SUR LES ENSEMBLES DE SOMMETS INDÉPENDANTS DANS LES GRAPHES CHROMATIQUES MINIMAUX

W. G. BROWN ET J. W. MOON

1. Introduction. $f(n, k)$ sera l'entier maximum t tel qu'il existe un graphe G ayant les propriétés suivantes:

(a) G possède n sommets;

(b) le nombre chromatique de G est égal à k;

(c) G est *minimal* par rapport à la propriété (b); c'est-à-dire, la suppression de n'importe quelle arête rend G $(k-1)$-colorable;

(d) il existe t sommets indépendants de G, c'est-à-dire dont nulle paire ne se joigne par une arête.

Un graphe sera *k-minimal* s'il possède les propriétés (b) et (c). Puisque les graphes 3-minimaux sont tous des polygones impairs, il s'ensuit que $f(n, 3) = [n/2]$ $(n = 3, 5, 7, \ldots)$. Il y a quelque temps T. Gallai* a posé la conjecture:

$$f(n, 4) \overset{?}{<} n/2. \tag{1.1}$$

M. Simonovits* a réfuté l'inégalité stricte dans (1.1) en prouvant que

$$f(2m, 4) \geqq m \qquad (m > 4). \tag{1.2}$$

Nous démontrerons ici que, pour n assez grand, (1.1) est fausse même si l'égalité est permise. En effet, nous prouverons deux théorèmes.

(1.3) THÉORÈME. *Pour chaque* $k > 3$, $\lim_{n\to\infty} f(n, k)/n = 1$.

Et, de plus,

(1.4) THÉORÈME. *Pour chaque* $k > 3$, $n - f(n, k) = O(n^{\frac{1}{2}})$.

Nous remercions Paul Erdős de nous avoir communiqué ce problème, et le Conseil National des Recherches du Canada qui a subventionné en partie ce travail.

2. Les graphes $G(m, h, k)$. Soient désormais m, h, k des entiers positifs tels que m, h soient impairs et plus grands que l'unité, avec $k > 3$. Dans cette section et celle qui suit nous construirons des graphes $G(m, h, k)$ k-minimaux ayant $(m+2)(h+1)+(k-5)$ sommets dont au moins

Reçu le 14 juillet, 1967.

*Communication orale.

$mh + (m - 1)/2$ sont indépendants. Pour $k > 4$ ces graphes se bâtiront des $G(m, h, 4)$; leur construction sera décrite dans § 3.

Les sommets de $G = G(m, h, 4)$ constituent l'union disjointe des ensembles suivants:

$$P = \{p_i\}, \quad B = \{b_i\}, \quad A_i = \{a_{ij}\}, \quad \{c\}, \quad Q = \{q_j\}$$

où, toujours dans cette section, $i = 1, 2, \ldots, m$ et $j = 1, 2, \ldots, h$. Par abus de langage nous identifierons un ensemble de sommets de G et le sous-graphe qu'il engendre. Les arêtes de G constituent l'union de six classes:

(I) P est un polygone dont les arêtes sont $p_1p_2, p_2p_3, \ldots, p_mp_1$;

(II) p_i est joint à b_i;

(III) b_i est joint à tous les sommets de A_i;

(IV) c est joint à tous les sommets de $\bigcup A_i$;

(V) a_{ij} est joint à q_j;

(VI) Q est un polygone dont les arêtes sont $q_1q_2, \ldots, q_hq_1$.

Le graphe G, sans les arêtes qui joignent $\bigcup A_i$ à Q, est dessiné à la Figure 1.

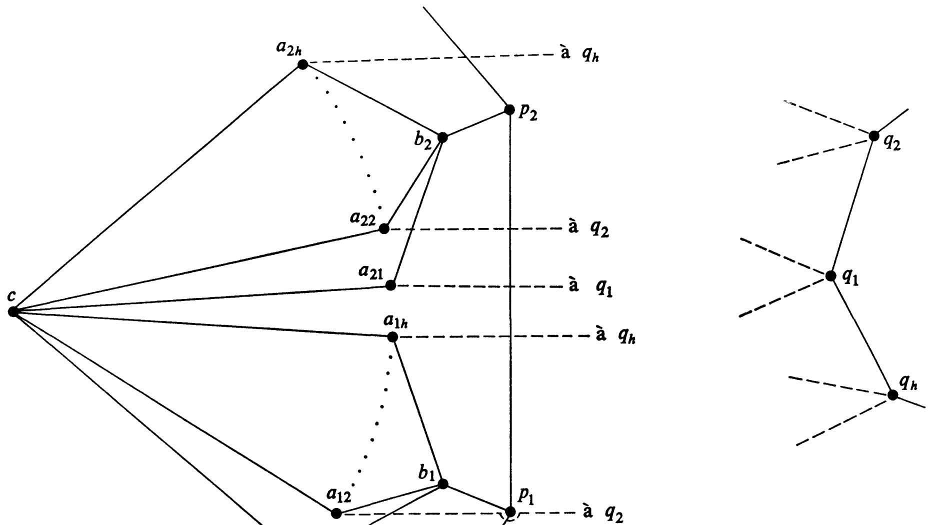

FIGURE 1

(2.1) LEMME. *$G(m, h, 4)$ est 4-minimal.*

Preuve. 1. Supposons que G soit colorié en trois couleurs. Le coloriage du polygone impair Q exige toutes les trois couleurs. Aussi, pour chaque i, les sommets dans A_i ne peuvent pas porter tous la même couleur; de là, b_i et c, qui sont joints à tous ces sommets, doivent porter tous la même couleur.

https://doi.org/10.4153/CJM-1969-028-5 Published online by Cambridge University Press

Il ne reste que deux couleurs pour colorier le polygone impair Q, ce qui est impossible.

2. Il nous reste à démontrer que le graphe $G - E$ qui reste de la suppression de n'importe quelle arête E, est 3-colorable. La symétrie de G nous permit de supposer que E est un des arêtes p_1p_2. p_1b_1, b_1a_{11}, $a_{11}c$, $a_{11}q_1$, q_1q_2. Un *coloriage fondamental* de G se définit comme suit: Il y a quatre couleurs. q_1 porte la couleur 1, et q_j ($j \neq 1$) porte 2 ou 3 selon que j est pair ou impair; a_{ij} porte 2 si $j = 1$, et 1 autrement; c et les sommets $b_2, b_3, \ldots, b_m$ portent 3; p_1 porte 3, et p_i ($i \neq 1$) porte 1 ou 2 selon que i est pair ou impair; b_1 porte la couleur 4. Nous décrivons pour chacune des arêtes ci-dessus des changements qui transformeront un coloriage fondamental en un coloriage de $G - E$ en les trois couleurs 1, 2, 3.

(I) $E = p_1p_2$: Changer en 1 la couleur de p_1, et en 3 celle de b_1.
(II) $E = p_1b_1$: Changer en 3 la couleur de b_1.
(III) $E = b_1a_{11}$: Changer en 2 la couleur de b_1.
(IV) $E = a_{11}c$: Changer en 3 la couleur de a_{11}, et en 2 celle de b_1.
(V) $E = a_{11}q_1$: Changer en 1 la couleur de a_{11}, et en 2 celle de b_1.
(VI) $E = q_1q_2$: Changer en 2 la couleur de b_1 et de q_1, et en 1 celle des sommets a_{i1}.

3. Construction des graphes $G(m, h, k)$, $k > 4$. Soient R et S des graphes disjoints, respectivement r- et s-minimal. Alors, le graphe $R + S$ (dont les sommets sont tous les sommets de R et de S, et les arêtes sont toutes les arêtes de R et de S aussi que des arêtes qui joignent chaque sommet de R à chaque sommet de S) est $(r + s)$-minimal. Ceci résulte de la définition d'un graphe k-minimal, et du fait que l'on peut colorier un graphe k-minimal de sorte qu'un sommet quelconque soit le seul qui porte une couleur donnée.

$G(m, h, k)$ sera un graphe $G(m, h, 4) + S$, où S est un graphe complet de $k - 4$ sommets (disjoint de $G(m, h, 4)$). Il s'ensuit des remarques précédantes que $G(m, h, k)$ est k-minimal.

4. Preuve des théorèmes.

(4.1) Lemme. $\limsup_{n\to\infty} f(n, k)/n = 1$.

Preuve. Soit $N = N(m, h, k)$ le nombre des sommets de $G(m, h, k)$. Alors,

$$N = |P| + |B| + \sum |A_i| + |Q| + 1 + |S| = (m + 1)(h + 2) + (k - 5).$$

Les mh sommets de $\bigcup A_i$ et les $[m/2]$ sommets de P dont l'indice est pair sont indépendants. Donc

$$\frac{f(N, k)}{N} \geqq \frac{mh + \frac{1}{2}(m - 1)}{(m + 1)(h + 2) + (k - 5)} \to 1 \quad \text{lorsque } m, h \to \infty.$$

Notre but est d'évaluer la limite de $f(n, k)/n$ lorsque $n \to \infty$. Aussi, nous avons besoin, pour chaque k, d'une famille de graphes k-minimaux dont le nombre des sommets réalise toutes les valeurs assez grandes, et tels que presque tous les sommets forment un ensemble indépendant. Pour chaque entier pair s, positif ou zero, le graphe $H(s, m, h, k)$ sera obtenu de $G(m, h, k)$ par la subdivision de l'arête p_1p_2 par s nouveaux sommets dont chacun est joint à c et aux sommets de S. Nous énonçons sans preuve le résultat suivant.

(4.2) LEMME. *$H(s, m, h, k)$ est k-minimal* ($s = 0, 2, 4, \ldots$).

A l'aide des graphes $H(s, m, h, k)$ nous pouvons construire des graphes k-minimaux dont le nombre des sommets réalise toutes les valeurs assez grandes *de la même parité que* $k - 1$. Afin de réaliser les valeurs de n ayant la parité de k nous définissons pour chaque entier impair $s > 1$ le graphe $H(s, m, h, k)$ comme suit: commencer avec $H(s - 3, m, h, k)$ et supprimer l'arête p_2p_3; ajouter trois nouveaux sommets, t_1, t_2, t_3, dont chacun est joint à tous les sommets de S, et dont les autres nouvelles arêtes sont (voir la Figure 2) p_2t_1, t_1t_2, t_2t_3, t_3t_1, t_2p_3, t_3p_3.

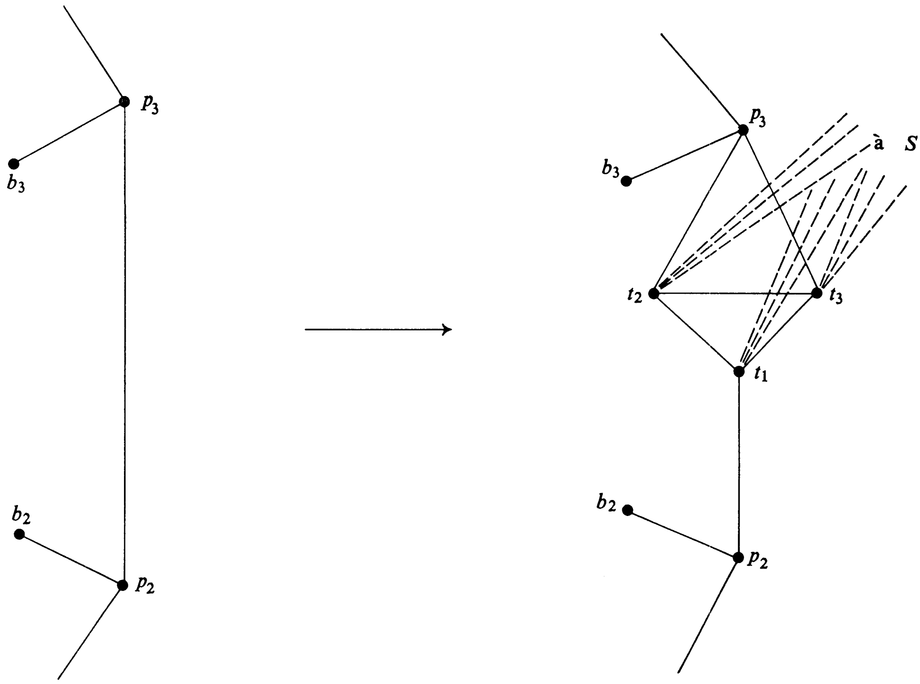

FIGURE 2

(4.3) LEMME. *$H(s, m, h, k)$ est k-minimal* ($s = 3, 5, 7, \ldots$).

Nous en omettons la preuve.

Etant donné un entier $n > k + 16$, il existe un entier impair $m \geqq 3$ tel que

$$N(m, m, k) + r \leqq n \leqq N(m + 2, m + 2, k) + r - 2,$$

où $r = 3$ ou 0 selon que $n - k$ est pair ou impair. Puisque $N(m, m, k) + 2(2m + 5) = N(m + 2, m + 2, k)$ il s'ensuit que $n - N(m, m, k) - r$ est un entier pair, s, tel que $0 \leqq s \leqq 2(2m + 4)$. Le graphe $H(s + r, m, m, k)$ possède n sommets dont au moins $m^2 + [m/2] + s/2 + [r/2]$ sont indépendants. Donc,

$$\begin{aligned} n - f(n, k) &\leqq \{N(m, m, k) + s + r\} - \{m^2 + [m/2] + s/2 + [r/2]\} \\ &\leqq 5m/2 + s/2 + k - 1/2 \\ &\leqq 9(m + 1)/2 + (k - 1) \\ &\leqq 9n^{\frac{1}{2}}/2 + (k - 1). \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve de (1.4), donc de (1.3) aussi. (La constante 9/2 peut être réduite en utilisant d'autres constructions; par example, nous ne devions pas mettre $m = h$ au-dessus. Il est possible que $n - f(n, k) = o(n^{\frac{1}{2}})$ mais nous n'avons pas réussi à le prouver.)

Problème. Définissons $f(n, k, g)$ par les conditions (a)–(d) du § 1, où le graphe G doit aussi avoir la taille $\geqq g$ (i.e., aucun polygone ne consiste en moins de g sommets). Déterminer des bornes asymptotiques pour cette fonction. (Nous remarquons que, pour m et $h > 3$, nos graphes $G(m, h, 4)$ ont tous la taille 4.)

McGill University,
Montréal, Québec;
University of Alberta,
Edmonton, Alberta