

# Quotients jacobiens : une approche algébrique

Carine Reydy

*Résumé.* Le diagramme d'Eisenbud et Neumann d'un germe est un arbre qui représente ce germe et permet d'en calculer les invariants. On donne une démonstration algébrique d'un résultat caractérisant l'ensemble des quotients jacobiens d'un germe d'application  $(f, g)$  à partir du diagramme d'Eisenbud et Neumann de  $fg$ .

*Abstract.* The Eisenbud and Neumann diagram of a plane curve germ is a tree that represents this germ and allows computation of its invariants. We algebraically show a result that gives a characterization of the set of jacobian quotients of an application germ  $(f, g)$  for the datum of the Eisenbud et Neumann diagram of  $fg$ .

## 1 Introduction

Soit  $K$  un corps algébriquement clos de caractéristique 0. On considère deux germes non identiquement nuls  $f, g \in K[[x, y]]$  admettant une singularité à l'origine et on définit  $\phi = (f, g)$ . Le déterminant de la matrice jacobienne de  $\phi$  est égal à  $J(f, g) = (\partial f / \partial x)(\partial g / \partial y) - (\partial f / \partial y)(\partial g / \partial x)$ . On définit le *germe jacobien*  $\mathcal{J}$  du couple  $(f, g)$  comme étant le produit des composantes irréductibles de  $J$  qui ne divisent pas  $fg$ . Enfin, le *lieu jacobien* de  $(f, g)$ , noté  $\tilde{\mathcal{J}}$ , est le lieu réduit des zéros du germe jacobien. La *courbe discriminante* de  $(f, g)$  est définie par  $\Delta = \phi(\tilde{\mathcal{J}})$ .

Dans cet article, on appelle indifféremment branche ou composante irréductible toute composante irréductible d'un germe de courbe. Si  $(u, v)$  sont les coordonnées de  $\phi(K^2)$ , alors par définition,  $\{u = 0\} = \phi(\{f = 0\})$  n'est pas une branche de  $\Delta$ ; donc si  $\delta$  est une branche de  $\Delta$ , on peut trouver une paramétrisation de Puiseux de  $\delta$  de la forme  $u = v^{q_\delta/p_\delta}(a + \sum_{k \in \mathbb{N}} b_k v^{k/m})$ .

**Définition 1** L'ensemble des *quotients jacobiens* de  $(f, g)$  est l'ensemble des nombres rationnels  $p_\delta/q_\delta$  pour les branches  $\delta$  de  $\Delta$ .

**Remarque** Dans le cas où  $g$  est une forme linéaire transverse à  $f$ , les nombres rationnels  $p_\delta/q_\delta$  sont les *quotients polaires* définis par B. Teissier [T] et D. T. Lê [L].

De nombreux travaux ont été tout d'abord réalisés concernant les quotients polaires : lorsque le germe  $f$  est irréductible, M. Merle [Me] donne en 1977 une expression de l'ensemble des quotients polaires de  $f$  en fonction de l'ensemble de ses paires caractéristiques de Puiseux. Pour un germe  $f$  réductible, D. T. Lê, F. Michel et

---

Reçu par la rédaction le 10 février, 2005 ; revu le 16 décembre, 2005 .

Classification (AMS) par sujet: 14B05, 32S05, 32S50.

Mots clés: Singularité, jacobien, quotient jacobien, polygone de Newton.

©Société mathématique du Canada 2007.

C. Weber étudient en 1989 ces quotients grâce à la résolution minimale de  $f$  [LMW] : ils obtiennent ainsi une méthode de calcul de ces quotients et décrivent leur comportement dans la résolution minimale de  $f$ .

Dans le même esprit mais pour les quotients jacobiens, lorsque le corps considéré est  $\mathbb{C}$  et que les germes  $f$  et  $g$  sont réduits et sans composante commune, H. Maugendre donne en 1996 une caractérisation de l'ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  en termes d'exposants de contact dans la résolution [M] :

**Théorème 1.1** Soient  $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$  deux germes réduits et sans composante commune. L'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est le sous-ensemble des rationnels composé des  $\frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}$ , où  $\rho_v$  est une courvette issue du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture du graphe dual de résolution minimale de  $fg$ .

H. Maugendre a démontré le théorème 1.1 avec des outils topologiques (décomposition de Waldhausen en variétés de Seifert). Mais ce résultat étant énoncé algébriquement, il semble naturel d'en chercher une preuve algébrique. Cet article est le fruit d'un travail effectué au cours de ma thèse sous la direction de P. Cassou-Noguès : il propose une démonstration algébrique de ce théorème, ce qui permet de généraliser les résultats d'H. Maugendre à un corps  $K$  algébriquement clos de caractéristique 0 et à des germes non réduits ayant d'éventuelles composantes communes. D'autre part, le point de vue algébrique permet de mieux cerner le comportement du germe jacobien de l'application  $(f, g)$  en fonction de celui de  $fg$  au voisinage de la singularité.

L'outil principal de cet article est le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann d'un germe. C'est un arbre décoré qui représente le germe auquel il est associé au voisinage de la singularité et permet de calculer ses invariants ; on le note  $D_m(\cdot)$ . On utilise ici une construction entièrement algébrique de ce diagramme qui a été donnée par P. Cassou-Noguès. Le principe de la démonstration qui va suivre est de comparer les diagrammes minimaux d'Eisenbud et Neumann  $D_m(fg)$  et  $D_m(fg\mathcal{J})$  afin de savoir dans quelles "zones" de  $D_m(fg)$  les composantes de  $\mathcal{J}$  apparaissent sur  $D_m(fg\mathcal{J})$ .

Il apparaît au cours de la démonstration un cas particulier de tangence entre les deux germes  $f$  et  $g$ , la *situation d'Abhyankar*, dans laquelle il est beaucoup plus difficile de contrôler le comportement de  $\mathcal{J}$ . Dans [KP], les auteurs soulèvent ce problème : ils utilisent un arbre  $T(f, g)$  pour étudier le comportement de  $\mathcal{J}$  et exhibent des points particuliers qu'ils nomment "points colinéaires" (qui correspondent pour notre étude aux sommets pour lesquels on est dans la situation d'Abhyankar). Pour ces points, ils concluent que la façon dont les branches de  $\mathcal{J}$  se séparent de  $T(f, g)$  n'est pas un invariant de l'arbre. La démonstration qui va suivre permet de conclure dans cette situation en raisonnant sur un germe qui s'exprime comme combinaison algébrique de  $f$  et  $g$ .

On démontre finalement le résultat suivant.

**Théorème 1.2** Soient  $f, g \in K[[x, y]]$  deux germes non nuls admettant une singularité à l'origine et n'ayant pas de composante commune de type Abhyankar. Soit  $D_m(fg)$  le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann de  $fg$ . Alors l'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est le sous-ensemble des rationnels composé des

$\frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0}$  où  $\rho_v$  est une courvette issue du sommet  $v$  et  $v$  parcourt l'ensemble des sommets de rupture de  $D_m(fg)$ .

## 2 Outils et notations

### 2.1 Notion de poids

R. C. Heitmann [H] utilise les notions de poids et de polynômes quasi-homogènes pour faire une approche algébrique de la conjecture du jacobien. Nous allons faire de même pour aborder notre problème.

On considère un germe  $f(x, y) = \sum A_{\alpha, \beta} x^\alpha y^\beta \in K[[x, y]] \setminus \{0\}$ .

Le support de  $f$  est défini par  $\text{Supp}(f) := \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 / A_{\alpha, \beta} \neq 0\}$ .

Le polygone de Newton de  $f$ , noté  $N(f)$ , est la frontière de l'enveloppe convexe de

$$\{(\alpha, \beta) + \mathbb{R}_+^2, (\alpha, \beta) \in \text{Supp}(f)\}$$

dans  $\mathbb{R}^2$ . Ce polygone comporte des faces compactes  $S_1, \dots, S_m$  et deux faces non-compactes d'équations  $a = N$  et  $b = M$ , avec  $N, M \in \mathbb{N}$ .

**Définition 2** Un poids  $w$  est une application  $w: K[[x, y]] \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$  vérifiant la propriété suivante : si  $f = \sum A_{a,b} x^a y^b \in K[[x, y]] \setminus \{0\}$ , alors  $w(f) = \inf\{aw(x) + bw(y), (a, b) \in \text{Supp}(f)\}$ . On définit alors la partie initiale de  $f$  par rapport au poids  $w$  par  $in_w(f) := \sum_{aw(x)+bw(y)=w(f)} A_{a,b} x^a y^b$ .

À une face compacte  $S$  de  $N(f)$  portée par la droite d'équation  $qa + pb = N$ , on associe le poids  $w_S$  défini par  $w_S(x) = q$  et  $w_S(y) = p$ . À la face non-compacte d'équation  $a = N$  (resp.  $b = N$ ), on associe le poids  $w_S$  défini par  $w_S(x) = 1$  et  $w_S(y) = 0$  (resp.  $w_S(x) = 0$  et  $w_S(y) = 1$ ). On a alors  $N = w_S(f)$ . On obtient aisément la proposition suivante.

#### Proposition 2.1

- (i) Si pour le poids  $w$ ,  $in_w(f)$  est constitué d'au moins deux monômes, alors il existe une face  $S$  de  $N(f)$  telle que  $aw(x) + bw(y) = w(f)$  est l'équation de la droite portant  $S$ .
- (ii)  $\forall S \in N(f), \forall (a, b) \in \text{Supp}(f),$  on a  $aw_S(x) + bw_S(y) \geq w_S(f)$ .
- (iii)  $(a, b) \in N(f) \Leftrightarrow$  il existe  $p, q \in \mathbb{N}$  avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$  tels que  $aq + pb = w(f)$ , où  $w$  est le poids défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ .

### 2.2 Diagrammes d'Eisenbud et Neumann

Le diagramme d'Eisenbud et Neumann d'un germe de courbe plane  $f \in K[[x, y]]$ , noté  $D(f)$ , est un arbre décoré qui représente ce germe et permet d'en calculer certains invariants (comme par exemple le nombre de Milnor). Il est introduit par Eisenbud et Neumann sous le nom de "splice diagram" et construit de façon topologique dans [EN]. Il existe aussi une construction algébrique due à P. Cassou-Noguès qui repose sur l'algorithme de Newton. C'est celle que nous utiliserons et que nous allons succinctement décrire, en référence à ses travaux.

**Première étape : construction d'un axe correspondant à un polygone de Newton.**

On construit le polygone de Newton  $N(f)$  de  $f$ . On note  $S_1, \dots, S_m$  les faces compactes de  $N(f)$  ordonnées par pentes décroissantes  $-q_1/p_1 > \dots > -q_m/p_m$ , où  $\text{pgcd}(p_i, q_i) = 1$ . Soit  $q_i a + p_i b = N_i$  l'équation de la droite portant  $S_i$ .

On trace une droite verticale. On lit  $N(f)$  de droite à gauche et pour chaque face compacte  $S_i$  de  $N(f)$ , on fait figurer un sommet  $v_i$  sur la droite parcourue de haut en bas.

Si  $N(f)$  a un point sur l'axe des abscisses (resp. des ordonnées), le diagramme se termine en haut (resp. en bas) par un sommet  $v_0$  (resp.  $v_{m+1}$ ). Sinon, on a  $f(x, y) = y^\gamma \tilde{f}(x, y)$  (resp.  $f(x, y) = x^\gamma \tilde{f}(x, y)$ ) où  $y$  (resp.  $x$ ) ne divise pas  $\tilde{f}(x, y)$  : on termine le diagramme par une flèche  $v_0$  (resp.  $v_{m+1}$ ) qui représente la branche  $y = 0$  (resp.  $x = 0$ ) et on fait figurer  $(\gamma)$  à côté de la flèche.

On décore le premier axe de la façon suivante : pour  $i = 1, \dots, m$ , on fait apparaître  $q_i$  sur l'extrémité connectée à  $v_i$  de l'arête  $[v_{i-1}, v_i]$ ,  $p_i$  sur l'extrémité connectée à  $v_i$  de l'arête  $[v_i, v_{i+1}]$  et  $(N_i)$  à côté du sommet  $v_i$ .

Le sommet ou la flèche située en haut du premier axe vertical est le *point de départ* du diagramme  $D(f)$ .

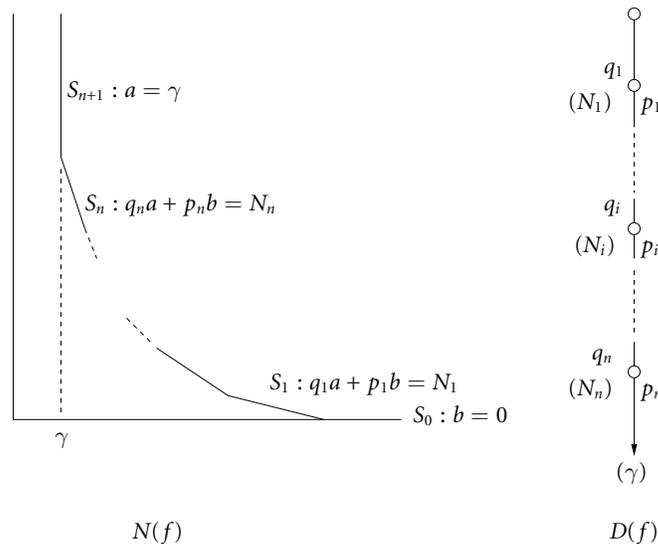


Figure 1

**Deuxième étape : transformation de Duval–Newton.** À chaque face compacte  $S$  de  $N(f)$  correspond un sommet  $v$  du premier axe vertical de  $D(f)$ . Pour chacun de ces sommets, on applique l'étape suivante : soit  $qa + pb = N$  l'équation de la droite portant  $S$ , avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . Soit  $w$  le poids associé à la face  $S$ , c'est-à-dire défini par  $w(x) = q$  et  $w(y) = p$ . La partie initiale  $in_w(f)$  de  $f$  par rapport au poids  $w$  est

un polynôme quasi-homogène de poids  $w(f)$  que l'on peut donc écrire comme un produit de formes quasi-homogènes :

$$in_w(f) = Cx^{l_0}y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^p - a_i y^q)^{l_i},$$

où  $C \in K, a_i \in K^\times$  pour  $i = 1, \dots, r$  et  $a_i \neq a_j$  pour tout  $i \neq j$ . On définit alors le polynôme  $p_{v,f} \in K[t]$  par

$$p_{v,f}(t) := \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i}.$$

Les  $a_i$  sont appelées racines de  $f$ . Pour chaque racine  $a_{i_0}$ , on effectue la transformation de Duval–Newton :

$$\begin{aligned} \Phi_{i_0}^1 : K^2 &\rightarrow K^2 \\ (x_1, y_1) &\mapsto (y_1^q(a_{i_0}^{p'} + x_1), a_{i_0}^{q'} y_1^p), \end{aligned}$$

où  $p', q' \in \mathbb{N}^2$  sont tels que  $pp' - qq' = 1$ . On a alors  $f \circ \Phi_{i_0}^1(x_1, y_1) = y_1^N f^1(x_1, y_1)$  où  $f^1 \in K[[x_1, y_1]]$ . On recommence alors la première étape de l'algorithme pour  $y_1^N f^1(x_1, y_1)$ , et on obtient donc un nouvel axe vertical pour chacune des racines  $a_{i_0}$ . En particulier, l'axe vertical de  $y_1^N f^1(x_1, y_1)$  comporte une flèche en haut portant la décoration  $(N)$ .

L'algorithme est fini quand tous les polygones de Newton obtenus n'ont plus de faces compactes, c'est-à-dire quand tous les axes verticaux finaux sont constitués de deux flèches connectées par une arête. Cet algorithme se termine au bout d'un nombre fini d'étapes (voir par exemple [BK, p. 384] ou [CA]).

**Dernière étape : recollement des axes.** On recolle les axes du premier au dernier construit. Soit  $v$  un sommet du premier axe vertical portant les décorations  $p$  en dessous,  $q$  au dessus et  $(N)$  à côté. On considère un second axe vertical correspondant à la racine  $a_{i_0}$  de  $p_{v,f}(t)$ . La flèche la plus haute de ce second axe (qui porte aussi la décoration  $(N)$ ) se recolle sur  $v$  (sur le diagramme final, le sommet  $v$  demeure et la flèche disparaît). Sur ce second axe vertical, les sommets portent les décorations  $p_i$  en dessous,  $q_i$  au dessus et  $(N_i)$  à côté. On remplace les  $q_i$  par  $p_i q_i + q_i$  et les décorations  $p_i$  et  $(N_i)$  restent inchangées. Enfin, on dit que  $v$  est *le sommet précédant* tous les sommets de ce second axe vertical.

On continue de proche en proche jusqu'aux derniers axes verticaux construits.

**Exemple 1** Soit  $f(x, y) = ((x^2 - y^3)^2 + xy^5)(x^3 - y^2)$ .

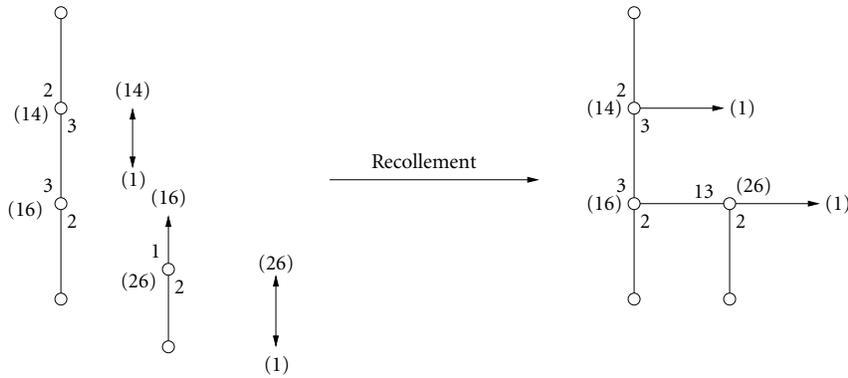


Figure 2

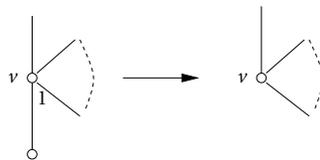
**Remarque** Chaque flèche du diagramme d'Eisenbud et Neumann d'un germe  $f$  représente une composante de  $f$  et la décoration figurant à côté de la flèche entre parenthèses est la multiplicité de cette composante.

On dispose de règles de minimalisations qui permettent de construire le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann  $D_m(f)$  de  $f$  à partir de son diagramme d'Eisenbud et Neumann. On rappelle tout d'abord la définition suivante.

**Définition 3** La *valence* d'un sommet  $v$  est le nombre d'arêtes connectées à  $v$ . On la note  $\delta_v$ . On dit qu'un sommet  $v$  est un *sommet de rupture* si  $\delta_v \geq 3$ .

**Règles de minimalisation** Pour construire le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann  $D_m(f)$  du germe  $f$ ,

- on supprime de  $D(f)$  tous les sommets de valence 1 qui sont connectés à une arête portant la décoration 1 à son autre extrémité, ainsi que l'arête attenante,



- on supprime de  $D(f)$  tous les sommets de valence 2.

Le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann  $D_m(f)$  d'un germe  $f$  possède de nombreuses propriétés. C'est, par exemple, un invariant complet du type topologique de ce germe. D'autre part, il est indépendant du système de coordonnées que l'on a choisi pour construire  $D(f)$ .

### 2.3 Quelques définitions

**Définition 4** Soient  $f$  un germe de courbe et  $N(f)$  son polygone de Newton. Soit  $S$  une face de  $N(f)$ . Soient  $qa + pb = N$ , où  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ , l'équation de la droite portant  $S$ , et  $w$  le poids associé à  $S$ . Alors  $S$  est une *face exceptionnelle* de  $N(f)$  si et seulement si  $q = 1$  et il existe  $\alpha, C \in K^*$  tels que  $\text{in}_w f(x, y) = Cx^l(x^p - \alpha y)^l$  ou bien  $p = 1$  et il existe  $\alpha, C \in K^*$  tels que  $\text{in}_w f(x, y) = Cy^l(x - \alpha y^q)^l$ .

**Définition 5** Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets ou flèches du diagramme  $D(f)$  d'un germe  $f$ . On appelle géodésique  $[v, v']$  l'ensemble ordonné des sommets et des arêtes rencontrées sur le plus court chemin joignant  $v$  à  $v'$ .

**Définition 6** Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets de rupture de  $D(f)$ . Soient  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur la géodésique  $[v, v']$  et  $\beta$  (resp.  $\beta'$ ) le produit des décorations proches de  $v$  (resp.  $v'$ ) autres que  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ).



Alors le déterminant de  $[v, v']$  vaut  $\Delta_{[v, v']} := \alpha\alpha' - \beta\beta'$ . Si  $v'$  est un sommet de valence 1 ou une flèche,  $\Delta_{[v, v']} = \alpha$ . Si  $v$  et  $v'$  sont deux flèches, on pose  $\Delta_{[v, v']} = 1$ .

**Proposition 2.2** Pour tous sommets ou flèches  $v, v'$  de  $D(f)$ , on a  $\Delta_{[v, v']} > 0$ .

**Démonstration** C'est une conséquence de l'algorithme de construction. ■

**Définition 7** Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets ou flèches de  $D(f)$ . On dit que  $v$  est plus petit que  $v'$ , noté  $v \prec v'$ , si la géodésique reliant le point de départ du diagramme à  $v'$  passe par  $v$ .

**Définition 8** Soit  $v$  un sommet ou une flèche de  $D(f)$ . On appelle *voisin* de  $v$  tout sommet ou flèche de  $D(f)$  connecté à  $v$  par une arête.

**Définition 9** Soient  $v$  un sommet ou une flèche de  $D(f)$  et  $v'$  un voisin de  $v$ . Un sommet  $v''$  *interposable* entre  $v$  et  $v'$  est un nouveau sommet ajouté entre  $v$  et  $v'$ , muni de deux décorations entières  $\alpha''$  proche de  $v''$  située sur l'arête  $[v'', v]$  et  $\beta''$  proche de  $v''$  située sur l'arête  $[v'', v']$  telles que  $\Delta_{[v, v'']} > 0$  et  $\Delta_{[v'', v']} > 0$ .

**Définition 10** Soient  $f$  un germe et  $v$  un sommet de  $D(f)$  ou interposable dans  $D(f)$ . On rajoute à  $D(f)$  une arête partant de  $v$  et terminée par une flèche. Alors cette flèche représente un germe que l'on note  $\rho_v$  et que l'on appelle *curvette*  $\rho_v$  du sommet  $v$ .

En effet, supposons que  $v$  est obtenu après  $k$  transformations de Duval–Newton successives  $\Phi^1, \dots, \Phi^k$ . Le sommet  $v$  correspond à une face de  $N(y_k^{N_{k-1}} f^k)$  de l'équation  $qa + pb = N_v$  avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . Alors  $(x_k = t^q, y_k = At^p + \dots)$  est une paramétrisation de  $\rho_v^k$  et  $\Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(t^q, At^p + \dots)$  est une paramétrisation de  $\rho_v$ .

**Définition 11** Soient  $f$  et  $g$  deux germes irréductibles. On appelle géodésique de  $f$  (resp.  $g$ ) le chemin parcouru pour aller du point de départ de  $D(fg)$  à la flèche représentant  $f$  (resp.  $g$ ). On dit que  $f$  et  $g$  se séparent au sommet  $v$  de  $D(fg)$  si le chemin parcouru pour aller du point de départ de  $D(fg)$  à  $v$  est géodésique de  $f$  et  $g$ , mais le chemin parcouru pour aller de ce sommet vers la flèche représentant  $f$  (resp.  $g$ ) est géodésique seulement de  $f$  (resp.  $g$ ).

**Définition 12** Soient  $f$  un germe et  $D(f)$  son diagramme d'Eisenbud et Neumann. On considère une géodésique de ce diagramme. On dit que le nombre  $n \in \mathbb{N}$  est sur la géodésique s'il est à une extrémité d'une arête de cette géodésique. On dit que le nombre  $n \in \mathbb{N}$  est adjacent à la géodésique s'il existe un sommet  $v$  de cette géodésique et une arête  $[v, v']$  connectée à ce sommet mais n'appartenant pas à la géodésique tels que  $n$  est à l'extrémité connectée à  $v$  de l'arête  $[v, v']$ .

La proposition qui suit permet de calculer des multiplicités d'intersection à l'aide des diagrammes d'Eisenbud et Neumann.

**Proposition 2.3** La multiplicité d'intersection de deux branches est égale au produit des nombres adjacents à la géodésique qui joint les deux flèches représentant ces branches sur un diagramme quelconque où elles sont représentées.

**Démonstration** Une preuve topologique est dans [EN, paragraphe III.10]. ■

Soit  $f \in K[[x, y]]$  l'équation d'un germe. Soit  $v_k$  un sommet de  $D(f)$  obtenu après  $k$  transformations de Duval–Newton successives  $\Phi^1, \dots, \Phi^k$ . À chaque transformation de Duval–Newton  $\Phi^i$  correspond une face d'un polygone de Newton d'équation  $q^i x + p^i y = N_i$ . Enfin, soit  $w_i$  le poids défini par  $w_i(x_i) = q^i$  et  $w_i(y_i) = p^i$ . D'après la construction décrite dans le paragraphe 2.2, on a  $f \circ \Phi^1(x_1, y_1) = y_1^{N_0} f^1(x_1, y_1)$ , et on a vu que  $N_0 = w_0(f)$ . Lorsqu'on applique  $\Phi^2$ , on obtient  $(y_1^{N_0} f^1(x_1, y_1)) \circ \Phi^2(x_2, y_2) = y_2^{N_1} f^2(x_2, y_2)$ , c'est-à-dire

$$f \circ \Phi^1 \circ \Phi^2(x_2, y_2) = y_2^{p_1 N_0} f^1 \circ \Phi^2(x_2, y_2) = y_2^{p_1 N_0} y_2^{w_1(f^1)} f^2(x_2, y_2) = y_2^{N_1} f^2(x_2, y_2).$$

Donc  $N_1 = p_1 N_0 + w_1(f^1) = p_1 w_0(f) + w_1(f^1) = w_1(y_1^{N_0} f^1)$ . En itérant ce procédé, on obtient le lemme suivant.

**Lemme 2.4** Pour  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $f \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_{i+1}^{N_i} f^{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1})$  et  $N_i = p_i N_{i-1} + w_i(f^i) = w_i(y_i^{N_{i-1}} f^i)$ .

La proposition suivante nous sera très utile par la suite.

**Proposition 2.5** Soient  $f \in K[[x, y]]$  un germe de courbe,  $v$  un sommet de rupture de  $D(f)$ ,  $\rho_v$  une curvette du sommet  $v$  et  $(N_v)$  la décoration figurant à côté de  $v$ . Alors  $N_v = (f, \rho_v)_0$ .

**Démonstration** Supposons que  $v$  est obtenu après  $k$  transformations de Duval–Newton successives  $\Phi^1, \dots, \Phi^k$ . Le sommet  $v$  correspond à une face de  $N(y_k^{N_{k-1}} f^k)$  d'équation  $qa + pb = N_v$  avec  $\text{pgcd}(p, q) = 1$ . Alors  $(x_k = t^q, y_k = At^p + \dots)$  est une paramétrisation de  $\rho_v^k$ . De plus,  $\rho_v \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(x_k, y_k) = y_k^{N_{k-1}, \rho_v} \rho_v^k(x_k, y_k)$ . Donc  $\Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(t^q, At^p + \dots)$  est une paramétrisation de  $\rho_v$ . Alors on a

$$\begin{aligned} (f, \rho_v)_0 &= \text{ord}_t f \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(t^q, At^p + \dots) \\ &= \text{ord}_t y_k^{N_{k-1}, f} f^k(x_k, y_k) = w_k(y_k^{N_{k-1}, f} f^k) = N_v. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Nous avons noté au paragraphe précédent que  $D(f)$  était construit après avoir fait le choix d'un système de coordonnées et qu'il dépendait de ce choix, alors que  $D_m(f)$  était obtenu en supprimant un certain nombre de sommets et d'arêtes à  $D(f)$  (selon les règles de minimalisation) et était au final indépendant du choix du système de coordonnées initial.

Nous allons dans cet article considérer  $D_m(f)$  comme un sous-arbre de  $D(f)$  : pour étudier  $D_m(f)$ , nous choisissons un système de coordonnées dans lequel nous construisons  $D(f)$  et nous considérons la “trace” de  $D_m(f)$  sur  $D(f)$ , c'est-à-dire les sommets, arêtes et flèches de  $D(f)$  qui ne sont pas supprimés lorsqu'on applique les règles de minimalisation. De cette manière, les définitions 6, 7, 9, 10 et 11, et les propositions 2.2, 2.3 et 2.5 se généralisent aisément au diagramme *minimal* d'Eisenbud et Neumann d'un germe. Les démonstrations de cet article sont donc faites en choisissant un système de coordonnées, mais les résultats concernant  $D_m(f)$  en sont indépendants.

Par abus de langage, on parlera de sommet du  $n$ -ième axe vertical de  $D_m(f)$  pour désigner un sommet de  $D_m(f)$  qui était sur le  $n$ -ième axe vertical de  $D(f)$  lors de la construction. De même, on dira que deux sommets  $v$  et  $v'$  de  $D_m(f)$  sont tels que  $v \prec v'$  s'ils vérifiaient  $v \prec v'$  sur  $D(f)$ .

Enfin, la notion de sommet voisin (définition 8) est bien entendu définie sur  $D_m(f)$ . Cependant, puisque  $D_m(f)$  est construit en supprimant certains sommets de  $D(f)$  selon les règles de minimalisation, si l'on considère un sommet  $v$  de  $D(f)$  qui est aussi un sommet de  $D_m(f)$ , les voisins de  $v$  ne sont pas forcément les mêmes sur  $D(f)$  et  $D_m(f)$ . Pour éviter toute ambiguïté, on parlera de *voisin sur  $D(f)$*  et de *voisin sur  $D_m(f)$* .

### 3 Une autre formulation du théorème 1.2 avec les zones de stabilité

#### 3.1 Quotients de contact

L'ensemble des quotients jacobiens peut être caractérisé de la façon suivante.

**Lemme 3.1** ([M]) *L'ensemble des quotients jacobiens du couple  $(f, g)$  est égal à l'ensemble constitué des  $\frac{(g, \gamma)_0}{(f, \gamma)_0}$  où  $\gamma$  parcourt l'ensemble des composantes irréductibles du lieu jacobien  $\tilde{\mathcal{J}}$ .*

**Démonstration** Soit  $\delta$  une composante irréductible de la courbe discriminante  $\Delta$ . Alors, par définition de  $\Delta$ , il existe une composante irréductible  $\gamma$  du lieu jacobien  $\tilde{\mathcal{J}}$  telle que  $\delta = \phi(\gamma)$ . Soit  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$  une paramétrisation injective de  $\gamma$ . On obtient alors

$$\begin{aligned} u &= f(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = at^{\text{ord}_t f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))} + \dots = at^{(f, \gamma)_0} + \dots \\ v &= g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = bt^{\text{ord}_t g(\varphi_1(t), \varphi_2(t))} + \dots = bt^{(g, \gamma)_0} + \dots \end{aligned}$$

où  $a, b \in K^*$ . On a donc pour  $\delta$  une expression de la forme  $u = cv^{(f, \gamma)_0 / (g, \gamma)_0} + \dots$ , avec  $c \in K^*$ . Le quotient jacobien de  $(f, g)$  associé à  $\delta$  est donc égal à  $\frac{(g, \gamma)_0}{(f, \gamma)_0}$ . ■

**Définition 13** Soient  $f$  et  $g$  deux germes. Soient  $v$  un sommet de  $D_m(fg)$  ou interposable dans  $D_m(fg)$  et  $\rho_v$  une curvette de  $v$ . On appelle *quotient de contact* associé au sommet  $v$  la quantité

$$Q_v^{f, g} = \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0},$$

où  $(\cdot, \cdot)_0$  désigne la multiplicité d'intersection en 0 de deux germes.

C'est une généralisation de la notion de quotient de contact définie par Hironaka [Hi, p. 5].

**Lemme 3.2** Soient  $v$  un sommet de  $D_m(fg\mathcal{J})$  et  $Q_v^{f, g}$  le quotient de contact du sommet  $v$ . Soit  $\gamma_v$  une branche du germe jacobien  $\mathcal{J}$  se séparant de  $fg$  au sommet  $v$ . Alors on a  $\frac{(g, \gamma_v)_0}{(f, \gamma_v)_0} = Q_v^{f, g}$ .

**Démonstration** Soit  $\rho_v$  une curvette du sommet  $v$ . Soit  $C \in \mathbb{N}^*$  le produit des nombres adjacents à la géodésique joignant la flèche représentant  $\gamma_v$  au sommet  $v$ . Alors d'après la proposition 2.3,  $(f, \gamma_v)_0 = C(f, \rho_v)_0$  et  $(g, \gamma_v)_0 = C(g, \rho_v)_0$ . Donc  $\frac{(g, \gamma_v)_0}{(f, \gamma_v)_0} = \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} = Q_v^{f, g}$ . ■

### 3.2 Zones de stabilité

**Définition 14** Soit  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(fg)$  ou un sommet interposable dans  $D_m(fg)$ . La *zone de stabilité*  $\mathcal{Z}_v(f, g)$  associée à  $v$  est la plus grande partie connexe de  $D_m(fg)$  contenant  $v$  et telle que pour tout  $v'$  de  $\mathcal{Z}_v(f, g)$  ou interposable dans  $\mathcal{Z}_v(f, g)$ , on ait  $Q_v^{f, g} = Q_{v'}^{f, g}$ . Si  $v'$  est un sommet de  $\mathcal{Z}_v(f, g)$ , on a alors  $\mathcal{Z}_v(f, g) = \mathcal{Z}_{v'}(f, g)$ .

Nous allons donner des critères qui permettent de caractériser les zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .

Soient  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(fg)$  et  $v'$  un voisin de  $v$  sur  $D_m(fg)$  tel que  $v \prec v'$ . Sur  $D(f)$ , le sommet  $v$  est sur un axe vertical obtenu après  $k$  transformations de Duval–Newton successives  $\Phi^1, \dots, \Phi^k$  (on peut avoir  $k = 0$  si  $v$  est sur le premier axe vertical de  $D(fg)$ ) et  $v'$  est obtenu après un certain nombre de transformations de Duval–Newton supplémentaires  $\Phi^j, j = k + 1, \dots, l$  (si  $v$  et  $v'$  sont sur le même axe vertical, on a  $l = k$ ). D’après le lemme 2.4,  $f \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(x_k, y_k) = y_k^{N_{k-1,f}} f^k(x_k, y_k)$  et  $g \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k(x_k, y_k) = y_k^{N_{k-1,g}} g^k(x_k, y_k)$ .

Soient  $\alpha$  la décoration proche de  $v$  située sur la géodésique  $[v, v']$  et  $\beta$  le produit des décorations proches de  $v$  autres que  $\alpha$ . Si  $v'$  est un sommet de rupture, soient  $\alpha'$  la décoration proche de  $v'$  située sur la géodésique  $[v, v']$  et  $\beta'$  le produit des décorations proches de  $v'$  autres que  $\alpha'$ .

**Définition 15** Soit  $f_1$  (resp.  $g_1$ ) le produit des branches de  $f$  (resp.  $g$ ) représentées par les flèches telles que la géodésique joignant  $v$  à une de ces flèches ne passe pas par  $v'$ . Soit  $f_2$  (resp.  $g_2$ ) le produit des branches de  $f$  (resp.  $g$ ) représentées par les flèches telles que la géodésique joignant  $v'$  à une de ces flèches ne passe pas par  $v$ . On a  $f = f_1 f_2$  et  $g = g_1 g_2$ .

**Remarque** Si  $v'$  est une flèche, alors  $f_2$  (resp.  $g_2$ ) est la composante de  $f$  (resp.  $g$ ) représentée par  $v'$ .

Il existe une face de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$  de vecteur directeur  $(p, -q)$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(p, q) = 1$  correspondant au sommet  $v$ . Soit  $w_k$  le poids défini par  $w_k(x_k) = q$  et  $w_k(y_k) = p$ .

Si  $v'$  est un sommet de rupture et si  $v$  et  $v'$  sont sur le même axe vertical, alors il existe une face de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$  de vecteur directeur  $(p', -q')$  avec  $p', q' \in \mathbb{N}^*$  et  $\text{pgcd}(p', q') = 1$ , correspondant au sommet  $v'$ . Soit  $w'_k$  le poids défini par  $w'_k(x_k) = q'$  et  $w'_k(y_k) = p'$ . Si  $v'$  est une flèche appartenant au même axe vertical que  $v$ , soit  $w'_k$  le poids défini par  $w'_k(x_k) = 1$  et  $w'_k(y_k) = 0$ . On définit les droites suivantes :

$$\begin{aligned} D_{f^k} : qa + pb &= w_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k), & D'_{f^k} : q'a + p'b &= w'_k(y_k^{N_{k-1,f}} f^k), \\ D_{g^k} : qa + pb &= w_k(y_k^{N_{k-1,g}} g^k), & D'_{g^k} : q'a + p'b &= w'_k(y_k^{N_{k-1,g}} g^k). \end{aligned}$$

Alors les deux points  $Q$  et  $Q'$  sont définis par  $\{Q\} := D_{f^k} \cap D'_{f^k}$  et  $\{Q'\} := D_{g^k} \cap D'_{g^k}$  (si  $v'$  est une flèche,  $Q$  est le point d’ordonnée maximale de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  et  $Q'$  le point d’ordonnée maximale de  $N(y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$ ). Il est aisé de voir que  $Q$  est un sommet de  $N(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$  et  $Q'$  un sommet de  $N(y_k^{N_{k-1,g}} g^k)$ . On a alors le résultat suivant.

**Proposition 3.3** Si  $D_m(fg)$  comporte au moins un sommet de rupture, soient  $v$  un sommet de rupture de  $D_m(fg)$  et  $v'$  un voisin de  $v$  sur  $D_m(fg)$  tel que  $v \prec v'$ .

(i) Lorsque  $v'$  est un sommet de rupture ou une flèche, si

$$(1) \quad \frac{w_k(y_k^{N_k-1,g} g^k)}{w_k(y_k^{N_k-1,f} f^k)} = \frac{w_k(y_k^{N_k-1,g_2} g_2^k)}{w_k(y_k^{N_k-1,f_2} f_2^k)},$$

alors  $]v, v'[ \subset \mathcal{Z}_v(f, g)$ . Sinon, l'arête  $]v, v'[$  est en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .

Si  $v$  et  $v'$  appartiennent au même axe vertical, alors la condition (1) est équivalente à la condition que  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(y_k^{N_k-1,f} f^k) \cup N(y_k^{N_k-1,g} g^k)$ .

(ii) Lorsque  $v'$  est un sommet de valence 1, alors  $]v, v'[ \subset \mathcal{Z}_v(f, g)$ .

Si  $D_m(fg)$  ne comporte pas de sommet de rupture, alors  $D_m(fg)$  est constitué de deux flèches  $v_1$  et  $v_2$  connectées par une arête et  $f(x, y) = x^a y^b (u + \sum x^\alpha y^\beta)$ ,  $g(x, y) = x^c y^d (u' + \sum x^{\alpha'} y^{\beta'})$ , où  $u, u' \in K^\times$ . Alors pour tout sommet  $v$  interposable entre  $v_1$  et  $v_2$ , si  $ad - bc \neq 0$ ,  $\mathcal{Z}_v(f, g) = \{v\}$  et si  $ad - bc = 0$ ,  $\mathcal{Z}_v(f, g) = ]v_1, v_2[$ .

**Démonstration** On suppose d'abord que  $D_m(fg)$  admet au moins un sommet de rupture.

(i) Soit  $v''$  un sommet interposable entre  $v$  et  $v'$ . Soient  $\alpha''$  la décoration proche de  $v''$  située sur l'arête  $]v, v''[$  et  $\beta''$  la décoration proche de  $v''$  située sur l'arête  $]v'', v'[$ . Soient  $\rho_v$  et  $\rho_{v''}$  des curvettes des sommets  $v$  et  $v''$ . On a

$$\begin{aligned} (f, \rho_v)_0 &= (f_1, \rho_v)_0 + (f_2, \rho_v)_0, & (g, \rho_v)_0 &= (g_1, \rho_v)_0 + (g_2, \rho_v)_0, \\ (f, \rho_{v''})_0 &= (f_1, \rho_{v''})_0 + (f_2, \rho_{v''})_0 = \frac{\beta''}{\alpha} (f_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha''}{\beta} (f_2, \rho_v)_0, \\ (g, \rho_{v''})_0 &= (g_1, \rho_{v''})_0 + (g_2, \rho_{v''})_0 = \frac{\beta''}{\alpha} (g_1, \rho_v)_0 + \frac{\alpha''}{\beta} (g_2, \rho_v)_0. \end{aligned}$$

Donc

$$Q_v^{f,g} = Q_{v''}^{f,g} \Leftrightarrow (\alpha\alpha'' - \beta\beta'')(f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (\alpha\alpha'' - \beta\beta'')(f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0.$$

Or  $\alpha\alpha'' - \beta\beta'' = \Delta_{]v,v''[} > 0$ , donc

$$\begin{aligned} Q_v^{f,g} = Q_{v''}^{f,g} &\Leftrightarrow (f_1, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0 \\ &\Leftrightarrow ((f_1, \rho_v)_0 + (f_2, \rho_v)_0)(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0((g_1, \rho_v)_0 + (g_2, \rho_v)_0) \\ &\Leftrightarrow (f, \rho_v)_0(g_2, \rho_v)_0 = (f_2, \rho_v)_0(g, \rho_v)_0 \\ &\Leftrightarrow N_{v,f}N_{v,g_2} = N_{v,f_2}N_{v,g} \Leftrightarrow N_{v,f}N_{v,g_1} = N_{v,f_1}N_{v,g}. \end{aligned}$$

Or d'après le lemme 2.4, on a  $N_{v,f} = w_k(y_k^{N_k-1,f} f^k)$ . Donc

$$Q_v^{f,g} = Q_{v''}^{f,g} \Leftrightarrow w_k(y_k^{N_k-1,f} f^k)w_k(y_k^{N_k-1,g_2} g_2^k) = w_k(y_k^{N_k-1,f_2} f_2^k)w_k(y_k^{N_k-1,g} g^k).$$

Si  $v$  et  $v'$  appartiennent au même axe vertical, soit  $v_0$  le sommet précédant  $v$  et  $v'$ , et soient  $a_0$  et  $p_0$  les décorations attenantes à  $v_0$  (cf. paragraphe 2.2). Avec les notations précédentes, on a  $\alpha = p$ ,  $\beta = a_0 p_0 p + q$ ,  $\beta' = p'$  et  $\alpha' = a_0 p_0 p' + q'$ . Posons  $Q = (x_1, x_2)$  et  $Q' = (x'_1, x'_2)$ . Par définition de  $Q$  et  $Q'$ , on a  $qx_1 + px_2 = N_{v,f}$ ,  $q'x_1 + p'x_2 = N_{v',f}$ ,  $qx'_1 + px'_2 = N_{v,g}$ , et  $q'x'_1 + p'x'_2 = N_{v',g}$  ( $p' = 0$  et  $q' = 1$  si  $v'$  est une flèche). Alors

$$\begin{aligned} Q_v^{f,g} = Q_{v'}^{f,g} &\Leftrightarrow \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} = \frac{(g, \rho_{v'})_0}{(f, \rho_{v'})_0} \Leftrightarrow \frac{N_{v,g}}{N_{v,f}} = \frac{N_{v',g}}{N_{v',f}} \\ &\Leftrightarrow \frac{qx'_1 + px'_2}{qx_1 + px_2} = \frac{q'x'_1 + p'x'_2}{q'x_1 + p'x_2} \\ &\Leftrightarrow (qx'_1 + px'_2)(q'x_1 + p'x_2) = (qx_1 + px_2)(q'x'_1 + p'x'_2) \\ &\Leftrightarrow (pq' - qp')(x_1x'_2 - x_2x'_1) = 0. \end{aligned}$$

Or  $pq' - qp' = \alpha(\alpha' - a_0 p_0 \beta') - (\beta - a_0 p_0 \alpha)\beta' = \alpha\alpha' - \beta\beta' = \Delta_{[v,v']} > 0$ . Donc  $Q_v^{f,g} = Q_{v'}^{f,g} \Leftrightarrow x_1x'_2 = x_2x'_1 \Leftrightarrow Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine.

(ii) Si  $v'$  est un sommet de valence 1, alors  $f_2 = g_2 = 1$ . Soient  $v''$  un sommet interposable entre  $v$  et  $v'$ ,  $\alpha''$  la décoration proche de  $v''$  située sur l'arête  $[v, v'']$  et  $\beta''$  la décoration proche de  $v''$  située sur l'arête  $[v'', v']$ . On a alors

$$(f, \rho_{v''})_0 = \frac{\beta''}{\alpha}(f_1, \rho_v)_0 \text{ et } (g, \rho_{v''})_0 = \frac{\beta''}{\alpha}(g_1, \rho_v)_0,$$

donc

$$\frac{Q_{v''}^{f,g}}{Q_v^{f,g}} = \frac{\frac{\beta''}{\alpha}(g_1, \rho_v)_0(f_1, \rho_v)_0}{\frac{\beta''}{\alpha}(f_1, \rho_v)_0(g_1, \rho_v)_0} = 1.$$

Si  $D_m(fg)$  ne comporte pas de sommet de rupture, alors il est constitué de deux flèches  $v_1$  et  $v_2$  connectées par une arête et  $f(x, y) = x^a y^b (u + \sum x^\alpha y^\beta)$  et  $g(x, y) = x^c y^d (u' + \sum x^{\alpha'} y^{\beta'})$  avec  $u, u' \in K^\times$ . Soient  $v$  et  $v'$  deux sommets interposables entre  $v_1$  et  $v_2$ ,  $\alpha$  (resp.  $\alpha'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur l'arête  $[v, v']$  et  $\beta$  (resp.  $\beta'$ ) la décoration proche de  $v$  (resp.  $v'$ ) située sur l'arête  $[v_1, v]$  (resp.  $[v', v_2]$ ). Alors

$$Q_v^{f,g} = Q_{v'}^{f,g} \Leftrightarrow \frac{\alpha d + \beta c}{\alpha b + \beta a} = \frac{\beta' d + \alpha' c}{\beta' b + \alpha' a} \Leftrightarrow (\alpha\alpha' - \beta\beta')(ad - bc) = 0.$$

Or  $\Delta_{[v,v']} = \alpha\alpha' - \beta\beta' > 0$  donc  $Q_v^{f,g} = Q_{v'}^{f,g} \Leftrightarrow ad - bc = 0$ . ■

On a alors une description exhaustive des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ . En particulier, les zones de stabilité ne recouvrent pas, en général, tout le diagramme minimal d'Eisenbud et Neumann de  $fg$ .

**Exemple 2** On considère

$$\begin{aligned} f(x, y) &= (y^2 - x^3)((y^3 - x^2)^2 + x^5 y)(y^7 + x^2), \\ g(x, y) &= (y^2 - x^2)((y^3 - x^2)^2 + 2x^5 y)(y^5 - x^2). \end{aligned}$$

Les trois zones de stabilité de  $D_m(fg)$  correspondant aux trois quotients de contact  $8/9$ ,  $1$  et  $13/15$  sont ici représentées en gras :

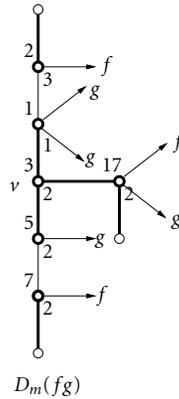


Figure 3

### 3.3 La nouvelle formulation

**Définition 16** On appelle *paquet* de  $\mathcal{J}$  issu du sommet  $v$  le produit des branches de  $\mathcal{J}$  qui se séparent de  $fg$  au sommet  $v$  de  $D_m(fg\mathcal{J})$ .

Evelia García Barroso utilise la même terminologie sur les diagrammes d'Eggers [GB]. Remarquons que le diagramme  $D_m(fg)$  est un sous-diagramme de  $D_m(fg\mathcal{J})$ , et ses zones de stabilités découpent  $D_m(fg\mathcal{J})$  en plusieurs zones. Le théorème 1.2 est maintenant équivalent au théorème suivant.

**Théorème 3.4** Soient  $f, g \in K[[x, y]]$ , deux germes non nuls admettant une singularité à l'origine et n'ayant pas de composante commune de type Abhyankar. Alors il n'y a aucun paquet de  $\mathcal{J}$  sortant sur  $D_m(fg\mathcal{J})$  en dehors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ . De plus, il y a au moins un paquet de  $\mathcal{J}$  qui se sépare de  $fg$  sur  $D_m(fg\mathcal{J})$  dans chaque zone de stabilité de  $D_m(fg)$ .

C'est le théorème 3.4 que nous allons démontrer. La définition des composantes communes de type Abhyankar est donnée ultérieurement (définition 19, §4.2).

## 4 Étude du germe jacobien

### 4.1 Pourquoi il suffit d'étudier le premier axe vertical de $D_m(fg)$ .

Soit  $v_{\alpha, \beta}$  un sommet du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  (i.e., un sommet de  $D_m(fg)$  situé sur le premier axe vertical de  $D(fg)$ ), portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus. Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On considère un

second axe vertical de  $D_m(fg)$  relié à  $v_{\alpha,\beta}$  par une arête correspondant à la transformation de Duval–Newton  $\Phi^1$  associée à une certaine racine  $a$ . On a alors  $f \circ \Phi^1 = y_1^{w(f)} f^1$  et  $g \circ \Phi^1 = y_1^{w(g)} g^1$ . Ce second axe vertical est le premier axe vertical de  $D_m(y_1^{w(f)} f^1 y_1^{w(g)} g^1)$ .

Considérons un sommet  $v$  du premier axe vertical de  $D_m(y_1^{w(f)} f^1 y_1^{w(g)} g^1)$  et  $w_1$  le poids associé à  $v$ . Alors

$$Q_v^{y_1^{w(f)} f^1, y_1^{w(g)} g^1} = \frac{(y_1^{N_{v_0,g}} g^1, \rho_v)_0}{(y_1^{N_{v_0,f}} f^1, \rho_v)_0} = \frac{w_1(y_1^{N_{v_0,g}} g^1)}{w_1(y_1^{N_{v_0,f}} f^1)} = \frac{p_1 N_{v_0,g} + w_1(g^1)}{p_1 N_{v_0,f} + w_1(f^1)}.$$

On applique le lemme 2.4 et la proposition 2.5. On a alors

$$Q_v^{y_1^{w(f)} f^1, y_1^{w(g)} g^1} = \frac{N_{v,g}}{N_{v,f}} = \frac{(g, \rho_v)_0}{(f, \rho_v)_0} = Q_v^{f,g},$$

où  $v$  est vu comme sommet du second axe vertical de  $D(fg)$ .

En particulier, les zones de stabilité de  $D_m(y_1^{w(f)} f^1 y_1^{w(g)} g^1)$  situées sur le premier axe vertical de  $D_m(y_1^{w(f)} f^1 y_1^{w(g)} g^1)$  sont les zones de stabilité de  $D_m(fg)$  situées sur le second axe vertical de  $D_m(fg)$ .

D’autre part,

$$\begin{aligned} J(y_1^{w(f)} f^1, y_1^{w(g)} g^1) &= J(f \circ \Phi^1, g \circ \Phi^1) = J(\Phi^1) J(f, g) \circ \Phi^1 \\ &= p y_1^{p+q-1+w(J)} J^1(f, g). \end{aligned}$$

Il suffit donc de savoir dans quelles zones du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  des paquets de  $J$  se séparent de  $fg$ . On saura alors dans quelles zones du premier axe vertical de  $D_m(y_1^{w(f)} f^1 y_1^{w(g)} g^1)$  des paquets de  $J(y_1^{w(f)} f^1, y_1^{w(g)} g^1)$  se séparent de  $y_1^{w(f)} f^1 y_1^{w(g)} g^1$ , c’est-à-dire, d’après ce qui précède, dans quelles zones du second axe vertical de  $D_m(fg)$  des paquets de  $J^1(f, g)$  se séparent de  $f^1 g^1$  et donc dans quelles zones du second axe vertical de  $D_m(fg)$  des paquets de  $J$  se séparent de  $fg$ . Par itération, ce fait est vrai pour tous les axes verticaux de  $D_m(fg)$ .

### 4.2 Principe de l’étude

Pour démontrer le théorème 3.4, nous allons étudier le déterminant de la matrice jacobienne  $J(f, g)$ . On rappelle que  $\mathcal{J}$  est le produit des composantes de  $J$  qui ne divisent pas  $fg$ . On va étudier chaque zone du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  et montrer qu’au moins un paquet de  $J$  se sépare de  $fg$  dans chaque zone de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  et qu’aucun paquet de  $J$  ne se sépare de  $fg$  en dehors des zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ .

Pour cela, on considère  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$  avec  $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$ , et  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On considère les trois droites  $D_f: \beta a + \alpha b = w(f)$ ,  $D_g: \beta a + \alpha b = w(g)$  et  $D_J: \beta a + \alpha b = w(J)$ , et les trois parties initiales  $in_w(f)$ ,

$in_w(g)$  et  $in_w(J)$ . On souhaite savoir à quels endroits  $J$  se sépare de  $fg$  sur  $D_m(fgJ)$  ; on veut donc étudier  $in_w(J)$  en fonction de  $in_w(f)$  et  $in_w(g)$ . On pose

$$in_w f(x, y) = Cx^{l_0} y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i},$$

$$in_w g(x, y) = C' x^{m_0} y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^\alpha - a'_j y^\beta)^{m_j}.$$

Soient  $L_r := l_r + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \beta$ ,  $M_s := m_s + \sum_{j=1}^{s-1} m_j \beta$ ,  $L_0 := l_0 + \sum_{i=1}^{r-1} l_i \alpha$  et  $M_0 := m_0 + \sum_{j=1}^{s-1} m_j \alpha$ . Alors les points  $P_0 := (L_0, l_r)$  et  $P_r := (l_0, L_r)$  (resp.  $P'_0 := (M_0, m_s)$  et  $P'_s := (m_0, M_s)$ ), qui peuvent être confondus, sont les deux extrémités de  $S_f = D_f \cap N(f)$  (resp.  $S_g = D_g \cap N(g)$ ).

Si  $J(in_w(f), in_w(g)) \neq 0$ , alors on a  $in_w(J) = J(in_w(f), in_w(g))$ . En revanche, lorsque  $J(in_w(f), in_w(g)) = 0$ , on ne sait plus calculer  $in_w(J)$ . On a le résultat bien connu [A, proposition 17.4, p. 122].

**Proposition 4.1**  $J(in_w(f), in_w(g)) = 0 \Leftrightarrow in_w(f)^{w(g)} = in_w(g)^{w(f)}$ .

**Définition 17** On est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  si  $in_w(f)^{w(g)} = in_w(g)^{w(f)}$ , ou de manière équivalente si  $r = s$ ,  $\{a_i\}_{i=1, \dots, r} = \{a'_j\}_{j=1, \dots, s}$  et  $\frac{m_j}{l_i} = \frac{w(g)}{w(f)}$  pour tout  $i \in \{0, \dots, r\}$ .

Dans ce cas, nous ne savons pas évaluer  $in_w(J)$ . D'autres cas particuliers que nous allons définir maintenant vont apparaître lors de l'étude du germe jacobien.

**Définition 18** On est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine  $a_{i_0}$  s'il existe  $i_0 \in \{1, \dots, r - 1\}$  et  $j_0 \in \{1, \dots, s - 1\}$  tels que  $a_{i_0} = a'_{j_0}$  et  $\frac{m_{j_0}}{l_{i_0}} = \frac{w(g)}{w(f)}$ . On est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine 0 (resp. la racine  $\infty$ ) si  $\frac{m_0}{l_0} = \frac{w(g)}{w(f)}$  (resp.  $\frac{m_s}{l_r} = \frac{w(g)}{w(f)}$ ).

**Lemme 4.2** Considérons deux sommets ou flèches  $v$  et  $v'$  voisins sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$ , et tels que  $v \prec v'$ . Soient  $w$  le poids associé à  $v$  et  $w'$  celui associé à  $v'$ . Alors on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport à  $w$  et à la racine 0 si et seulement si l'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport à  $w'$  et à la racine  $\infty$ .

**Démonstration** On définit les points  $P_0, P_r$  de  $N(f)$  et  $P'_0, P'_s$  de  $N(g)$  pour  $v$  et les points  $Q_0, Q_{r'}$  de  $N(f)$  et  $Q'_0, Q'_{s'}$  de  $N(g)$  pour  $v'$  comme ci-dessus. Il suffit de noter que comme  $v$  et  $v'$  sont voisins,  $P_0 = Q_{r'}$  et  $P'_0 = Q'_{s'}$ , et d'appliquer la définition 18. ■

**Lemme 4.3** On suppose que l'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine  $a_{i_0} \neq 0, \infty$ . Soit  $[v, v_1]$  l'arête associée à une racine  $a_{i_0}$ , et soit  $w_1$  le poids associé à  $v_1$ . Alors on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(y_1^{w(f)} f^1, y_1^{w(g)} g^1)$  par rapport au poids  $w_1$  et à la racine  $\infty$ .

**Démonstration** Soient  $in_w f(x, y) = Cx^b y^l \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i}$  et  $in_w g(x, y) = C'x^{m_0} y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^\alpha - a'_j y^\beta)^{m_j}$ . Si l'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine  $a_{i_0}$ , il existe  $i_0$  et  $j_0$  tels que  $a_{i_0} = a'_{j_0}$  et  $\frac{m_{j_0}}{l_{i_0}} = \frac{w(g)}{w(f)}$ . Soit  $\Phi^1(x_1, y_1) = (y_1^\beta (a_{i_0}^{\alpha'} + x_1), a_{i_0}^{\beta'} y_1^\alpha)$ , avec  $\alpha\alpha' - \beta\beta' = 1$ . On a  $f(x, y) = in_w(f)(x, y) + \sum_{\beta a + \alpha b > w(f)} A_{a,b} x^a y^b$ . Alors

$$\begin{aligned} f \circ \Phi^1(x_1, y_1) &= Ky_1^{w(f)} \left( x_1^{l_{i_0}} + \dots + \sum_{\beta a + \alpha b > w(f)} A_{a,b} a_{i_0}^{\beta' b} y_1^{\beta a + \alpha b - w(f)} (a_{i_0}^{\alpha'} + x_1)^a \right) \\ &= y_1^{w(f)} f^1(x_1, y_1), \end{aligned}$$

où les "... " désignent des termes d'ordre supérieur en  $x_1$ . On a donc  $w_1(y_1^{w(f)} f^1) = w(f)w_1(y_1) + l_{i_0} w_1(x_1)$ . De même, on obtient  $w_1(y_1^{w(g)} g^1) = w(g)w_1(y_1) + m_{j_0} w_1(x_1)$ . Donc

$$\frac{w_1(y_1^{w(g)} g^1)}{w_1(y_1^{w(f)} f^1)} = \frac{w(g)w_1(y_1) + m_{j_0} w_1(x_1)}{w(f)w_1(y_1) + l_{i_0} w_1(x_1)} = \frac{w(g)}{w(f)},$$

c'est-à-dire que l'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(y_1^{w(f)} f^1, y_1^{w(g)} g^1)$  par rapport au poids  $w_1$  et à la racine  $\infty$ . ■

On termine ce paragraphe par la définition des composantes communes de type Abhyankar qui sont les composantes pour lesquelles le théorème n'est plus valide.

**Définition 19** Soit  $\tilde{f} = \tilde{g}$  une composante commune à  $f$  et  $g$  représentée par la flèche  $v$  sur  $D_m(fg)$ , et soient  $v_0, \dots, v_n$  les sommets de rupture de  $D(f)$  rencontrés sur la géodésique qui joint le premier axe vertical à  $v$ . Soient  $w_0, \dots, w_n$  les poids associés aux sommets  $v_0, \dots, v_n$ , et  $a_0, \dots, a_n$  les racines associées aux arêtes  $[v_0, v_1], \dots, [v_{n-1}, v_n]$  et  $[v_n, v]$  (on a  $a_n = 0$ ). On dit que la composante commune  $\tilde{f} = \tilde{g}$  est de type Abhyankar si l'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(y_k^{w_{k-1}(f^{k-1})} f^k, y_k^{w_{k-1}(g^{k-1})} g^k)$  par rapport à  $w_{k-1}$  et à la racine  $a_{k-1}$  pour tout  $k = 1, \dots, n + 1$ .

### 4.3 Les cinq types de zones du premier axe vertical de $D_m(fg)$

Grâce à la proposition 3.3, nous savons localiser les zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  et les parties du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  situées en dehors des zones de stabilité. On peut discerner cinq types de zones sur le premier axe vertical de  $D_m(f)$  :

*Zones de type 1 :* Ce sont les zones du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  qui sont hors des zones de stabilité de  $D_m(fg)$ .

*Zones de type 2 :* Ce sont les zones de stabilité du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  qui ne contiennent qu'un sommet :  $\mathcal{Z}_v(f, g) = \{v\}$ .

*Zones de type 3 :* Ce sont les zones de stabilité qui contiennent deux sommets ou flèches  $v$  et  $v'$  voisins sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$  avec  $v \prec v'$  et tels que :

- on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  associé à  $v$  et à la racine  $0$ ,
- on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  (resp.  $w'$ ) associé à  $v$  (resp.  $v'$ ).

Alors  $[v, v'[\subset \mathcal{Z}_v(f, g)$  (si  $v'$  n'est pas un sommet de valence 1, on a aussi  $\mathcal{Z}_v(f, g) = \mathcal{Z}_{v'}(f, g)$ ) et les deux points  $Q$  et  $Q'$  définis au paragraphe 3.2 sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ .

*Zones de type 4 :* Ce sont les zones de stabilité qui contiennent un sommet de rupture  $v$  du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  tel que

- on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  associé à  $v$  et à une ou plusieurs racines  $a_i \neq 0, \infty$ ,
- on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  associé à  $v$ .

Alors si  $[v, v_i[$  est l'arête correspondant à la racine  $a_i$ ,  $[v, v_i[\subset \mathcal{Z}_v(f, g)$ .

*Zones de type 5 :* Ce sont les zones de stabilité qui contiennent un sommet de rupture  $v$  du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  tel qu'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  associé à  $v$ . Alors pour toutes les arêtes  $[v, v_i[$  connectées à  $v$ ,  $[v, v_i[\subset \mathcal{Z}_v(f, g)$ .

Nous allons étudier les cinq types de zones de  $D_m(fg)$ . Pour les zones de type 1–4, soient  $v$  un sommet de la zone ou interposable dans la zone et  $w$  le poids associé à  $v$ . Puisque l'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport poids  $w$ , d'après la proposition 4.1, on a  $in_w J(f, g) = J(in_w(f), in_w(g))$ .

## 5 Étude des cinq types de zones

### 5.1 Zones de type 1

**Proposition 5.1** *Il n'y a pas de paquet de  $J$  qui se sépare de  $fg$  dans les zones de type 1.*

**Démonstration** Si l'on est en dehors des zones de stabilité, il y a deux cas possibles :

(i)  $D_f \cap N(f) = \{Q\}$  et  $D_g \cap N(g) = \{Q'\}$ . Alors on a  $in_w f(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_1}$  et  $in_w g(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_1}$ . Donc  $in_w J(f, g)(x, y) = CC'(l_0m_1 - m_0l_1)x^{l_0+m_0-1}y^{l_1+m_1-1}$  et  $l_0m_1 - m_0l_1 \neq 0$  car sinon, on serait dans une zone de type 3. Donc l'intersection de  $N(J)$  et de  $D_J$  est un point. Par conséquent, aucun paquet de  $J$  ne sort dans cette zone sur  $D_m(fgJ)$ .

(ii) Il existe une face exceptionnelle  $S \in N(fg)$  : soit  $-1/p$  sa pente. On a  $p_{fg}(t) = (t - a)^n$ . D'après les règles de minimalisation des diagrammes, il n'y a

pas de sommet sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$  correspondant à la face  $S$ . Soit  $v'$  le sommet le plus haut du premier axe vertical de  $D_m(fg)$ . Soient  $p'$  et  $q'$  les décorations situées en dessous et au dessus de  $v'$ . Alors après minimalisation, l'arête correspondant à la racine  $a$  est reliée à  $v'$ . On a  $in_w(f) = Cx^{l_0}(x^p - ay)^l$  et  $in_w(g) = C'x^{m_0}(x^p - ay)^l$ . Alors  $in_w J(f, g)(x, y) = a(m_0l - l_0m)CC'x^{l_0+m_0-1}(x^p - ay)^{l+m-1}$ , et  $p_J(t) = (t-a)^{l+m-1}$ . Donc  $N(J)$  n'admet ni face pour la direction donnée par  $w$ , ni face de pente  $-\beta/\alpha$  telle que  $\beta/\alpha > q'/p'$ . Donc aucun paquet de  $J$  ne sort d'un sommet  $v_{\alpha,\beta}$  de la zone que l'on considère. ■

### 5.2 Zones de type 2

**Proposition 5.2** *On considère un sommet  $v_{\alpha,\beta}$  du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus, tel que  $Z_{v_{\alpha,\beta}}$  est une zone de type 2. Soit  $w$  le poids associé à  $v_{\alpha,\beta}$  et soient  $in_w f(x, y) = Cx^{l_0}y^{l_r} \prod_{i=1}^{r-1}(x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i}$  et  $in_w g(x, y) = C'x^{m_0}y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1}(x^\alpha - a'_j y^\beta)^{m_j}$ . Alors il y a un paquet de  $J$  de multiplicité comprise entre  $\min\{\alpha, \beta\} \max\{r - 1, s - 1\}$  et  $\min\{\alpha, \beta\}((r - 1) + (s - 1))$  qui se sépare de  $fg$  au sommet  $v_{\alpha,\beta}$  sur  $D_m(fgJ)$ .*

**Démonstration** On a

$$in_w J(f, g)(x, y) = CC'x^{l_0+m_0-1}y^{l_r+m_s-1} \prod_{i=1}^{r-1}(x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1}(x^\alpha - a'_j y^\beta)^{m_j-1} \\ \times \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} x^{2\alpha} + A_2^{i,j} x^\alpha y^\beta + A_3^{i,j} y^{2\beta}) \prod_{k \neq i} (x^\alpha - a_k y^\beta) \prod_{l \neq j} (x^\alpha - a'_l y^\beta),$$

où

$$A_1^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)}(l_0 m_s - m_0 l_r + m_s l_i (r-1)\alpha - l_r m_j \alpha (s-1)), \\ A_2^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)}(m_0 l_r - l_0 m_s + l_r m_j \alpha (s-1) + m_0 l_i (r-1)\beta \\ + l_i m_j (r-1)(s-1)\alpha\beta) a_i + \frac{1}{(r-1)(s-1)}(m_0 l_r - l_0 m_s \\ - l_0 m_j (s-1)\beta - m_s l_i (r-1)\alpha - l_i m_j (r-1)(s-1)\alpha\beta) a'_j, \\ A_3^{i,j} = \frac{1}{(r-1)(s-1)}(l_0 m_s - m_0 l_r - m_0 l_i (r-1)\beta + l_0 m_j (s-1)\beta) a_i a'_j.$$

Dans  $in_w J(f, g)$ , le coefficient du terme de plus haut degré en  $y$  est

$$(-1)^{r-2+s-2} \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} A_3^{i,j} \prod_{k \neq i} a_k \prod_{l \neq j} a'_l = (-1)^{r-2+s-2} (l_0 m_s - m_0 l_r) \prod_{i=1}^{r-1} a_i \prod_{j=1}^{s-1} a'_j,$$

et celui du terme de plus haut degré en  $x$  est  $\sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} A_1^{i,j} = (L_0 m_s - M_0 l_r)$ . Ils sont tous les deux non nuls car on est dans une zone de type 2, donc d'après la proposition 3.3, les points  $P_r$  et  $P'_s$  (resp.  $P_0$  et  $P'_0$ ) ne sont pas homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ . Donc  $p_{v_{\alpha,\beta},J}(t) = p_{J,1}(t)p_{J,2}(t)$ , où

$$p_{J,1}(t) = \prod_{i=1}^{r-1} (t - a_i)^{l_i-1} \prod_{j=1}^{s-1} (t - a'_j)^{m_j-1},$$

$$p_{J,2}(t) = \sum_{i=1}^{r-1} \sum_{j=1}^{s-1} (A_1^{i,j} t^2 + A_2^{i,j} t + A_3^{i,j}) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{r-1} (t - a_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{s-1} (t - a'_l).$$

Soit  $i_0 \in \{1, \dots, r - 1\}$ . Alors

$$p_{J,2}(a_{i_0}) = a_{i_0} l_{i_0} (M_0 \beta + m_s \alpha) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{r-1} (a_{i_0} - a_k) \prod_{j=1}^{s-1} (a_{i_0} - a'_j).$$

Donc  $a_{i_0}$  est racine de  $p_{J,2}$  si et seulement s'il existe  $j_0 \in \{1, \dots, s - 1\}$  tel que  $a'_{j_0} = a_{i_0}$ , et alors

$$p'_{J,2}(a_{i_0}) = a_{i_0} (l_0 m_{j_0} \beta - m_0 l_{i_0} \beta + L_r m_{j_0} \alpha - M_s l_{i_0} \alpha) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}} (a_{i_0} - a_k) \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j_0}} (a_{i_0} - a'_l)$$

qui s'annule si et seulement si

$$\frac{m_{j_0}}{l_{i_0}} = \frac{m_0 \beta + M_s \alpha}{l_0 \beta + L_r \alpha} = \frac{w(g)}{w(f)},$$

c'est-à-dire si l'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine  $a_{i_0} = a'_{j_0}$ . Or on est par hypothèse dans une zone de type 2, donc d'après la proposition 3.3, pour tout  $i_0 \in \{1, \dots, r - 1\}$ , on n'est pas dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport à  $w$  et à  $a_{i_0}$ . On a alors au plus  $\min\{r - 1, s - 1\}$  racines  $a_{i_0} = a'_{j_0}$  de  $p_{J,2}$  parmi les  $\{a_i, i = 1, \dots, r - 1, a'_j, j = 1, \dots, s - 1\}$  et ces racines sont racines simples. Or

$$\deg p_{J,2} = (r - 1) + (s - 1) > \min\{r - 1, s - 1\}.$$

Par conséquent,  $p_{J,2}$  admet au moins une racine distincte des  $a_i$  pour  $i = 1, \dots, r - 1$  et des  $a'_j$  pour  $j = 1, \dots, s - 1$  et il y a donc un paquet de  $J$  de multiplicité comprise entre  $\min\{\alpha, \beta\} \max\{r-1, s-1\}$  et  $\min\{\alpha, \beta\} \deg p_{J,2} = \min\{\alpha, \beta\}((r-1)+(s-1))$  qui sort au sommet  $v_{\alpha,\beta}$  de  $D_m(fgJ)$ . ■

### 5.3 Zones de type 3

**Proposition 5.3** Soient  $v_{\alpha,\beta}$  et  $v'_{\alpha',\beta'}$  deux sommets ou flèches voisins sur le premier axe vertical de  $D_m(fg)$  avec  $v_{\alpha,\beta} \prec v'_{\alpha',\beta'}$  tels que  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  est une zone de type 3. On suppose que  $v_{\alpha,\beta}$  est un sommet de rupture. Soit  $w$  le poids associé à  $v_{\alpha,\beta}$  et soient  $in_w f(x, y) = Cx^d y^l \prod_{i=1}^{r-1} (x^\alpha - a_i y^\beta)^{l_i}$  et  $in_w g(x, y) = C'x^{m_0} y^{m_s} \prod_{j=1}^{s-1} (x^\alpha - a'_j y^{\beta'})^{m_j}$ .

(i) Si  $v'_{\alpha',\beta'}$  est un sommet de rupture ou une flèche, soit  $w'$  le poids associé à  $v'_{\alpha',\beta'}$  et soient

$$in_{w'} f(x, y) = Dx^{l'_0} y^{l'_{r'}} \prod_{i=1}^{r'-1} (x^{\alpha'} - b_i y^{\beta'})^{l'_i},$$

$$in_{w'} g(x, y) = D'x^{m'_0} y^{m'_{s'}} \prod_{j=1}^{s'-1} (x^{\alpha'} - b'_j y^{\beta'})^{m'_j}.$$

Alors il existe un ou plusieurs paquets de  $J$  de multiplicité totale comprise entre  $\min\{(r-1+s-1)\alpha + (r'-1+s'-1)\alpha', (r-1+s-1)\beta + (r'-1+s'-1)\beta'\}$  et  $\min\{\alpha + \alpha', \beta + \beta'\}$  qui se séparent de  $fg$  dans  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}} = \mathcal{Z}_{v'_{\alpha',\beta'}}$ .

(ii) Si  $v'_{\alpha',\beta'}$  est un sommet de valence 1, il existe un ou plusieurs paquets de  $J$  de multiplicité totale comprise entre  $\alpha - 1$  et  $(r-1+s-1)\alpha - 1$  qui se séparent de  $fg$  dans  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$ .

**Remarque** Puisque par hypothèse,  $f$  et  $g$  n'ont pas de composantes communes de type Abhyankar, il est inutile de traiter le cas où  $v_{\alpha,\beta}$  et  $v'_{\alpha',\beta'}$  sont deux flèches. En effet, d'après la proposition 3.3, cela équivaudrait à  $f(x, y) = x^a y^b (u + \sum x^\alpha y^\beta)$ ,  $g(x, y) = x^c y^d (u' + \sum x^{\alpha'} y^{\beta'})$  avec  $u, u' \in K^\times$  et  $ad = bc$ , ce qui correspond à une composante commune  $x$  de type Abhyankar. En conséquence, l'hypothèse "v\_{\alpha,\beta} est un sommet de rupture" ne nuit pas à la généralité.

**Démonstration** Ici, on ne peut plus appliquer le même raisonnement que dans les zones de type 2 car on ne connaît plus le degré de  $p_{J,2}(t)$ .

(i) Supposons d'abord que  $v'_{\alpha',\beta'}$  est un sommet de rupture ou une flèche. On considère les poids  $w$  et  $w'$  définis par  $w(x) = \beta, w(y) = \alpha, w'(x) = \beta', w'(y) = \alpha'$ , les droites  $D_f, D'_f, D_g$  et  $D'_g$  définies par  $D_f: qa + pb = w(f), D'_f: q'a + p'b = w'(f), D_g: qa + pb = w(g)$  et  $D'_g: q'a + p'b = w'(g)$ , et les points  $Q$  et  $Q'$  définis par  $\{Q\} = D_f \cap D'_f$  et  $\{Q'\} = D_g \cap D'_g$ . De même que dans la démonstration de la proposition 5.2, on a  $in_w(J)(f, g)(x, y) = J_1(x, y) \cdot J_2(x, y)$ . Écrivons  $J_2$  sous la forme

$$J_2(x, y) = C_0 x^{(s-1+r-1)\alpha} + C_1 x^{(s-1+r-2)\alpha} y^\beta + \dots + C_{r-1+s-1} y^{(s-1+r-1)\beta}.$$

D'après la proposition 3.3,  $Q$  et  $Q'$  sont homothétiques par rapport à l'origine sur  $N(f) \cup N(g)$ , donc on a  $C_{r-1+s-1} = 0$ . Mais on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport à  $w$ , donc d'après la proposition 4.1, il existe un  $k$  avec  $0 \leq k < r-1+s-1$  tel que  $C_k \neq 0$ . On définit  $k_0 := \max\{k/C_k \neq 0\}$ . Le point

d'ordonnée maximale de  $N(J) \cap D_J$ , où  $D_J$  est la droite d'équation  $\beta a + \alpha b = w(J)$ , est alors  $D_1 = (l_0 + m_0 - 1 + (s - 1 + r - 1 - k_0)\alpha, L_r + M_s - 1 - (s - 1 + r - 1 - k_0)\beta)$ . Avec le même raisonnement pour  $w'$ , en posant  $k'_0 := \min\{k/C'_k \neq 0\}$ , on a  $0 < k'_0 \leq s' - 1$  et le point d'ordonnée minimale de  $N(J) \cap D'_J$ , où  $D'_J$  est la droite d'équation  $\beta' a + \alpha' b = w'(J)$ , est  $D_2 = (L'_0 + M'_0 - 1 - k'_0\alpha', l'_r + m'_s - 1 + k'_0\beta')$ . On a par construction  $l_0 = L'_0, m_0 = M'_0, L_r = l'_r$  et  $M_s = m'_s$ , donc  $l_0 + m_0 - 1 + (s - 1 + r - 1 - k_0)\alpha > L'_0 + M'_0 - 1 - k'_0\alpha'$  et  $L_r + M_s - 1 - (s - 1 + r - 1 - k_0)\beta < l'_r + m'_s - 1 + k'_0\beta'$ . Il existe donc au moins une face de  $N(J)$  de pente  $-q/p$  avec  $p, q \in \mathbb{N}^2$  et  $\text{pgcd}(p, q) = 1$  reliant  $D_1$  à  $D_2$  et vérifiant  $\beta/\alpha < q/p < \beta'/\alpha'$ .

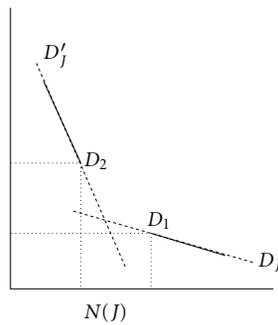


Figure 4

On est dans une zone de type 3, donc d'après la proposition 3.3,  $]v_{\alpha,\beta}, v'_{\alpha',\beta'}[ \subset \mathbb{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$ . Par conséquent, il y a au moins un sommet  $v \in \mathbb{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  tel qu'un paquet de  $J$  sorte en  $v$  sur  $D_m(fgJ)$ . De plus, on a

$$\begin{aligned} (l_0 + m_0 - 1 + (r - 1 + s - 1 - k_0)\alpha) - (L'_0 + M'_0 - 1 - k'_0\alpha') \\ = (r - 1 + s - 1 - k_0)\alpha + k'_0\alpha', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (l'_r + m'_s - 1 + k'_0\beta') - (L_r + M_s - 1 - (r - 1 + s - 1 - k_0)\beta) \\ = (r - 1 + s - 1 - k_0)\beta + k'_0\beta'. \end{aligned}$$

La multiplicité du ou des paquets de  $J$  qui se séparent de  $fg$  est égale au minimum de ces deux quantités. On a  $0 \leq k_0 < r - 1 + s - 1$  et  $0 < k'_0 \leq r' - 1 + s' - 1$ , donc elle est maximale pour  $k_0 = 0$  et  $k'_0 = r' - 1 + s' - 1$  et minimale pour  $k_0 = r - 1 + s - 2$  et  $k'_0 = 1$ .

**Remarque** Si  $v'_{\alpha',\beta'}$  est une flèche, on a

$$J(\text{in}_w(f), \text{in}_w(g)) = 0 \Leftrightarrow \text{in}_w(f)^{w(g)} = \text{in}_w(g)^{w(f)}$$

$\Leftrightarrow$  la composante représentée par la flèche  $v'_{\alpha',\beta'}$  est une composante commune de type Abhyankar.

(ii) Si  $v'_{\alpha',\beta'}$  est un sommet de valence 1, on a  $l_0 = m_0 = 0$ . Avec le même raisonnement, le point d'ordonnée maximale de  $N(J) \cap D_J$  est

$$D = ((s - 1 + r - 1 - k_0)\alpha - 1, L_r + M_s - 1 - (s - 1 + r - 1 - k_0)\beta).$$

On a  $\alpha > 1$  car sinon,  $v'_{\alpha',\beta'}$  disparaîtrait par minimalisation. Donc  $(s - 1 + r - 1 - k_0)\alpha - 1 \geq 1$ . Il existe donc au moins une face de  $N(J)$  de pente  $-q/p$  telle que  $q/p > \beta/\alpha$ . Comme on est dans une zone de type 3,  $]v_{\alpha,\beta}, v'_{\alpha',\beta'}[ \subset \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$ . Par conséquent, il y a au moins un paquet de  $J$  qui se sépare de  $fg$  dans  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$ . De plus, on a  $0 \leq k_0 < r - 1 + s - 1$ , donc sa multiplicité est comprise entre  $\alpha - 1$  et  $(r - 1 + s - 1)\alpha - 1$ . ■

### 5.4 Zones de type 4

**Proposition 5.4** On considère un sommet  $v_{\alpha,\beta}$  du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus, tel que  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  est une zone de type 4. Alors un ou plusieurs paquets de  $J$  se séparent de  $fg$  dans  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  sur  $D_m(fgJ)$ .

**Démonstration** Ici, on ne peut plus appliquer le même raisonnement que dans les zones de type 2 car on ne connaît plus la multiplicité des racines

$$\{a_i, i = 1, \dots, r - 1, a'_j, j = 1, \dots, s - 1\}$$

dans  $p_{J,2}(t)$ .

Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On est dans une zone de type 4, donc il existe une arête  $[v_{\alpha,\beta}, v_1]$  associée à une racine  $a \neq 0, \infty$  telle qu'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$  et à la racine  $a$ . D'après la proposition 3.3, on a  $[v_{\alpha,\beta}, v_1] \subset \mathcal{Z}_{v_1} = \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$ . Soit  $w_1$  le poids associé à  $v_1$ . D'après le lemme 4.3, on est dans la situation d'Abhyankar faible au sommet  $v_1$  pour  $(y_1^{w(f)} f^1, y_1^{w(g)} g^1)$  par rapport au poids  $w_1$  et à la racine  $\infty$ . Si  $v_1$  n'est pas dans une zone de type 4 du premier axe vertical de  $y_1^{w(f)} f^1 y_1^{w(g)} g^1$ , alors d'après la proposition 5.3, un paquet de  $J$  se sépare de  $fg$  dans  $]v_{\alpha,\beta}, v_1[ \subset \mathcal{Z}_{v_1} = \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  et on a le résultat. Sinon, il existe une arête horizontale  $[v_1, v_2]$  associée à une racine  $a_1$  telle qu'on est dans la situation d'Abhyankar faible pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w_1$  et à la racine  $a_1$  et  $[v_1, v_2] \subset \mathcal{Z}_{v_2} = \mathcal{Z}_{v_1}$ . On refait le même raisonnement pour  $v_2$ . Puisque  $f$  et  $g$  n'ont pas de composantes communes de type Abhyankar, il existe  $k$  tel que  $v_k$  n'est pas dans une zone de type 4. ■

### 5.5 Zones de type 5

**Proposition 5.5** On considère un sommet  $v_{\alpha,\beta}$  du premier axe vertical de  $D_m(fg)$  portant les décorations  $\alpha$  en dessous et  $\beta$  au dessus, tel que  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  est une zone de type 5. Alors un ou plusieurs paquets de  $J$  se séparent de  $fg$  dans  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}$  sur  $D_m(fgJ)$ .

**Démonstration** Soit  $w$  le poids défini par  $w(x) = \beta$  et  $w(y) = \alpha$ . On pose  $\delta_w(f, g) := w(J(f, g)) - (w(f) + w(g) - w(xy))$ . On a  $\delta_w(f, g) \in \mathbb{N}$  et il est aisé de voir que  $\delta_w(f, g) = 0$  si et seulement si l'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ .

On cherche tout d'abord à fabriquer un germe  $h$  combinaison algébrique de  $f$  et  $g$  et tel qu'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h)$  par rapport au poids  $w$ . On est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, g)$  par rapport au poids  $w$ , donc il existe  $c_1 \in K^*$  tel que  $in_w(g)^{w(f)} = c_1 in_w(f)^{w(g)}$ . Soit  $h_1 = g^{w(f)} - c_1 f^{w(g)}$ . Alors d'une part,  $w(h_1) > w(f)w(g)$ , et d'autre part,  $J(f, h_1) = w(f)g^{w(f)-1}J(f, g)$ . On a alors  $w(J(f, h_1)) = w(g)(w(f) - 1) + w(J(f, g))$ , donc

$$\delta_w(f, h_1) = \delta_w(f, g) + w(f)w(g) - w(h_1) < \delta_w(f, g).$$

Si  $\delta_w(f, h_1) = 0$ , alors on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h_1)$  par rapport au poids  $w$ .

Sinon, on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h_1)$  par rapport au poids  $w$  et donc il existe  $c_2 \in K^*$  tel que  $in_w(h_1)^{w(f)} = c_2 in_w(f)^{w(h_1)}$ . On pose alors

$$h_2 := h_1^{w(f)} - c_2 f^{w(h_1)}$$

et on recommence. La suite  $(\delta_w(f, h_k))_{k \geq 1}$  est strictement décroissante et à valeurs dans  $\mathbb{N}$ , donc il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $c_n \in K^*$  tels que  $h_n := h_{n-1}^{w(f)} - c_n f^{w(h_{n-1})}$  et

$$\delta_w(f, h_n) = 0.$$

On a donc construit des germes  $h_0, h_1, \dots, h_n$  définis par

$$h_0 = g, \quad h_i = h_{i-1}^{w(f)} - c_i f^{w(h_{i-1})} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

vérifiant  $in_w(h_{i-1})^{w(f)} = c_i in_w(f)^{w(h_{i-1})}$  pour  $i = 1, \dots, n$ , et tels qu'on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h_i)$  par rapport au poids  $w$  pour  $i = 0, \dots, n - 1$  et qu'on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h_n)$  par rapport au poids  $w$ .

**Lemme 5.6** On a  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_i) \subset \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_{i-1}) \subset D_m(fh_{i-1}h_i)$ .

**Démonstration** Supposons qu'il existe un sommet  $v'$  de  $D_m(fh_{i-1}h_i)$  tel que

$$\mathcal{Q}_{v'}^{f, h_{i-1}} \neq \mathcal{Q}_{v_{\alpha,\beta}}^{f, h_{i-1}} \quad v' \notin \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_{i-1}),$$

et soit  $w'$  le poids associé à  $v'$ . Alors si  $[v_{\alpha,\beta}, v']$  est verticale, d'après le lemme 2.4 et la proposition 2.5,

$$\mathcal{Q}_{v'}^{f, h_{i-1}} \neq \mathcal{Q}_{v_{\alpha,\beta}}^{f, h_{i-1}} \Leftrightarrow \frac{w'(h_{i-1})}{w'(f)} \neq \frac{w(h_{i-1})}{w(f)} \Leftrightarrow w'(h_{i-1})w(f) \neq w'(f)w(h_{i-1}).$$

On a  $h_i = h_{i-1}^{w(f)} - c_i f^{w(h_{i-1})}$  et  $in_w(h_{i-1})^{w(f)} = c_i in_w(f)^{w(h_{i-1})}$ , donc  $w(h_i) > w(h_{i-1})w(f)$ . Par conséquent,

$$Q_{v_{\alpha,\beta}}^{f,h_i} = \frac{w(h_i)}{w(f)} > w(h_{i-1}).$$

D'autre part,  $w'(h_i) = w'(h_{i-1}^{w(f)} - c_i f^{w(h_{i-1})}) = \min\{w'(h_{i-1})w(f), w'(f)w(h_{i-1})\}$  puisque  $w'(h_{i-1})w(f) \neq w'(f)w(h_{i-1})$ . Si  $w'(h_{i-1})w(f) < w'(f)w(h_{i-1})$ , alors

$$Q_{v'}^{f,h_i} = \frac{w'(h_i)}{w'(f)} = \frac{w'(h_{i-1})w(f)}{w'(f)} < w(h_{i-1}),$$

et si  $w'(h_{i-1})w(f) > w'(f)w(h_{i-1})$ , alors

$$Q_{v'}^{f,h_i} = \frac{w'(h_i)}{w'(f)} = w(h_{i-1}).$$

Dans les deux cas,  $Q_{v'}^{f,h_i} \neq Q_{v_{\alpha,\beta}}^{f,h_i}$  donc  $v' \notin \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_i)$ .

Le raisonnement est le même si  $[v_{\alpha,\beta}, v']$  est horizontale :  $v'$  est obtenu après  $k$  transformations de Duval–Newton  $\Phi^1, \dots, \Phi^k$ . Alors d'après le lemme 2.4 et la proposition 2.5,

$$\begin{aligned} (*) \quad Q_{v'}^{f,h_{i-1}} \neq Q_{v_{\alpha,\beta}}^{f,h_{i-1}} &\Leftrightarrow \frac{w'(y_k^{N_{k-1,h_{i-1}}} h_{i-1}^k)}{w'(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)} \neq \frac{w(h_{i-1})}{w(f)} \\ &\Leftrightarrow w(f)w'(y_k^{N_{k-1,h_{i-1}}} h_{i-1}^k) \neq w(h_{i-1})w'(y_k^{N_{k-1,f}} f^k). \end{aligned}$$

On a  $h_i = h_{i-1}^{w(f)} - c_i f^{w(h_{i-1})}$  donc d'une part,

$$Q_{v_{\alpha,\beta}}^{f,h_i} = \frac{w(h_i)}{w(f)} > w(h_{i-1}),$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} h_i \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k &= y_k^{N_{k-1,h_i}} h_i^k \\ &= (h_{i-1}^{w(f)} - c_i f^{w(h_{i-1})}) \circ \Phi^1 \circ \dots \circ \Phi^k \\ &= (y_k^{N_{k-1,h_{i-1}}} h_{i-1}^k)^{w(f)} - c_i (y_k^{N_{k-1,f}} f^k)^{w(h_{i-1})}. \end{aligned}$$

Donc comme on a (\*)

$$w'(y_k^{N_{k-1,h_i}} h_i^k) = \min\{w(f)w'(y_k^{N_{k-1,h_{i-1}}} h_{i-1}^k), w(h_{i-1})w'(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)\}.$$

Si  $w(f)w'(y_k^{N_{k-1,h_{i-1}}} h_{i-1}^k) > w(h_{i-1})w'(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ , alors

$$Q_{v'}^{f,h_i} = \frac{w'(y_k^{N_{k-1,h_i}} h_i^k)}{w'(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)} = w(h_{i-1}),$$

et si  $w(f)w'(y_k^{N_{k-1,h_{i-1}}} h_{i-1}^k) < w(h_{i-1})w'(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)$ , alors

$$Q_{v'}^{f,h_i} = \frac{w(f)w'(y_k^{N_{k-1,h_{i-1}}} h_{i-1}^k)}{w'(y_k^{N_{k-1,f}} f^k)} < w(h_{i-1}).$$

Dans les deux cas,  $Q_{v'}^{f,h_i} \neq Q_{v_{\alpha,\beta}}^{f,h_i}$  donc  $v' \notin \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_i)$ . ■

**Lemme 5.7** Soit  $v' \in \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_i) \subset D_m(fh_{i-1}h_i)$ , et soit  $w'$  le poids associé à  $v'$ . Alors on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h_{i-1})$  par rapport à  $w'$ .

**Démonstration** Supposons que  $[v_{\alpha,\beta}, v']$  est verticale. On a  $h_i = h_{i-1}^{w(f)} - c_i f^{w(h_{i-1})}$  et  $in_w(h_{i-1})^{w(f)} = c_i in_w(f)^{w(h_{i-1})}$ , donc  $w(h_i) > w(h_{i-1})w(f)$ . Par conséquent,  $Q_{v_{\alpha,\beta}}^{f,h_i} = \frac{w(h_i)}{w(f)} > w(h_{i-1})$ . Puisque  $v' \in \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_i)$ , on a  $Q_{v'}^{f,h_i} = Q_{v_{\alpha,\beta}}^{f,h_i}$ . Donc  $Q_{v'}^{f,h_i} > w(h_{i-1})$ , c'est à dire  $w'(h_i) > w(h_{i-1})w'(f)$ . Or  $w'(h_i) = w'(h_{i-1}^{w(f)} - c_i f^{w(h_{i-1})})$ . En utilisant la définition du poids, pour que  $w'(h_i) > w(h_{i-1})w'(f)$ , il faut que  $in_{w'}(h_{i-1})^{w(f)} = c_i in_{w'}(f)^{w(h_{i-1})}$ , c'est à dire que l'on soit dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h_{i-1})$  par rapport à  $w'$ . Comme dans le lemme 5.6, le raisonnement est le même si  $[v_{\alpha,\beta}, v']$  est horizontale. ■

On peut maintenant démontrer la proposition 5.5 : on a  $h_n = h_{n-1}^{w(f)} - c_n f^{w(h_{n-1})}$ , donc  $J(f, h_n) = w(f)h_{n-1}^{w(f)-1} J(f, h_{n-1})$ . De plus, on n'est pas dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h_n)$  par rapport au poids  $w$ , donc d'après les propositions 5.2, 5.3 et 5.4, il existe un paquet  $\gamma$  de  $J(f, h_n)$  qui se sépare de  $f$  et  $h_n$  à un sommet  $\nu$  de  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_n)$  sur  $D_m(fh_n)$ . Alors d'après le lemme 5.6,  $\nu \in \mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_{n-1})$  sur  $D_m(fh_{n-1}h_n)$ . D'autre part, d'après le lemme 5.7, on est dans la situation d'Abhyankar pour  $(f, h_{n-1})$  en  $\nu$ . Par conséquent,  $\gamma$  n'est pas un paquet de  $h_{n-1}$  car sinon, il ne se séparerait pas de  $f$ . Donc  $\gamma$  est un paquet de  $J(f, h_{n-1})$ . Finalement, il existe un paquet  $\gamma$  de  $J(f, h_{n-1})$  qui se sépare de  $f$  et  $h_{n-1}$  à un sommet  $\nu$  de  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, h_{n-1})$  sur  $D_m(fh_{n-1})$ .

Par récurrence, il existe un paquet  $\gamma$  de  $J(f, g)$  qui se sépare de  $f$  et  $g$  à un sommet  $\nu$  de  $\mathcal{Z}_{v_{\alpha,\beta}}(f, g)$  sur  $D_m(fg)$ . ■

### 6 Exemples

On considère

$$f(x, y) = (y^2 - x^3)((y^3 - x^2)^2 + x^5 y)(y^7 + x^2),$$

$$g(x, y) = (y^2 - x^2)((y^3 - x^2)^2 + 2x^5 y)(y^5 - x^2).$$

On obtient les diagrammes minimaux d'Eisenbud et Neumann suivants (les zones de stabilité sont représentées en gras), Figure 5.

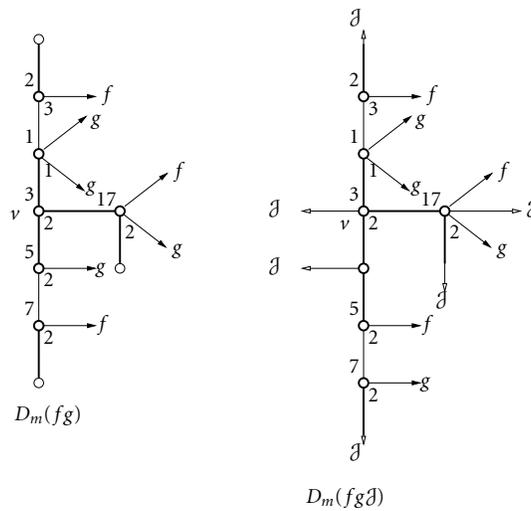


Figure 5

Au sommet  $v$ , on est dans la situation d’Abhyankar pour  $f$  et  $g$ . On constate sur le diagramme minimal d’Eisenbud et Neumann de  $fgJ$  qu’au moins un paquet de  $J$  se sépare de  $fg$  dans chaque zone de stabilité de  $D_m(fg)$ .

En revanche, nous allons voir sur l’exemple suivant que l’hypothèse “pas de composantes communes de type Abhyankar” du théorème 3.4 est indispensable. En effet, considérons

$$f(x, y) = (x^2 - y^3)(x^8 + y^9 + y^{10}), \quad g(x, y) = (x^2 - y^3)(x^6 + x^8 + y^{10}).$$

Ces deux germes ont une composante commune  $x^2 - y^3$  de type Abhyankar. Pour les diagrammes minimaux d’Eisenbud et Neumann, voir Figure 6.

Il y a trois zones de stabilité sur  $D_m(fg)$  correspondant aux trois quotients de contact  $4/5$ ,  $1$  et  $12/13$ . Cependant, l’ensemble des quotients jacobiens de  $(f, g)$  est  $\{4/5, 12/13\}$ .

En revanche, pour des composantes communes qui ne sont pas de type Abhyankar, le théorème est valide : soient

$$f(x, y) = (x^2 - y^3)(x^2 - y^5), \quad g(x, y) = (x^2 - y^3)(x^3 - y^2).$$

Ces deux germes ont une composante commune  $x^2 - y^3$  qui n’est pas de type Abhyankar. Pour les diagrammes minimaux d’Eisenbud et Neumann, voir Figure 7.

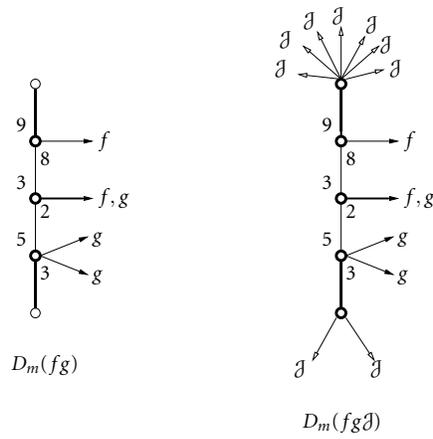


Figure 6

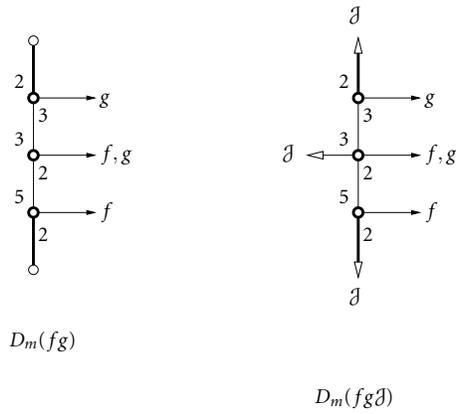


Figure 7

Au moins un paquet de  $\delta$  se sépare de  $fg$  dans chaque zone de stabilité de  $D_m(fg)$ .

**Remerciements** Je tiens à remercier particulièrement P. Cassou-Noguès qui m'a suggéré ce problème et qui m'a offert une écoute attentive et une aide conséquente sur ce sujet.

## Références

- [A] S. S. Abhyankar, *Lectures on Expansion Techniques in Algebraic Geometry*. Notes by Balwant Singh. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics 57, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1977.
- [BK] E. Brieskorn et H. Knörrer, *Plane Algebraic Curves*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1986.
- [CA] E. Casas-Alvero, *Singularities of plane curves*. London Mathematical Society Lecture Note Series 276. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [EN] D. Eisenbud et W. D. Neumann. *Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities*. Annals of Mathematics Studies 110, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1985.
- [GB] Evelia R. García Barroso, *Courbes polaires et courbure des fibres de Milnor des courbes planes*. Thèse de doctorat. Université Paris-7, 2000.
- [H] R. C. Heitmann, *On the Jacobian conjecture*. J. Pure Appl. Algebra **64**(1990), 35–72.
- [Hi] H. Hironaka, *Introduction to the theory of infinitely near singular points*. Memorias de Matematica del instituto Jorge Juan, 28, Consejo Superior de Investigaciones Cientificas, Madrid, 1974.
- [KP] T-C Kuo et A. Parusiński, *On Puiseux roots of Jacobians*. Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **78**(2002), no. 5, 55–59.
- [L] D. T. Lê, *Calcul du nombre de cycles évanouissants d'une hypersurface complexe*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **23**(1973) no. 4, 261–270.
- [LMW] D. T. Lê, F. Michel et C. Weber, *Sur le comportement des polaires associées aux germes de courbes planes*. Compositio Math. **72**(1989), no. 1, 87–113.
- [M] H. Maugendre, *Topologie des germes jacobiens*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I, **322**(1996), 945–948.
- [Me] M. Merle, *Invariants polaires des courbes planes*. Invent. Math. **41**(1977), no. 2, 103–111.
- [R] C. Reydy, *Étude d'invariants des germes de courbes planes à l'aide des diagrammes de Newton*. Thèse de doctorat, Université Bordeaux I, 2002.
- [T] B. Teissier, *Variétés polaires. I. Invariants polaires des singularités d'hypersurfaces*. Invent. Math. **40**(1977), no. 3, 267–292.

Laboratoire A2X  
Institut de Mathématiques  
351, cours de la Libération  
33405 Talence  
France  
e-mail: Carine.Reydy@math.u-bordeaux1.fr