ est

$$d(v - bu) = du - a(v - bu)(d\theta^1 + bd\theta^2) = 0,$$

et Ω_0 s'écrit:

$$\Omega_0 = d\theta^1 \wedge du + d\theta^2 \wedge dv = (d\theta^1 + bd\theta^2) \wedge du + d\theta^2 \wedge (dv - bdu).$$

Comme dans le cas antérieure une expression globale de la distribution correspondant au feuilletage est:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1} + av\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial\theta^2} - b\frac{\partial}{\partial\theta^1}\right).$$

Pour étudier le problème de linéarisation symplectique en ces deux cas, on peut se placer dans $(T^*\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_0)$ et essayer de décrire toutes les formes symplectiques Ω dans un voisinage ouvert de la section zero $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$, telles que $\mathcal{L}_0$ soit Lagrangien. On sait, Lemme de Poincaré (vid. [10] ou [7]), qu'il existe une 1-forme différentielle ϕ, définie dans un certain voisinage ouvert de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$, telle que $\Omega = d\phi$, ϕ s'annulant sur $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$.

Premièrement on va se placer dans le cas $(T^*\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_{NY})$, il est convenable d'utiliser la base de 1-formes, adaptées au feuilletage:

$$(d\theta^1, d\theta^2, du, dv - uad\theta^2)$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-017-2 Published online by Cambridge University Press

et son repère dual

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \eta = \frac{\partial}{\partial\theta^2} + ua\frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)$$

et Ω s'écrit:

$$\Omega = d\phi = d\big(Ad\theta^1 + Bd\theta^2 + Cdu + D(dv - aud\theta^2)\big),$$

où A, B, C, D sont des fonctions définies dans un voisinage de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$, s'annulant quand $u = v = 0$. Du fait que $\mathcal{L}_{NY}$ est Lagrangien on a $\eta(A) = \frac{\partial B}{\partial\theta^1}$ et comme les fonctions coefficients A, B, C et D s'annulent sur la feuille zero, on voit facilement que la 2-forme différentielle

$$\bar{\Omega} = d(Ad\theta^1 + Bd\theta^2)$$

est symplectique dans un certain voisinage ouvert de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$. Une application de la « méthode du chemin » va nous donner:

Lemme 1.1 *Il existe un symplectomorphisme, préservant le feuilletage $\mathcal{L}_{NY}$, d'un voisinage ouvert U de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \Omega)$ dans un autre voisinage ouvert V de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \bar{\Omega})$.*

Preuve On considère $\Omega - \bar{\Omega} = d\big(Cdu + D(dv - aud\theta^2)\big)$. On voit facilement que $\Omega_t = \bar{\Omega} + t(\Omega - \bar{\Omega})$ est symplectique, $\forall t \in [0, 1]$, dans un voisinage de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$. Pour tout $t \in [0, 1]$ le champ de vecteurs ξ_t tel que

$$i_{\xi_t}\Omega_t = -\big(Cdu + D(dv - aud\theta^2)\big)$$

est tangent à $\mathcal{L}_{NY}$. En outre, comme $Cdu + Dd(v - aud\theta^2)$ est nul sur $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$, ξ_t est intégrable et on obtient une famille de difféomorphismes ψ_t, préservant $\mathcal{L}_{NY}$, définis dans un voisinage de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$, et $\psi_1^*\Omega = \bar{\Omega}$. ∎

On peut donc prendre comme expression de la forme symplectique dans un voisinage de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$

$$\Omega = d(Ad\theta^1 + Bd\theta^2).$$

Deuxièmement, dans le cas $(T^*\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_{\mathrm{irr}})$, on va utiliser comme repère des 1-formes différentielles

$$\{d\theta^1 + bd\theta^2, d\theta^2, dU - aV(d\theta^1 + bd\theta^2), dV\},$$

et son repère dual

$$\left\{\nu = \frac{\partial}{\partial\theta^1} + aV\frac{\partial}{\partial U}, \xi = \frac{\partial}{\partial\theta^2} - b\frac{\partial}{\partial\theta^1}, \frac{\partial}{\partial U}, \frac{\partial}{\partial V}\right\},$$

où on a fait $U = u$ et $V = v - bu$. On écrit

$$\Omega = d\Big(A(d\theta^1 + bd\theta^2) + Bd\theta^2 + C\big(dU - aV(d\theta^1 + bd\theta^2)\big) + DdV\Big),$$

https://doi.org/10.4153/CMB-2001-017-2 Published online by Cambridge University Press

où A, B, C et D sont des fonctions s'annulant sur $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$. Comme $\mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$ est Lagrangien on a $\xi(A) = \nu(B)$ et comme pour le cas entier on a la 2-forme

$$\bar{\Omega} = d\big(A(d\theta^1 + bd\theta^2) + Bd\theta^2\big)$$

qui est symplectique dans un voisinage ouvert de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ et on peut prouver de manière similaire au cas antérieur:

Lemme 1.2 *Il existe un symplectomorphisme, préservant le feuilletage $\mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$, d'un voisinage ouvert U de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \Omega)$ dans un autre voisinage ouvert V de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \bar{\Omega})$.*

Dans ce cas on peut donc prendre comme expression de la forme symplectique, dans un voisinage de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$:

$$\Omega = d\big(A(d\theta^1 + bd\theta^2) + Bd\theta^2\big)\,.$$

2 Linéarisation symplectique, cas entier

On peut se restreindre (Lemme 1.1) à un voisinage ouvert de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_{NY})$ et écrire Ω:

$$\Omega = d(Ad\theta^1 + Bd\theta^2).$$

En outre, comme $\mathcal{L}_{NY}$ est Lagrangien, $\eta(A) = \frac{\partial B}{\partial \theta^1}$.

On va procéder à la simplification des expressions des fonctions coefficients A et B:

$$A = A_0(\theta^2, u, v) + \frac{\partial \bar{A}}{\partial \theta^1}$$

en introduisant cette expression dans Ω on a

$$\Omega = d\left(A_0 d\theta^1 + d(\bar{A}) + \big(B - \eta(\bar{A})\big)\, d\theta^2 - \frac{\partial \bar{A}}{\partial u} du - \frac{\partial \bar{A}}{\partial v}(dv - aud\theta^2)\right)$$

et en appliquant Lemme 1.1 on arrive à

$$\Omega = d\big(A_0(\theta^2, u, v)d\theta^1 + B_0 d\theta^2\big)\,,$$

A_0 et B_0 s'annulant aussi sur la feuille zéro.

La condition $\eta\big(A_0(\theta^2, u, v)\big) = \frac{\partial B_0}{\partial \theta^1}$ nous amène à $\frac{\partial B_0}{\partial \theta^1} = 0$, c'est à dire $B_0 = B_0(\theta^2, u, v)$ et $\eta(A_0) = 0$, *i.e.*, A_0 est une fonction basique pour le feuilletage $\mathcal{L}_{NY}$. On peut donc écrire $A_0 = u \cdot \hat{u}$.

On considère le difféomorphisme préservant $\mathcal{L}_{NY}$, donné par

$$(\theta^1, \theta^2, u, v) \longrightarrow (\theta^1, \theta^2, u \cdot \hat{u}, v \cdot \hat{u})$$

et Ω devient

$$\Omega = d\big(ud\theta^1 + \widetilde{B}(\theta^2, u, v)d\theta^2\big)\,.$$

À ce moment on peut observer que le champ de vecteurs hamiltonien H_u n'est autre que $\frac{\partial}{\partial\theta^1}$; on a une action Hamiltonienne de S^1 tangente au feuilletage:

Proposition 2.1 **[4]** *Si $(M^4, \Omega, \mathcal{L})$ est une variété symplectique, à dimension 4, munie d'un feuilletage Lagrangien $\mathcal{L}$, ayant une feuille compacte à holonomie linéarisable $(\mathbb{T}^2, \nabla_{NY})$. L'action par translations de S^1 sur cette feuille se prolonge de façon unique, dans un voisinage de la feuille, en une action Hamiltonienne libre de S^1, tangente au feuilletage.*

On va simplifier maintenant l'expression de $\widetilde{B}$: on écrit

$$\widetilde{B}(\theta^2, u, v) = \gamma(v) + au\frac{\partial\Gamma(u, v)}{\partial v} + \frac{\partial\hat{B}}{\partial\theta^2},$$

et alors on peut re-écrire $\widetilde{B}$ comme

$$\widetilde{B} = \gamma(v) + \eta(\Gamma) + \frac{\partial\hat{B}}{\partial\theta^2}.$$

En introduisant ça dans l'expression de Ω, et en appliquant une autre fois Lemme 1.1, on arrive à

$$\Omega = d\left(ud\theta^1 + \gamma(v)d\theta^2 + \frac{\partial\hat{B}}{\partial\theta^2}d\theta^2\right).$$

On a donc obtenu:

$$\Omega = d\big(ud\theta^1 + \gamma(v)d\theta^2 + B(\theta^2, u, v)d\theta^2\big),$$

où $B = \frac{\partial\hat{B}}{\partial\theta^2}$.

La partie finale de la simplification de l'expression de Ω consiste à prouver:

Lemme 2.1 *Il existe une fonction C^∞, $h(\theta^2, u, v)$, telle que $\eta(h) = B$.*

Preuve On va faire la démonstration en deux étapes:

a) On cherche une fonction $l(\theta^2, u, v)$ telle que $B - \eta(l)$ aura un jet infini nul le long de $u = 0$.
b) Pour toute fonction $g(\theta^2, u, v)$ ayant un jet infini nul le long de $u = 0$ on cherche une fonction $f(\theta^2, u, v)$, telle que $\eta(f) = g$, ce qui va achever la preuve du Lemme.

a) On considère le développement de Taylor en u de $B(\theta^2, u, v)$:

$$B(\theta^2, u, v) = b_0(\theta^2, v) + ub_1(\theta^2, v) + u^2 b_2(\theta^2, v) + \cdots,$$

le développement de l est « a priori »

$$l = l_0(\theta^2, v) + ul_1(\theta^2, v) + u^2 l_2(\theta^2, v) + \cdots.$$

On veut que $\eta(l)$ et B aient la même série de Taylor en u et on obtient par récurrence la série de Taylor de l le long de $u = 0$.

On va voir maintenant l'existence d'une fonction l ayant la série de Taylor obtenue. On se ramène au révêtement universel $\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2, (t_2, u, v)\big)$ de $\big(S^1 \times \mathbb{R}^2, (\theta^2, u, v)\big)$, et on y relève l'antérieur développement. On considère trois sous-ensembles fermés dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$:

$$C_1 = \{(0, u, v)\}, \quad C_2 = \{(t_2, 0, v)\}, \quad C_3 = \{(1, u, v)\}.$$

A partir du jet de l le long de $\{(0, 0, v)\}$ on peut construire une fonction f_1, définie dans un voisinage de C_1, telle que les jets de l et de f_1 coïncident sur $\{(0, 0, v)\}$. On prend $f_3(t_2, u, v) = f_1(t_2 - 1, u, v)$ et on a une fonction dans un voisinage de C_3 telle que son jet en $\{(1, 0, v)\}$ coïncide avec celui de l. On peut alors obtenir, par le Théorème de prolongement de Whitney, une fonction F définie dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$, telle que son jet sur C_1 est celui de f_1, sur C_2 est celui de l et sur C_3 est celui de f_3. On définit finalement la fonction périodique en t_2, $l(t_2, u, v) = F(t_2 - [t_2], u, v)$, qui vérifie a).

b) On peut appliquer la démonstration dans [4, p. 207], pour obtenir la fonction f. ■

On a donc

$$\Omega = d\Big(ud\theta^1 + \big(\gamma(v) + \eta(h)\big)\, d\theta^2\Big),$$

en utilisant Lemme 1.1, on arrive à

$$\Omega = d\big(ud\theta^1 + \gamma(v)d\theta^2\big).$$

Il reste, pour la résolution du problème de linéarisation symplectique dans le cas entier à prouver le

Théorème 2.1 *Les germes de feuilletage Lagrangien au voisinage d'une feuille compacte* $(\mathbb{T}^2, \nabla_{NY})$*, à holonomie linéarisable, sont classifiés à symplectomorphisme près, par les germes à l'origine de fonctions* $\gamma(v)$ *d'une variable, avec* $\gamma(0) = 0$.

Preuve On a déjà vu qu'un voisinage ouvert d'une telle feuille est équivalent à un voisinage ouvert de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \Omega, \mathcal{L}_{NY})$, avec $\Omega = d\big(ud\theta^1 + \gamma(v)d\theta^2\big)$, ce qui reste à voir est que le germe à l'origine de $\gamma(v)$ détermine ce voisinage feuilleté. Tout difféomorphisme préservant $\mathcal{L}_{NY}$ et la fonction u associée à l'action Hamiltonienne de S^1 est de la forme:

$$(\theta^1, \theta^2, u, v) \longrightarrow (\Theta^1, \Theta^2, u, V).$$

Où Θ^1, Θ^2, V sont des fonctions de $(\theta^1, \theta^2, u, v)$.

On peut écrire V sous la forme:

$$V = \phi(v) + uF(\theta^1, \theta^2, u, v).$$

La condition de préserver $\mathcal{L}_{NY}$ s'écrit

$$\phi'(v) + u\frac{\partial F}{\partial v} - au\frac{\partial \Theta^2}{\partial v} = \left(-\frac{1}{a}\right)\frac{\partial F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \Theta^2}{\partial \theta^2}.$$

Sur $u = 0$, ça donne

$$\frac{\partial \Theta^2}{\partial \theta^2} = \phi'(v) + \frac{1}{a}\frac{\partial F}{\partial \theta^2},$$

en consequence, dans $(u = 0)$ on a:

$$\Theta^2 = \phi'(v)\theta^2 + \frac{1}{a}F(\theta^1, \theta^2, 0, v) + \rho(\theta^1, 0, 0, v).$$

Alors $\phi'(v) \equiv 1$, c'est à dire $V = v + uF(\theta^1, \theta^2, u, v)$, et on observe finalement que les feuilles de $\mathcal{L}_{NY}$ correspondantes à $u = 0$, $v = v_0$, sont des tores à structure affine plate entière d'invariant $a \cdot \gamma'(v)$ (où $\gamma'(0) = 1$); *conclusion* $\gamma(v)$ *détermine le germe de feuilletage Lagrangien.* ■

3 Linéarisation symplectique, cas irrationel

On rappelle que dans $(T^*\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_{\mathrm{irr}})$ on utilise comme repère des 1-formes différentielles

$$\left(d\theta^1 + bd\theta^2, d\theta^2, dU - aV(d\theta^1 + bd\theta^2), dV\right),$$

où $U = u$ et $V = v - bu$. Son repère dual s'écrit:

$$\left(\nu = \frac{\partial}{\partial \theta^1} + aV\frac{\partial}{\partial U}, \xi = \frac{\partial}{\partial \theta^2} - b\frac{\partial}{\partial \theta^1}, \frac{\partial}{\partial U}, \frac{\partial}{\partial V}\right).$$

$\mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$ est donné par

$$dU - aV(d\theta^1 + bd\theta^2) = dV = 0.$$

L'expression de la forme symplectique canonique est:

$$\Omega_0 = (d\theta^1 + bd\theta^2) \wedge dU + d\theta^2 \wedge dV,$$

et en vertu du Lemme 1.2 on peut se restreindre à un voisinage ouvert de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \mathcal{L}_{\mathrm{irr}})$ et écrire Ω en la forme:

$$\Omega = d\left(A(d\theta^1 + bd\theta^2) + Bd\theta^2\right).$$

Dorénavant et pour simplifier les notations on va remplacer U par u et V par v.

Remarque 3.1 Si $v = 0$ les feuilles de $\mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$ sont des tores $v = 0$, $u = u_0$; pour $v = v_0 \neq 0$ les feuilles sont des plans tels que l'adhérence de chaque feuille est la sous-variété de dimension 3, $v = v_0$, toute entière. En particulier, tout difféomorphisme préservant $\mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$ pourra s'écrire, dans un voisinage de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ en la forme:

$$(\theta^1, \theta^2, u, v) \longrightarrow (\Theta^1, \Theta^2, \bar{u}, \bar{v}),$$

où Θ^1, Θ^2, $\bar{u}$ sont des fonctions de $(\theta^1, \theta^2, u, v)$ et $\bar{v} = \bar{v}(v)$.

On va procéder comme dans Section 2 à la simplification des fonctions coefficients A et B. La condition d'être $\mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$ Lagrangien nous dit:

$$\xi(A) = \nu(B).$$

On peut poser:

$$A = A_0(u, v) + \hat{A}(\theta^1, \theta^2, u, v), \quad B = B_0(u, v) + \hat{B}(\theta^1, \theta^2, u, v);$$

où A_0 et B_0 sont les parties « constantes » des développements de Fourier de A et B respectivement. La condition $\xi(A) = \eta(B)$, donne $B_0 = \hat{v}(v)$, avec $\hat{v}(0) = 0$, et on peut écrire $\hat{v} = v \cdot \bar{v}$.

En utilisant le difféomorphisme, préservant $\mathcal{L}_{\mathrm{irr}}$, défini dans un voisinage de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ par

$$(\theta^1, \theta^2, u, v) \longrightarrow (\theta^1, \theta^2, u \cdot \bar{v}, v \cdot \bar{v}),$$

on arrive à

$$\Omega = d\Big(\big(A_0(u, v) + \widetilde{A}\big)\,(d\theta^1 + b d\theta^2) + (v + \widetilde{B}) d\theta^2 \Big),$$

mais $A_0(u, v) = h_0(u) + av\frac{\partial\Gamma(u,v)}{\partial u} = h_0(u) + \eta(\Gamma)$ et du Lemme 1.2 on déduit:

$$\Omega = d\Big(\big(h_0(u) + \widetilde{A}\big)\,(d\theta^1 + b d\theta^2) + (v + \widetilde{B}) d\theta^2 \Big),$$

avec $\xi(\widetilde{A}) = \eta(\widetilde{B})$.

Lemme 3.1 *Si $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, n'est pas un nombre de Liouville, on peut trouver une fonction $f(\theta^1, \theta^2, u, v)$, définie dans un voisinage de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ telle que $\xi(h) = \widetilde{B}$.*

Preuve On considère le développement de Fourier de $\widetilde{B}$

$$\widetilde{B}(\theta^1, \theta^2, u, v) = \sum_{n,m \neq 0} b_{nm}(u, v) e^{in\theta^1} e^{im\theta^2}.$$

Le développement de Fourier de h doit être:

$$\sum_{n,m \neq 0} \left(\frac{1}{i(m - bn)} \right) b_{nm}(u, v) e^{in\theta^1} e^{im\theta^2},$$

et si b n'est pas de Liouville on peut prouver la convergence de ce développement, ce qui donne h, et on démontre que h est C^∞. ■

En utilisant Lemme 1.2, on a

$$\Omega = d\Big(\big(A_0(u, v) + \widetilde{A} - \eta(h)\big)\,(d\theta^1 + b d\theta^2) + v d\theta^2 \Big).$$

On fait $\hat{A} = \widetilde{A} - \eta(h)$, et la condition $\xi(\hat{A}) = 0$, donne $\hat{A} = \hat{A}(u, v)$, on peut donc écrire:

$$\Omega = d\big(A(u, v)(d\theta^1 + bd\theta^2) + vd\theta^2\big)\,,$$

$A(u, v) = h(u) + av\frac{\partial\Gamma(u,v)}{\partial u}$, et en utilisant une autre fois Lemme 1.2 on a:

$$\Omega = d\big(h(u)(d\theta^1 + bd\theta^2) + vd\theta^2\big)\,.$$

On a donc prouvé:

Proposition 3.1 *Si b n'est pas un nombre de Liouville, il-y-a un symplectomorphisme, préservant $\mathfrak{L}_{\mathrm{irr}}$, d'un voisinage ouvert de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \Omega)$ sur un voisinage ouvert de $\mathbb{T}^2_{(0,0)}$ dans $(T^*\mathbb{T}^2, \bar{\Omega})$, où $\bar{\Omega} = d\big(h(u)(d\theta^1 + bd\theta^2) + vd\theta^2\big)$.*

Ce qui reste pour la résolution du problème de linéarisation symplectique dans le cas irrationel, où b n'est pas un nombre de Liouville, est:

Théorème 3.1 *Les germes de feuilletage Lagrangien au voisinage d'une feuille compacte $\big(\mathbb{T}^2, \nabla_{\mathrm{irr}}(a, b)\big)$, où b n'est pas un nombre de Liouville, à holonomie linéarisable, sont classifiés à symplectomorphisme près, par les germes à l'origine des fonction $h(u)$ d'une variable, avec $h(0) = 0$.*

Preuve On sait que deux germes de feuilletage Lagrangien au voisinage de $(\mathbb{T}^2, \nabla_{\mathrm{irr}})$ sont équivalents à deux germes de feuilletage Lagrangien au voisinage de la feuille zero dans $(T^*\mathbb{T}^2, \Omega_i, \mathfrak{L}_{\mathrm{irr}})$, pour $i = 1, 2$, avec

$$\Omega_i = d\big(h_i(u)(d\theta^1 + bd\theta^2) + vd\theta^2\big)\,,$$

où $h_i(0) = 0$.

Supposons qu'il est possible de trouver un symplectomorphisme entre deux voisinages de la feuille zero, préservant $\mathfrak{L}_{\mathrm{irr}}$. On pourra l'exprimer comme:

$$\phi\colon (\theta^1, \theta^2, u, v) \longrightarrow (\Theta^1, \Theta^2, \bar{u}, \bar{v}).$$

Ce symplectomorphisme doit préserver la distibution donnée par le champ de vecteurs charactéristique sur $dv = 0$, qui est $\{\frac{\partial}{\partial\theta^2} - b\frac{\partial}{\partial\theta^1}\}$, et en consequence, il doit préserver l'adhérence de son flot qui est $du = dv = 0$. Par Remarque 3.1 on a $\bar{v} = \bar{v}(v)$. On aura donc, en ce qui concerne $\bar{u}$ et $\bar{v}$: $\bar{u} = \bar{u}(u, v)$ et $\bar{v} = \bar{v}(v)$.

Comme $\phi^*(\Omega_2) = \Omega_1$, en regardant le terme en $d\theta^2 \wedge dv$ on déduit que $\bar{v}'(v) \equiv 1$, *i.e.*, $\bar{v} = v$.

En écrivant que ϕ préserve $\mathfrak{L}_{\mathrm{irr}}$, qui peut s'écrire en imposant que $d\bar{u} - av(d\Theta^1 + bd\Theta^2)$ appartient à

$$\big(du - av(d\theta^1 + bd\theta^2), dv\big)\,,$$

on voit que $\bar{u} = u + v\rho(u, v)$, et il suffit, par exemple, de regarder le coefficient du terme $(d\theta^1 + bd\theta^2) \wedge \big(du - av(d\theta^1 + bd\theta^2)\big)$, dans $\phi^*(\Omega_2)$ et Ω_1, pour $v = 0$, pour trouver que $h_1(u) \equiv h_2(u)$. ∎

Finalement on peut donner une interprétation géométrique du germe de la fonction $h(u)$: il faut rappeler que les feuilles de $\mathcal{L}_{\text{irr}}$, correspondantes à $v = 0$, $u = u_0$ sont des tores et c'est facile de voir que la structure affine plate pour chacune de ces feuilles est une structure affine plate irrationelle d'invariants b et $\bigl(a \cdot h'(u_0)\bigr)$, ce qui confirme le caractère invariant de $h(u)$ pour cette construction.

Références

[1] C. Currás-Bosch, *Sur les feuilletages Lagrangiens à holonomie linéaire.* C. R. Acad. Sci. Paris **317**(1993), 605–608.

[2] C. Currás-Bosch et P. Molino, *Voisinage d'une feuille compacte dans un feuilletage Lagrangien: le problème de linéarisation symplectique.* Hokkaido Math. J. **23**(1994), 355–360.

[3] ———, *Réduction symplectique d'un feuilletage Lagrangien au voisinage d'une feuille compacte.* C. R. Acad. Sci. Paris **318**(1994), 661–664.

[4] ———, *Un exemple de classification de germes de feuilletages Lagrangiens au voisinage d'une feuille compacte.* Indag. Math. (N.S.) (2) **19**(1998), 197–209.

[5] P. Dazord, *Sur la géométrie des sous-fibrés et des feuilletages Lagrangiens.* Ann. Sci. École Norm. Sup. 4 **14**(1981), 465–480.

[6] N. H. Kuiper, *Sur les surfaces localement affines.* Colloque de Géométrie Différentielle (Strasbourg, 1953), Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1953, 79–87.

[7] P. Libermann et Ch. M. Marle, *Symplectic Geometry and Analytical Mechanics.* D. Reidel Publishing Company, 1987.

[8] P. Molino, *Exposés au Séminaire Sud-Rhodanien.* Avignon, 1990, et Marseille, 1990.

[9] T. Nagano et K. Yagi, *The affine structures on the real two torus.* Osaka J. Math. **11**(1974), 181–210.

[10] A. Weinstein, *Lectures on symplectic manifolds.* Regional Conference Series in Mathematics **29**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1977.

[11] ———, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds.* Adv. Math. **6**(1971), 329–346.

Departament d'Algebra i Geometria, DGICYT PB96-1178
Universitat de Barcelona
Gran Via 585
08007 Barcelona
Spain
email: curras@mat.ub.es