UN THÉORÈME SUR L'ARITHMÉTIQUE DES GROUPES ORDONNÉS

K. E. AUBERT

La caractérisation fondamentale des sous-groupes du groupe additif R des nombres réels en tant que groupes ordonnés est la suivante:

A. *Un groupe abélien totalement ordonné G est isomorphe à un sous-groupe de R si et seulement si G est archimédien.*

Nous nous proposons ici de donner une nouvelle caractérisation des sous-groupes de R qui nous semble présenter un certain intérêt pour plusieurs raisons. D'abord elle est très différente de la caractérisation A ci-dessus, bien que notre démonstration utilise A. Puis elle ajoute un nouveau théorème de r-groupe à ceux déjà connus. Finalement, en employant les caractérisations des anneaux de valuation généraux et discrets données dans **(1)**, le théorème en question possède quelques corollaires parmi lesquels se trouve le théorème de s-groupe pour un domaine d'intégrité ("s-Gruppensatz" dans la terminologie de Krull **(5)**).

Cette note est étroitement liée avec l'article **(1)** auquel nous renvoyons pour plus de détails en ce qui concerne les définitions fondamentales relatives à la théorie des r-idéaux.

Soit G un groupe abélien ordonné filtrant qui est noté multiplicativement. Désignons par $\mathfrak{o}$ l'ensemble $\{x, x \geqslant e\}$ des éléments entiers de G (nous supposons que $G \neq \mathfrak{o}$. En particulier nous ne considérons ici que des domaines d'intégrité qui ne sont pas des corps). On dit que l'on a défini sur G un *r-système* si l'on a défini une application $\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}_r$ des parties bornées inférieurement de G dans l'ensemble des parties de G telle que

1. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_r$,
2. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}_r \to \mathfrak{a}_r \subseteq \mathfrak{b}_r$,
3. $\{a\}_r = a \cdot \mathfrak{o}$,
4. $a \cdot \mathfrak{b}_r = (a \cdot \mathfrak{b})_r$.

$\mathfrak{a}$ est un *r-idéal* (fractionnaire) si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_r$ et il est dit entier si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{o}$. En désignant par $\mathfrak{n}$ un ensemble fini, les quatre r-systèmes suivants se présentent d'une manière naturelle

$$(1) \quad \mathfrak{a}_s = \bigcup_{a \in \mathfrak{a}} a \cdot \mathfrak{o}, \qquad (2) \quad \mathfrak{a}_v = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq a \cdot \mathfrak{o}} a \cdot \mathfrak{o},$$

$$(3) \quad \mathfrak{a}_{vs} = \bigcup_{\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{n}_v, \qquad (4) \quad \mathfrak{a}_{s_v} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}} \mathfrak{n}_s.$$

Received March 11, 1965.

Si l'on définit une *r-multiplication*, notée $\circ_r$, dans l'ensemble des r-idéaux fractionnaires de G par $\mathfrak{a}_r \circ_r \mathfrak{b}_r = (\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})_r$, on sait que la condition suivante joue un rôle fondamental en arithmétique des domaines d'intégrité:

CONDITION DE r-GROUPE. *Les r-idéaux fractionnaires de G forment un groupe par rapport à la r-multiplication.*

Nous dirons en particulier qu'un domaine d'intégrité satisfait à la condition de r-groupe si son groupe de divisibilité y satisfait. Soit G le groupe de divisibilité d'un domaine d'intégrité et soit d le r-système induit sur G par les idéaux habituels de Dedekind. Ceci étant, on sait que la condition de r-groupe donne respectivement dans les cas $r = d$, $r = v_s$, $r = v$, et $r = s$ une caractérisation des anneaux de Dedekind, des anneaux de Krull ("Endliche diskrete Hauptordnungen"), des anneaux complètement intégralement clos et des anneaux de valuations discrets de rang un. En général nous allons appeler "théorème de r-groupe" un théorème qui caractérise les groupes satisfaisant à la condition de r-groupe.

Il est naturel de se demander si le cinquième cas $r = s_v$, donne aussi une caractérisation d'une classe d'anneaux bien connus. Nous allons voir que c'est en effet le cas en démontrant le théorème suivant:

THÉORÈME ("Théorème de s_v-groupe"). *Le groupe abélien filtrant G est isomorphe à un sous-groupe du groupe additif des nombres réels si et seulement si G satisfait à la condition de s_v-groupe — c'est a dire si et seulement si les s_v-idéaux fractionnaires de G forment un groupe par rapport à la s_v-multiplication.*

La démonstration repose sur les deux lemmes suivants.

LEMME 1. *Si G satisfait à la condition de s_v-groupe alors $\mathfrak{o}$ est complètement intégralement clos dans G.*

Démonstration. Si les s_v-idéaux forment un groupe par rapport à la s_v-multiplication chaque s_v-idéal est de la forme $\mathfrak{a}^{-1}$ et est donc un v-idéal (**1**, Lemme 2). Ceci montre que $s_v = v$ et d'après le théorème de v-groupe $\mathfrak{o}$ est complètement intégralement clos dans G.

LEMME 2. *Si G satisfait à la condition de s_v-groupe, G est totalement ordonné.*

Démonstration. Dans le cas où G est le groupe de divisibilité d'un domaine d'intégrité I, ceci résulte immédiatement de l'égalité $s_v = v$ établie dans la démonstration précédente et de (**1**, Théorème 1), qui affirme que cette égalité entraîne que I est un anneau de valuation. Donnons maintenant une démonstration qui ne fait pas intervenir le d-système et qui est donc valable pour un groupe abélien filtrant quelconque.

Supposons que G vérifie la condition de s_v-groupe. Les s_v-idéaux de G forment donc en particulier un demi-groupe avec règle de simplification par rapport à la s_v-multiplication. Mais cette règle de simplification (par rapport à l'égalité) entraîne la règle de simplification par rapport à l'inclusion $\subseteq$. En effet d'une inclusion $\mathfrak{a}_r \circ_r \mathfrak{b}_r \subseteq \mathfrak{a}_r \circ_r \mathfrak{c}_r$ il résulte

$$\mathfrak{a}_r \circ_r \mathfrak{c}_r = (\mathfrak{a}_r \circ_r \mathfrak{b}_r) \cup (\mathfrak{a}_r \circ_r \mathfrak{c}_r) = \mathfrak{a}_r \circ_r (\mathfrak{b}_r \cup \mathfrak{c}_r).$$

D'où si la règle de simplification par rapport à l'égalité est valable $\mathfrak{c}_r = \mathfrak{b}_r \cup \mathfrak{c}_r$, et donc $\mathfrak{b}_r \subseteq \mathfrak{c}_r$. Il est clair que pour les s-idéaux nous avons

$$(1, a)_s \subseteq (a, a^{-1})_s \circ_s (1, a)_s.$$

Puisque chaque s-idéal fini est un s_v-idéal, il s'en suit que

$$(1, a)_{s_v} \subseteq (a, a^{-1})_{s_v} \circ_{s_v} (1, \mathrm{a})_{s_v}$$

et, d'après la remarque générale ci-dessus en simplifiant par $(1, a)_{s_v}$,

$$1 \in (a, a^{-1})_{s_v} = (a, a^{-1})_s.$$

Ceci signifie qu'on a ou bien $a \in \mathfrak{o}$ ou bien $a^{-1} \in \mathfrak{o}$ et G est bien totalement ordonné.

Démonstration du théorème de s_v-groupe. Si G satisfait à la condition de s_v-groupe les deux lemmes ci-dessus montrent que G est totalement ordonné et que $\mathfrak{o}$ est complètement intégralement clos dans G, ce qui signifie que G est archimédien. La caractérisation A montre alors que G est isomorphe à un sous-groupe de R.

Inversement soit R_0 un sous-groupe de R. Puisque R_0 est totalement ordonné, chaque s_v-idéal de R_0 est un v-idéal. R_0 étant archimédien satisfait à la condition de v-groupe, donc aussi à la condition ce s_v-groupe.

Corollaire 1. *Un domaine d'intégrité I est un anneau de valuation de rang un — c'est a dire un anneau de valuation à valeurs réelles — si et seulement si les s_v-idéaux fractionnaires non-nuls de I forment un groupe par rapport à la s_v-multiplication.*

Corollaire 2. *Un domaine d'intégrité I satisfait à la condition de s-groupe si et seulement si I satisfait à la fois à la condition de s_v-groupe et à la condition de d-groupe, ou bien à la fois à la condition de s_v-groupe et à la condition de v_s-groupe.*

Ceci résulte des théorèmes de d-groupe, de v_s-groupe et de s-groupe caractérisant respectivement les anneaux de Dedekind, les anneaux de Krull et les anneaux de valuation discrets de rang un. Mais il est ici intéressant de noter qu'on peut facilement démontrer ce corollaire sans connaître ces trois théorèmes. En effet le théorème de s_v-groupe entraîne que I est un anneau de valuation et par suite $s = d$ (**1**, Théorème 1). Grâce à la condition de s_v-groupe la condition de d-groupe coïncide donc avec la condition de s-groupe. Même raisonnement si l'on remplace d par v_s.

Corollaire 3. ("Théorème de s-groupe"). *Le domaine d'intégrité I est un anneau de valuation discret de rang un si et seulement si les s-idéaux fractionnaires (non-nuls) de I forment un groupe par rapport à la s-multiplication.*

Le fait qu'un anneau de valuation discret de rang un satisfait à la condition de s-groupe est évident. Inversement si I satisfait à la condition de s-groupe il satisfait d'après le Corollaire 2 à la fois à la condition de s_v-groupe et à la condition de d-groupe. La condition de s_v-groupe entraîne que I est un anneau de valuation de rang un, donc en particulier $s = d$. La condition de d-groupe entraîne $d = v$. Par suite $s = v$ et I est un anneau de valuation discret de rang un d'après **(1**, Théorème 2**)**.

COROLLAIRE 4. *Il n'y a que le groupe R et ses sous-groupes discrets $rZ(r \in R)$ où chaque s_v-idéal est principal.*

Remarque 1. Il est clair que la partie du Corollaire 2 qui ne concerne pas le d-système et le Corollaire 3 sont valables non seulement dans le cas d'un groupe de divisibilité mais aussi pour un groupe abélien filtrant quelconque. Le fait que ces deux cas sont distincts a été montré par P. Jaffard **(4)**, qui a construit un groupe abélien filtrant non-représentable comme groupe de divisibilité d'un domaine d'intégrité. Mais les démonstrations données ci-dessus ne s'étendent pas immédiatement aux groupes abéliens filtrants quelconques parce qu'elles reposent sur la caractérisation des anneaux de valuation discrets et celle des anneaux de valuation généraux par les égalités $s = v$ et $s = v_s$ respectivement, or ces caractérisations sont démontrées dans **(1)** par l'intermédiaire du d-système.

Remarque 2. Comme l'a montré H. Cartan **(3)** la caractérisation A est en particulier valable sans l'hypothèse que G soit commutatif. Avec des définitions convenables les résultats de cette note sont eux aussi valables sans l'hypothèse de commutativité. Pour l'extension non-commutative des résultats de **(1)** nous pouvons renvoyer le lecteur à **(2)**.

RÉFÉRENCES

1. K. E. Aubert, *Some characterizations of valuation rings*, Duke Math. J., *21* (1954), 517–525.
2. ——— *Contribution à la théorie des idéaux et à la théorie des valuations* (Thèse, Paris, 1957).
3. H. Cartan, *Un théorème sur les groupes ordonnés*, Bull. Sci. Math., *63* (1939), 201–205.
4. P. Jaffard, *Un exemple concernant les groupes de divisibilité*, C. R. Acad. Sci. Paris, *243* (1956), 1264–1266.
5. W. Krull, *Idealtheorie* (Berlin, 1935).

University of Washington, Seattle, and
University of Oslo, Norway

https://doi.org/10.4153/CJM-1967-003-2 Published online by Cambridge University Press