Can. J. Math. Vol. **50** (2), 1998 pp. 242–265.

INTÉGRATION DU SOUS-DIFFÉRENTIEL PROXIMAL: UN CONTRE EXEMPLE

JOËL BENOIST

RÉSUMÉ. Etant donnée une partie D dénombrable et dense de $\mathbb{R}$, nous construisons une infinité de fonctions Lipschitziennes définies sur $\mathbb{R}$, s'annulant en zéro, dont le sous-différentiel proximal est égal à $]-1,1[$ en tout point de D et est vide en tout point du complémentaire de D. Nous déduisons que deux fonctions dont la différence n'est pas constante peuvent avoir les mêmes sous-différentiels.

1. **Introduction.** Pour une fonction localement Lipschitzienne $f\colon \mathbb{R}^h \longrightarrow \mathbb{R}$ (*i.e.*, pour tout $R > 0$, il existe $K > 0$ tel que $|f(x)-f(y)| \leq K\|x-y\|$ dès que $\|x\| \leq R$ et $\|y\| \leq R$) et pour $x \in \mathbb{R}^h$, on définit le sous-différentiel proximal [9] de f en x, noté $\partial^\pi f(x)$, comme l'ensemble convexe formé des vecteurs ξ de $\mathbb{R}^h$ pour lesquels il existe une constante $\sigma > 0$ telle que

$$f(y) \geq f(x) + \langle \xi, y-x\rangle - \sigma\|y-x\|^2 \quad \text{pour } y \text{ proche de } x$$

($\partial^\pi f$ peut être défini plus généralement pour des fonctions s.c.i., mais cette généralité est inutile ici). Notons l'importance de ce sous-différentiel puisqu'il est lié à la construction géométrique du fameux sous-différentiel de Clarke (voir [1]), noté $\partial^c f$, par la formule (voir Rockafellar [9])

$$\partial^c f(x) = co\Big\{\xi \in \mathbb{R}^h : \exists x_n \longrightarrow x, \exists \xi_n \longrightarrow \xi \text{ avec } \xi_n \in \partial^\pi f(x_n)\Big\}, \tag{1}$$

ce dernier jouant un rôle clef dans le domaine de l'Analyse non lisse. Remarquons que l'on peut facilement estimer ce sous-différentiel dans les quatres situations simples suivantes:

PROPOSITION 1.1. *Nous avons:*

(1) si f est convexe, $\partial^\pi f$ coincide avec le sous-différentiel de l'Analyse convexe;
(2) si f est de classe C^2, $\partial^\pi f(x) = \{\nabla f(x)\}$, où $\{\nabla f(x)\}$ désigne le gradient de f en x;
(3) si f est différentiable en x, $\partial^\pi f(x) \subset \{\nabla f(x)\}$;
(4) si $f(x) = -\|x\|$ (resp. $f(x) = -\|x\|^{\frac{3}{2}}$), $\partial^\pi f(0) = \emptyset$.

Mais beaucoup d'autres propriétés espérées sont encore mal connues; en particulier, l'information principale sur la «taille» du domaine du sous-différentiel, noté $\operatorname{dom}\partial^\pi f = \{x \in \mathbb{R}^h : \partial^\pi f(x) \neq \emptyset\}$ se trouve dans la proposition suivante.

Reçu par les éditeurs le 3 février, 1997.
Classification (AMS) par sujet : 26A16, 26A24.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

PROPOSITION 1.2. dom $\partial^{\pi} f$ *est dense dans* $\mathbb{R}^h$.

En particulier dom $\partial^{\pi} f$ est au moins dénombrable. Le Théorème 2.1 montre que l'on ne peut pas faire mieux, puisqu'il existe des fonctions où dom $\partial^{\pi} f$ est dénombrable. Ce résultat est d'autant plus surprenant que l'on peut choisir de manière arbitraire l'ensemble dénombrable en question, en prenant $\mathbb{Q}$ par exemple! Signalons que l'existence d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que dom $\partial^{\pi} f$ soit de mesure nulle (voir Clarke, Ledyaev et Wolenski [4]) allait déjà dans ce sens.

Un problème d'actualité (voir par exemple dans l'introduction de Poliquin [7]) est de savoir si, pour deux fonctions localement Lipschitziennes f et g, la condition $\partial^{\pi} f = \partial^{\pi} g$ entraîne que $f - g$ est constante. Nous pouvons répondre positivement dans les situations simples et bien connues suivantes:

· f et g sont convexes (voir Rockafellar [8]);
· f et g sont concaves (car, par la formule (1) du sous-différentiel de Clarke, $\partial^{c} f = \partial^{c} g$ ce qui entraîne (voir Clarke [2]) $\partial^{c}(-f) = \partial^{c}(-g)$; on retombe alors dans le cas précédent);
· f et g sont de classe C^1 (car alors, grâce à la Proposition 1.1 (3) et la Proposition 1.2, les gradients coincident);
· $\partial^{\pi} f$ et $\partial^{\pi} g$ sont non vides presque partout (un théorème de Rademacher (voir par exemple [11]) nous dit qu'une fonction localement Lipschitzienne est différentiable presque partout, donc, par la Proposition 1.1 (3), les gradients coincident presque partout; il suffit alors d'intégrer pour conclure).

Citons aussi les travaux récents de Clarke et Redheffer [3] et de Poliquin [7] qui répondent aussi positivement et partiellement à ce problème (dans le cadre des fonctions s.c.i.). Par contre, sans adjonction d'hypothèse, le Corollaire 2.6 répond négativement au problème posé.

2. **Enoncés des résultats.**

Le résultat principal de ce papier est le suivant.

THÉORÈME 2.1. *Soit D une partie dénombrable et dense de $\mathbb{R}$; il existe alors une infinité de fonctions Lipschitziennes $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, s'annulant en zéro, telles que $\partial^{\pi} f(x) =]-1, 1[$, si $x \in D$, et $\partial^{\pi} f(x) = \emptyset$, sinon.*

La preuve est donnée dans les sections 3 et 4.

REMARQUE 2.2. Une première idée pour démontrer ce théorème serait de reprendre le contre-exemple suivant, donné par Rockafellar [10]: si A est une partie mesurable de $\mathbb{R}$ telle que l'intersection de A et l'intersection du complémentaire de A avec tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ ont une mesure non nulle, et si $f(x) = \int_0^x 1_A(t)\, dt$ alors

$$\partial^{c} f(x) = [0, 1], \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Mais le calcul du sous-différentiel proximal de f à l'aide de la géométrie de A semble difficile et reste un problème ouvert.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

REMARQUE 2.3. Les fonctions Lipschitziennes construites dans la preuve du Théorème 2.1 sont de même nature que celle donnée dans le papier de Jouini [6]. Dans cet article, l'auteur donne une construction géométrique, de type fractale, d'une fonction vérifiant la relation (2). Remarquons que si une fonction f satisfait aux hypothèses du Théorème 2.1, alors $\frac{f+\mathrm{id}_{\mathbb{R}}}{2}$ vérifie aussi cette relation.

Choisissons une fonction f satisfaisant les conditions de l'énoncé du Théorème 2.1 associée à une partie D dénombrable et dense de $\mathbb{R}$. En considérant alors la partie $D^h = D \times \cdots \times D$, le convexe $C^h =]-1, 1[\times \cdots \times]-1, 1[$ et la fonction $f^h : \mathbb{R}^h \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $(x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{R}^h$ par $f^h(x_1, \ldots, x_h) = f(x_1) + \cdots + f(x_h)$, nous avons pour tout $(x_1, \ldots, x_h) \in \mathbb{R}^h$:

$$\partial^\pi f^h(x_1, \ldots, x_h) = \partial^\pi f(x_1) \times \cdots \times \partial^\pi f(x_h).$$

Nous obtenons alors une version affaiblie du Théorème 2.1 dans $\mathbb{R}^h$.

THÉORÈME 2.4. *Il existe une partie D^h dénombrable et dense de $\mathbb{R}^h$, un convexe C^h de $\mathbb{R}^h$ et une infinité de fonctions Lipschitziennes $f^h : \mathbb{R}^h \longrightarrow \mathbb{R}$, s'annulant en zéro, telles que $\partial^\pi f^h(x) = C^h$, si $x \in D^h$, et $\partial^\pi f^h(x) = \emptyset$, sinon.*

REMARQUE 2.5. Un convexe vérifiant les conditions du Théorème 2.4 est nécessairement borné et contient au moins deux points (non vide par la Proposition 1.2, non réduit à un point et borné grâce à [3]). Une question encore ouverte et très fine est de savoir si le Théorème 2.4 reste encore valable pour toute partie dénombrable et dense de $\mathbb{R}^h$ et pour tout convexe borné de $\mathbb{R}^h$ contenant au moins deux points.

Nous sommes maintenant en mesure de répondre à un problème posé au début des années 90.

COROLLAIRE 2.6. *Il est possible d'exhiber deux fonctions Lipschitziennes dont la différence n'est pas constante mais qui ont en tout point le même sous-différentiel proximal.*

3. **Plan de la preuve du Théorème 2.1.** Comme la différence algébrique $\mathbb{Z} - D$ est dénombrable, il existe un réel x n'appartenant pas à $\mathbb{Z} - D$, soit $D + \{x\} \cap \mathbb{Z} = \emptyset$. Par translation, on peut donc se ramener au cas où $D \cap \mathbb{Z} = \emptyset$.

Une fonction candidate f sera définie comme limite d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 1-Lipschitziennes. Chaque fonction f_n est associée à une suite de réels $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, le tout étant défini par récurrence avec les conditions initiales $a_{0,k} = k$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $f_0 = (1 - \frac{1}{\ell})\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, où ℓ est un entier naturel, supérieur à deux, qui joue le rôle de paramètre. Le choix d'une infinité de valeurs possibles pour le paramètre ℓ nous permettra de trouver une infinité de fonctions satisfaisant les conditions du Théorème 2.1.

Nous prendrons dans la suite les notations suivantes.

NOTATIONS.

NOTATION 1. On numérote les éléments de D sous la forme $D = \{d_i : i \in \mathbb{N}\}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

NOTATION 2. On pose $A = \{a_{n,k} : (n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}\}$ et, si $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \{a_{n,k} : a_{n,k} \in D\}$.

NOTATION 3. Si $(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{Z}$, $r_{n,k}$ désigne le reste de la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de k par 7^n.

NOTATION 4. Si, pour $n \in \mathbb{N}$, I_n désigne l'intervalle $\left]-\frac{1}{(n+\ell+1)^4}, \frac{1}{(n+\ell+1)^4}\right[$, notons

$$P_n^+ = \left\{1 - \frac{1}{n+\ell}\right\} + I_n \quad \left(\text{resp. } P_n^- = \left\{-1 + \frac{1}{n+\ell}\right\} + I_n\right),$$

si $n \geq 1$, et $P_0^+ = \{1 - \frac{1}{n+\ell}\}$ (resp. $P_0^- = \emptyset$), si $n = 0$. Ces parties représenteront l'ensemble des pentes positives (resp. négatives) admissibles pour f_n; on a alors le lemme suivant qui nous sera utile dans la section 4.

LEMME 3.1. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup P_n^+ < \inf P_{n+1}^+$ (resp. $\sup P_{n+1}^- < \inf P_n^-$); de plus, nous avons l'inclusion $P_n^+ \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right[$ (resp. $P_n^- \subset \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$).*

PREUVE. Nous avons, pour $n \geq 1$, $P_n^- = -P_n^+$; le résultat sur les pentes négatives sera alors une conséquence de celui sur les pentes positives.

Nous allons tout d'abord démontrer l'inégalité suivante, vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - \frac{1}{n+\ell} + \frac{1}{(n+\ell+1)^4} < 1 - \frac{1}{n+\ell+1} - \frac{1}{(n+\ell+2)^4}. \tag{3}$$

En posant $N = n + \ell + 1 \geq 3$, cela revient à prouver

$$1 - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N^4} < 1 - \frac{1}{N} - \frac{1}{(N+1)^4}$$

ou de manière équivalente

$$\frac{1}{N^4} + \frac{1}{(N+1)^4} < \frac{1}{N(N-1)}.$$

En remarquant que $\frac{1}{(N+1)^4} \leq \frac{1}{N^4}$ et $\frac{1}{N} \leq \frac{1}{N-1}$, il suffit de vérifier que $\frac{2}{N^4} < \frac{1}{N^2}$, soit $2 < N^2$; cette dernière inégalité est évidente vu que l'entier N est supérieur à 3.

Grâce à la relation (3), nous avons, pour $n \geq 1$,

$$\sup P_n^+ < \inf P_{n+1}^+. \tag{4}$$

De plus, en appliquant la relation (3) pour $n = 0$,

$$\sup P_0^+ = 1 - \frac{1}{\ell} \leq 1 - \frac{1}{\ell} + \frac{1}{(\ell+1)^4} < 1 - \frac{1}{\ell+1} - \frac{1}{(\ell+2)^4} = \inf P_1^+,$$

et la relation (4) est encore vraie pour $n = 0$.

Pour la deuxième partie du lemme, c'est immédiat si $n = 0$; supposons désormais que $n \geq 1$. nous avons tout d'abord l'inclusion évidente $P_n^+ \subset [\inf P_n^+, \sup P_n^+]$. Or, par la relation (4), $\sup P_n^+ < \inf P_{n+1}^+ \leq 1$ et $\inf P_n^+ \geq \sup P_{n-1}^+ > 1 - \frac{1}{n-1+\ell} \geq 1 - \frac{1}{\ell} \geq \frac{1}{2}$. Ainsi nous concluons $P_n^+ \subset \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, si $n \geq 1$. ■

Nous imposerons aussi les conditions suivantes, nécessaires pour effectuer les calculs sur le sous-différentiel proximal ($n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$).

(C1) CONDITIONS PORTANT SUR LA SUITE $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.

(i) $a_{n,k} < a_{n,k+1}$;

(ii) si $n \geq 1$, $a_{n,7k} = a_{n-1,k}$;[1]

(iii) si $r_{n,k}$ est pair non nul, alors $a_{n,k} \in D$; sinon $a_{n,k} \notin D$;

(iv) $|a_{n,k+1} - a_{n,k}| \leq \frac{1}{2^n}$.

(C2) CONDITIONS PORTANT SUR LES FONCTIONS f_n.

(i) f_n est continue sur $\mathbb{R}$;

(ii) f_n est affine sur chaque intervalle de la forme $[a_{n,k}, a_{n,k+1}]$, de pente $p_{n,k}$ telle que $p_{n,k} \in P_n^+$ si $r_{n,k}$ est pair et $p_{n,k} \in P_n^-$ sinon;[2]

(iii) si $n \geq 1$, $f_n(a_{n-1,k}) = f_{n-1}(a_{n-1,k})$;

(iv) Cas 1: $n \geq 1$ et $p_{n-1,k} \in P_{n-1}^+$.

(a) $f_n \geq f_{n-1}$ sur $[a_{n,7k}, a_{n,7k+3}]$;

(b) $f_n(x) \geq f_n(a_{n,7k+6}) - \frac{1}{2}(x - a_{n,7k+6})$ sur $[a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}]$;

(c) pour $n \geq 2$, $f_n(x) \geq f_{n-1}(a_{n-1,k}) + \sup P_{n-2}^+ .(x - a_{n-1,k})$ sur $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$;

(d) $f_{n-1}(a_{n-1,k}) \leq f_n \leq f_{n-1}(a_{n-1,k+1})$ sur $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$.

Cas 2: $n \geq 1$ et $p_{n-1,k} \in P_{n-1}^-$.

(a) $f_n \geq f_{n-1}$ sur $[a_{n,7k+4}, a_{n,7k+7}]$;

(b) $f_n(x) \geq f_n(a_{n,7k+1}) + \frac{1}{2}(x - a_{n,7k+1})$ sur $[a_{n,7k+1}, a_{n,7k+4}]$;

(c) pour $n \geq 2$, $f_n(x) \geq f_{n-1}(a_{n-1,k+1}) + \inf P_{n-2}^- .(x - a_{n-1,k+1})$ sur $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$;

(d) $f_{n-1}(a_{n-1,k+1}) \leq f_n \leq f_{n-1}(a_{n-1,k})$ sur $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$.

(v) [3] Cas 1: $n \geq 1$ et $p_{n-1,k} \in P_{n-1}^+$.

(a) $a_{n,7k+2} = \mathrm{Argmin}\{i \in \mathbb{N} : d_i \in (D \setminus D_{n-1}) \cap \left]a_{n,7k}, a_{n,7k+3}\right[\}$;

(b) $a_{n,7k+4} = \mathrm{Argmin}\{i \in \mathbb{N} : d_i \in (D \setminus D_{n-1}) \cap \left]a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}\right[\}$.

Cas 2: $n \geq 1$ et $p_{n-1,k} \in P_{n-1}^-$.

(a) $a_{n,7k+3} = \mathrm{Argmin}\{i \in \mathbb{N} : d_i \in (D \setminus D_{n-1}) \cap \left]a_{n,7k+1}, a_{n,7k+4}\right[\}$;

(b) $a_{n,7k+5} = \mathrm{Argmin}\{i \in \mathbb{N} : d_i \in (D \setminus D_{n-1}) \cap \left]a_{n,7k+4}, a_{n,7k+7}\right[\}$.

REMARQUE 3.2. En fait, la restriction de la fonction f_n à l'intervalle $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$ est construite à partir de la fonction f_{n-1} par un procédé très simple que l'on a visualisé sur la figure 1.

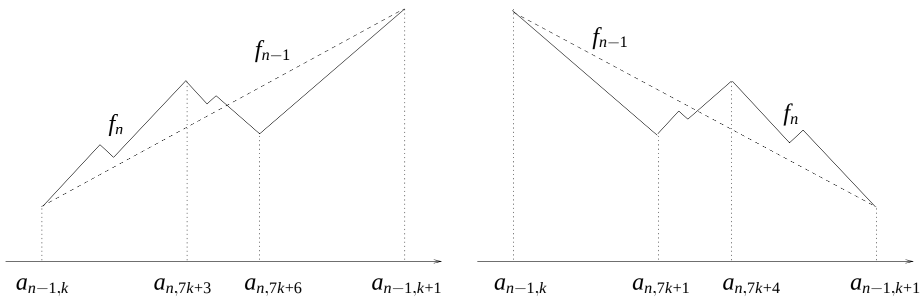
4. Preuve du Théorème 2.1.

4.1. *Construction d'une suite de fonctions* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nous allons procéder par récurrence. Tout d'abord, remarquons que la fonction f_0 et la suite $(a_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ satisfont les conditions (C1) et (C2) données dans la section 3. On suppose maintenant construit des fonctions $f_0, \ldots, f_{n-1}$ $(n \geq 1)$ ainsi que des suites associées $(a_{0,k})_{k\in\mathbb{Z}}, \ldots, (a_{n-1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$

[1] Entre deux points consécutifs de la suite $(a_{n-1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ on ajoute six autres points pour obtenir la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$.

[2] Entre deux entiers relatifs consécutifs les pentes sont alternées en commençant par une pente positive; par contre au passage d'un entier la pente reste inchangée et positive.

[3] Cette condition permet d'obtenir tous les éléments de D parmi les valeurs de la suite double $(a_{n,k})_{(n,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$.



Cas 1. *Cas 2.*

FIGURE 1

telles que les deux conditions (C1) et (C2) soient satisfaites jusqu'à l'ordre $n-1$. Nous allons alors construire une fonction $f_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ainsi qu'une suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ telles que les deux conditions (C1) et (C2) soient encore satisfaites à l'ordre n. Nous allons utiliser le lemme suivant.

LEMME 4.1. *La famille d'intervalles* $\left(\left[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}\right[\right)_{k\in\mathbb{Z}}$ *forme une partition de* $\mathbb{R}$*.*

PREUVE. Comme la suite $(a_{n-1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est strictement croissante (condition (C1)(i)), la famille considérée est une partition de l'intervalle $\left]L, L'\right[$, où $L = \lim_{k\longrightarrow-\infty} a_{n-1,k}$ et $L' = \lim_{k\longrightarrow+\infty} a_{n-1,k}$. En remarquant que, d'après la condition (C1)(ii), $k = a_{0,k} = a_{n-1,7^{n-1}k}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on déduit que tous les entiers relatifs sont des valeurs atteintes par la suite $(a_{n-1,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ et donc $L = -\infty$ et $L' = +\infty$. ∎

Dans la suite de cette section 4.1, nous nous plaçons sur un intervalle de la forme $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$, avec k fixé, et nous supposons que $p_{n-1,k} \in P^+_{n-1}$, le cas $p_{n-1,k} \in P^-_{n-1}$ se traitant de façon similaire. Nous allons alors définir la restriction de f_n à cet intervalle ainsi que les valeurs $a_{n,7k}, a_{n,7k+1}, \ldots, a_{n,7k+7}$. En faisant ensuite varier k dans $\mathbb{Z}$, on définit alors toute la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ ainsi que, grâce au Lemme 4.1, la fonction f_n.

On pose bien sûr:

$$\begin{cases} a_{n,7k} = a_{n-1,k};\\ a_{n,7k+7} = a_{n-1,k+1}.\end{cases}$$

La construction va se faire maintenant en trois étapes.

4.1.1. Etape 1. On définit tout d'abord une fonction g sur $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$, affine par morceaux, dont le graphe est l'union des trois segments non dégénérés $[K_0, K_3]$, $[K_3, K_6]$ et $[K_6, K_7]$, les points K_0, K_3, K_6, K_7 étant définis de manière unique par les relations:

$$\begin{cases} K_0 = \left(a_{n-1,k}, f_{n-1}(a_{n-1,k})\right);\\ K_7 = \left(a_{n-1,k+1}, f_{n-1}(a_{n-1,k+1})\right);\\ \text{la pente des deux demi-droites } [K_0K_3) \text{ et } [K_6K_7) \text{ est } 1-\frac{1}{n+\ell};\\ \text{la pente de la demi-droite } [K_3K_6) \text{ est } -1+\frac{1}{n+\ell};\\ (K_0, K_3, K_7, K_6) \text{ est un parallélogramme non aplati, dont le centre est noté } I_7.\end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

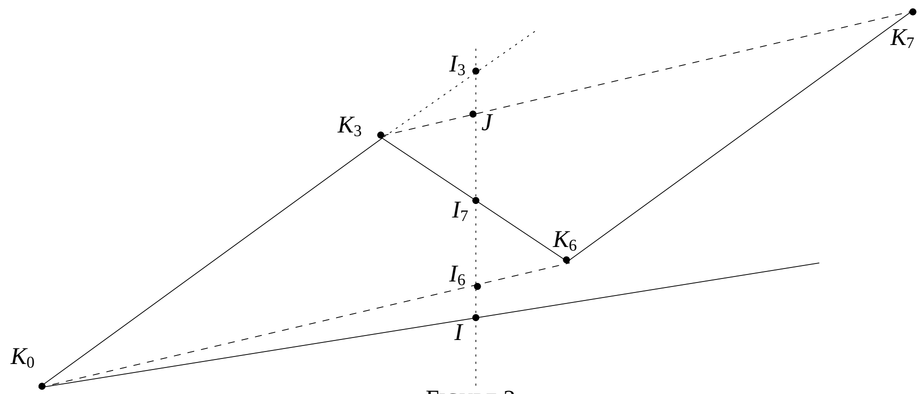


FIGURE 2

Ceci est possible car, d'après le Lemme 3.1, la pente de la demi-droite $[K_0K_3)$ est strictement supérieur à $p_{n-1,k}$ qui est la pente de la fonction f_{n-1}; le point K_3 se trouve donc strictement au dessus du graphe de f_{n-1}, *i.e.*, au dessus du segment $[K_0, K_7]$. Nous sommes dans la configuration indiquée sur la figure 2.

Dans la suite, on notera (x_i, y_i) les coordonnées de K_i ($i = 0, 3, 6$ et 7). Remarquons que la fonction cherchée f_n sera proche de g sur l'intervalle $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$.

Les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.

PROPRIÉTÉ 1. Nous avons:

(i) la pente de la demi-droite $[K_0K_3)$ appartient à P_n^+ et est strictement supérieure à celle de f_{n-1};

(ii) La pente de la demi-droite $[K_6K_7)$ appartient à P_n^+;

(iii) La pente de la demi-droite $[K_3K_6)$ appartient à P_n^- et est inférieure à $-\frac{1}{2}$.

PREUVE. C'est une conséquence du Lemme 3.1. ∎

PROPRIÉTÉ 2. La demi-droite $\mathcal{D}$ passant par K_0 et de pente $\sup P_{n-2}^+$ est strictement en dessous du graphe de g, pour $n \geq 2$.

PREUVE. Considérons les trois demi-droites $\mathcal{D}$, $[K_0K_3)$ et $[K_0K_6)$ qui coupent la droite verticale passant par I_7 respectivement en I, I_3 et I_6.

Nous savons déjà que la demi-droite $\mathcal{D}$ est en dessous de la demi-droite $[K_0K_7)$ car, d'après le Lemme 3.1, $\sup P_{n-2}^+ \leq \inf P_{n-1}^+ \leq p_{n-1,k}$. Il suffit alors de vérifier que

$$\begin{cases} \text{(i)} \quad I_7I_6 < I_7I_3; \\ \text{(ii)} \quad I_7I_3 < I_7I. \end{cases}$$

Par le théorème de Thalès nous avons

$$I_7I_6 = I_7J < I_7I_3,$$

où le point J est défini comme l'intersection de la droite (K_3K_7) et de la droite verticale passant par I_7; l'inégalité (i) est donc vérifiée. L'inégalité (ii) est équivalente à

$$\left(1-\frac{1}{n+\ell}\right)-\left(1-\frac{1}{n+\ell-1}+\epsilon_n\right) < \left(1-\frac{1}{n+\ell-1}+\epsilon_n\right) - \left(1-\frac{1}{n+\ell-2}+\frac{1}{(n+\ell-1)^4}\right),$$

où $|\epsilon_n| < \frac{1}{(n+\ell)^4}$. En d'autres termes, en posant $N = n+\ell-1 \geq 3$ (puisque $n \geq 2$ et $\ell \geq 2$)

$$-2\epsilon_n + \frac{1}{N^4} < \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N-1} - \frac{2}{N} = \frac{2}{N(N^2-1)}.$$

Il suffit alors de vérifier que:

$$\frac{2}{(N+1)^4} + \frac{1}{N^4} < \frac{2}{N(N^2-1)},$$

ou encore en remarquant que $\frac{1}{(N+1)^4} \leq \frac{1}{N^4}$ et $\frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{N^2-1}$, il suffit de vérifier que

$$\frac{3}{N^4} < \frac{2}{N^3}.$$

Ceci est équivalent à $N > \frac{3}{2}$, relation trivialement vérifiée puisque N est un entier supérieur à 3. ∎

PROPRIÉTÉ 3. Le point K_3 satisfait aux deux conditions:

$$\text{(i) } y_3 < y_7 \quad \text{et} \quad \text{(ii) } \frac{3x_0+x_7}{4} < x_3 < \frac{x_0+x_7}{2}$$

PREUVE. En projetant sur la deuxième coordonnée l'égalité vectorielle $\overrightarrow{K_0K_7} = \overrightarrow{K_0K_3} + \overrightarrow{K_0K_6}$, nous avons

$$y_7 = y_3 + (y_6 - y_0);$$

la pente de la demi-droite $[K_0K_6)$ étant supérieure à celle de D (voir la propriété 2), elle est strictement positive et donc $y_6 > y_0$ ou de manière équivalente $y_7 > y_3$.

Par définition du point K_3, nous avons $x_3 < \frac{x_0+x_7}{2}$. La droite horizontale passant par I_7 rencontre la demi-droite $[K_0K_3)$ en L_3 et enfin notons L_0 (resp. I_0) l'intersection de la droite verticale passant par L_3 (resp. I_7) avec la droite horizontale passant par K_0. Nous sommes dans la configuration indiquée sur la figure 3.

La pente de la demi-droite $[K_0I_3)$ est strictement inférieure à un; la pente de la demi-droite $[K_0I_7)$ appartient à P^+_{n-1}, donc est supérieure à $\frac{1}{2}$ par le Lemme 3.1; donc $\frac{I_3I_7}{I_3I_0} < \frac{1}{2}$. Par le théorème de Thalès, on déduit:

$$\frac{L_0I_0}{K_0I_0} = \frac{L_3I_3}{K_0I_3} = \frac{I_7I_3}{I_3I_0} < \frac{1}{2}.$$

Donc l'abscisse de L_0 est strictement plus grande que $\frac{3x_0+x_7}{4}$ et il en sera de même pour l'abscisse de K_3, car $K_3 \in [L_3, I_3]$. ∎

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

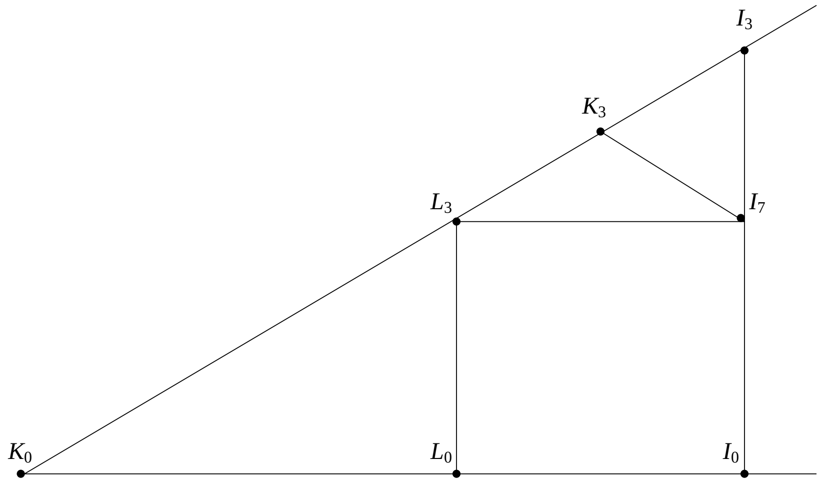


FIGURE 3

PROPRIÉTÉ 4. Le point K_6 satisfait les deux inégalités

$$\frac{x_0 + x_7}{2} < x_6 < \frac{x_0 + 3x_7}{4}.$$

PREUVE. Ces deux inégalités sont une conséquence de la propriété 3 si l'on remarque que I_7 est le milieu de $[K_3, K_6]$. ■

Pour des raisons de continuité et comme D est dense dans $\mathbb{R}$, quitte à déplacer localement les points K_3 et K_6, nous pouvons supposer en toute généralité que $x_3 \notin D$ et $x_6 \in D$, en conservant bien sûr les propriétés 1, 2, 3 et 4. Nous posons alors $a_{n,7k+3} = x_3$, $a_{n,7k+6} = x_6$ et on choisit la fonction g pour restriction de la fonction f_n à l'intervalle $[a_{n,7k+6}, a_{n,7k+7}]$.

4.1.2. Etape 2. Définissons dans cette étape les points $a_{n,7k+1}$ et $a_{n,7k+2}$ ainsi que la restriction de f_n à l'intervalle $[a_{n,7k}, a_{n,7k+3}]$. Pour cela, on choisit tout d'abord l'élément de D d'indice minimal appartenant à l'intervalle $\left]a_{n,7k}, a_{n,7k+3}\right[$ et qui n'a pas encore été choisi, *i.e.*, l'élément

$$\operatorname{Argmin}\left\{i \in \mathbb{N} : d_i \in (D \setminus D_{n-1}) \cap \left]a_{n,7k}, a_{n,7k+3}\right[\right\}$$

(ceci est possible car D est dense dans $\mathbb{R}$). Cet élément sera choisi pour être $a_{n,7k+2}$. Ensuite, pour des raisons de continuité et en utilisant la propriété 1(i), en modifiant légèrement la fonction g sur l'intervalle $[a_{n,7k}, a_{n,7k+3}]$, on montre facilement l'existence d'une fonction h, définie sur le segment $[a_{n,7k}, a_{n,7k+3}]$, dont le graphe est la réunion des segments non dégénérés $[K_0, K_1]$, $[K_1, K_2]$ et $[K_2, K_3]$, où les points $K_1 = (x_1, y_1)$ et

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

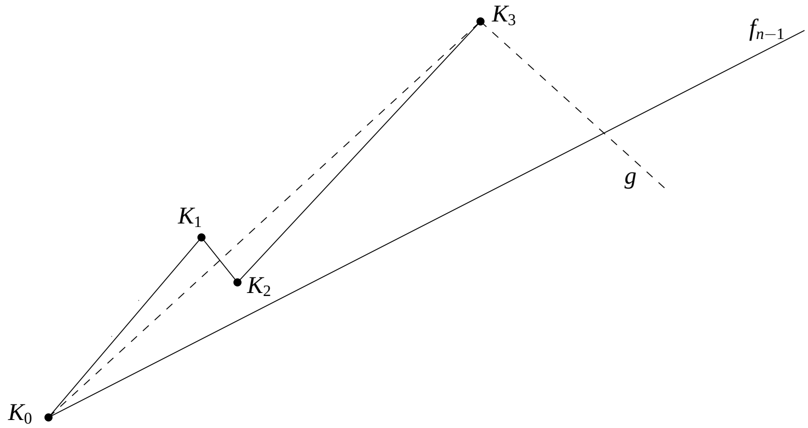


FIGURE 4

$K_2 = (x_2, y_2)$ vérifient les relations:

$$\begin{cases} x_2 = a_{n,7k+2}; \\ \text{les pentes des deux demi-droites } [K_0K_1) \text{ et } [K_2K_3) \text{ sont égales et} \\ \qquad \text{appartiennent à } P_n^+; \\ \text{la pente de la demi-droite } [K_1K_2) \text{ est } -1 + \frac{1}{n+\ell}; \\ \text{le point } K_2 \text{ se trouve strictement au dessus du graphe de la fonction } f_{n-1}; \\ y_1 < y_3. \end{cases}$$

Nous sommes dans la configuration indiquée sur la figure 4.

Pour des raisons de continuité et comme D est dense dans $\mathbb{R}$, quitte à déplacer localement le point K_1, nous pouvons supposer en toute généralité que $x_1 \notin D$ et que la propriété suivante soit aussi satisfaite:

PROPRIÉTÉ 5. Nous avons:

(i) Les pentes des demi-droites $[K_0K_1)$ et $[K_2K_3)$ appartiennent à P_n^+;
(ii) la pente de la demi-droite $[K_1K_2)$ appartiennent à P_n^-;
(iii) le point K_2 se trouve au dessus du graphe de f_{n-1};
(iv) $y_1 < y_3$.

On pose alors $a_{n,7k+1} = x_1$ et on choisit la fonction h pour restriction de f_n à l'intervalle $[a_{n,7k}, a_{n,7k+3}]$.

4.1.3. Etape 3. La construction de la restriction de f_n sur l'intervalle $[a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}]$ ainsi que la construction des points $a_{n,7k+4}$ et $a_{n,7k+5}$ se font par un procédé similaire à celui de l'étape 2; décrivons la de manière précise. Pour cela, on choisit tout d'abord l'élément de D d'indice minimal appartenant à l'intervalle $]a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}[$ et qui n'a pas encore été choisi, *i.e.*, l'élément Argmin $\left\{i \in \mathbb{N} : d_i \in (D \setminus D_{n-1}) \cap \left]a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}\right[\right\}$ (ceci est possible car D est dense dans $\mathbb{R}$). Cet élément sera choisi pour être $a_{n,7k+4}$. Alors, pour des raisons de continuité et en utilisant la propriété 1(iii), en modifiant légèrement la fonction g sur l'intervalle $[a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}]$, on montre facilement l'existence d'une

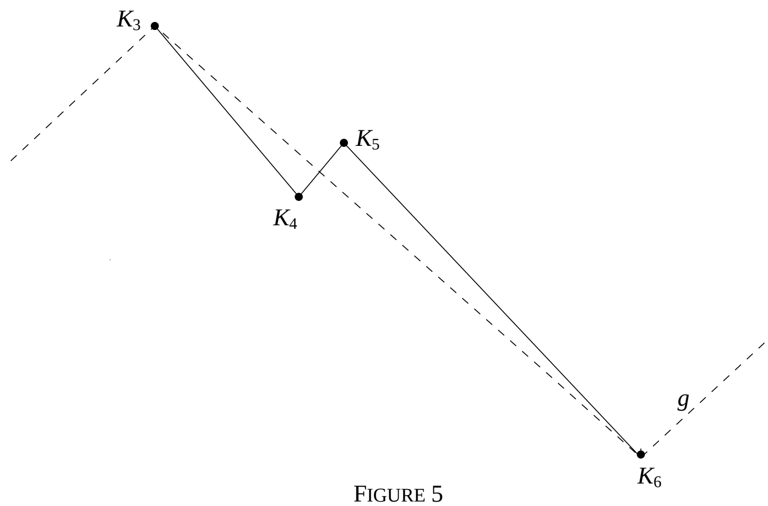


FIGURE 5

fonction h, définie sur le segment $[a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}]$, dont le graphe est la réunion des segments non dégénérés $[K_3, K_4]$, $[K_4, K_5]$ et $[K_5, K_6]$, où les points $K_4 = (x_4, y_4)$ et $K_5 = (x_5, y_5)$ vérifient les relations:

$$\begin{cases} x_4 = a_{n,7k+4}; \\ \text{les pentes des deux demi-droites } [K_3K_4) \text{ et } [K_5K_6) \text{ sont égales et} \\ \qquad \text{appartiennent à } P_n^-; \\ \text{la pente de la demi-droite } [K_4K_5) \text{ est } 1 - \frac{1}{n+\ell}; \\ \text{le point } K_4 \text{ se trouve strictement au dessus du graphe de la fonction} \\ \qquad \text{définie par } x \longmapsto y_6 - \frac{1}{2}(x - x_6); \\ y_5 < y_3. \end{cases}$$

Nous sommes dans la configuration indiquée sur la figure 5.

Pour des raisons de continuité et comme D est dense dans $\mathbb{R}$, quitte à déplacer localement le point K_5, nous pouvons supposer en toute généralité que $x_5 \notin D$ et que la propriété suivante soit aussi satisfaite:

PROPRIÉTÉ 6. Nous avons:
- (i) les pentes des demi-droites $[K_3K_4)$ et $[K_5K_6)$ appartiennent à P_n^-;
- (ii) la pente de la demi-droite $[K_4K_5)$ appartient à P_n^+;
- (iii) le point K_4 se trouve strictement au dessus du graphe de la fonction définie par $x \longmapsto y_6 - \frac{1}{2}(x - x_6)$;
- (iv) $y_5 < y_3$.

On pose alors $a_{n,7k+5} = x_5$ et on choisit la fonction h pour restriction de f_n à l'intervalle $[a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}]$.

4.1.4. Etape 4. Nous allons vérifier que les conditions (C1) et (C2) sont satisfaites à l'ordre n.

(C1)(i)–(ii) Evident par construction.

(C1)(iii) Considérons un élément $a_{n,k'}$; en effectuant la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de k' par 7, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, \ldots, 6\}$ tels que

$$k' = 7k + r. \tag{5}$$

On montre alors facilement que

$$r_{n,k'} = 7r_{n-1,k} + r. \tag{6}$$

Si $r = 0$, par les relations (5) et (6), $a_{n,k'} = a_{n-1,k}$ et $r_{n,k'} = 7r_{n-1,k}$; dans ce cas, en utilisant la condition (C1)(iii) a l'ordre $n - 1$ (qui est réalisée par l'hypothèse de récurrence), la conclusion est immédiate.

Supposons désormais que $r \neq 0$, et en particulier, par la relation (6), $r_{n,k'} \neq 0$. Nous avons à distinguer deux cas suivant que $r_{n,k'}$ est pair ou impair.

Cas 1: $r_{n,k'}$ est pair.

Dans ce cas, il faut vérifier que $a_{n,k'} \in D$. Si $p_{n-1,k} \in P^{+}_{n-1}$, en utilisant la condition (C2)(ii) à l'ordre $n-1$ (qui est réalisée par l'hypothèse de récurrence), $r_{n-1,k}$ est pair et la relation (6) entraîne que r est pair. Alors, en remarquant que $a_{n,k'} \in [a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$ et en se plaçant sur le segment $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$, on déduit, par construction de la fonction f_n, que $a_{n,7k+r} = a_{n,k'} \in D$ (voir les étapes 1, 2 et 3). Un raisonnement analogue peut être fait si $p_{n-1,k} \in P^{-}_{n-1}$.

Cas 2: $r_{n,k'}$ est impair.

Dans ce cas, il faut vérifier que $a_{n,k'} \notin D$. Le même raisonnement qu'au cas 1 peut être appliqué.

(C1)(iv) Montrons que, pour tout $k' \in \mathbb{Z}$, $|a_{n,k'+1} - a_{n,k'}| \leq \frac{1}{2^n}$. En effectuant la division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ de k' par 7, il existe $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, \ldots, 6\}$ tels que $k' = 7k + r$. Par croissance de la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, les points $a_{n,k'}$ et $a_{n,k'+1}$ appartiennent au segment $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$, donc grâce à l'hypothèse de récurrence

$$|a_{n-1,k+1} - a_{n-1,k}| \leq \frac{1}{2^{n-1}} \tag{7}$$

Nous allons supposer que $p_{n-1,k} \in P^{+}_{n-1}$ (une preuve similaire pourra être faite si $p_{n-1,k} \in P^{-}_{n-1}$). Nous posons:

$$u_1 = a_{n,7k}, u_5 = a_{n,7k+7}, u_2 = \frac{3u_1 + u_5}{4}, u_3 = \frac{u_1 + u_5}{2} \text{ et } u_4 = \frac{u_1 + 3u_5}{4}.$$

Par construction de la fonction f_n (voir les propriétés 3 et 4 de l'étape 1), nous savons que

$$\begin{cases} a_{n,7k+3} \in [u_2, u_3]; \\ a_{n,7k+6} \in [u_3, u_4]. \end{cases}$$

- Si $r = 0, 1$ ou 2, par croissance de la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, les points $a_{n,k'}$ et $a_{n,k'+1}$ appartiennent au segment $[a_{n,7k}, a_{n,7k+3}]$ qui est inclus dans $[u_1, u_3]$; donc, par la relation (7),

$$|a_{n,k'+1} - a_{n,k'}| \leq |u_3 - u_1| = \frac{1}{2}|u_5 - u_1| \leq \frac{1}{2^n}.$$

- Si $r = 3, 4$ ou 5, par croissance de la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, les points $a_{n,k'}$ et $a_{n,k'+1}$ appartiennent au segment $[a_{n,7k+3}, a_{n,7k+6}]$ qui est inclus dans $[u_2, u_4]$; donc, par la relation (7),
$$|a_{n,k'+1} - a_{n,k'}| \leq |u_2 - u_4| = \frac{1}{2}|u_5 - u_1| \leq \frac{1}{2^n}.$$
- Si $r = 6$, par croissance de la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$, les points $a_{n,k'}$ et $a_{n,k'+1}$ appartiennent au segment $[u_3, u_5]$; donc, par la relation (7),
$$|a_{n,k'+1} - a_{n,k'}| \leq |u_5 - u_3| = \frac{1}{2}|u_5 - u_1| \leq \frac{1}{2^n}.$$

(C2)(i) Evident par construction de la fonction f_n.

(C2)(ii) On se place sur un intervalle de la forme $[a_{n,k'}, a_{n,k'+1}]$. Il est clair par construction que la fonction f_n est affine sur cet intervalle. Nous allons maintenant vérifier cette condition sur les pentes, en reprenant les notations utilisées pour vérifier (C1)(iii).

Cas 1: $r_{n,k'}$ est pair.

Si $r_{n-1,k}$ est pair, alors la relation (6) entraîne que r est pair et l'hypothèse de récurrence entraîne que $p_{n-1,k} \in P^+_{n-1}$. Donc, par construction de la fonction f_n sur l'intervalle $[a_{n,7k+r}, a_{n,7k+r+1}]$, $p_{n,k'} \in P^+_n$ (propriétés 1(ii), 5(i) et 6(ii)). Si $r_{n-1,k}$ est impair, alors la relation (6) entraîne que r est impair et l'hypothèse de récurrence entraîne que $p_{n-1,k} \in P^-_{n-1}$. Donc, par construction de la fonction f_n sur l'intervalle $[a_{n,7k+r}, a_{n,7k+r+1}]$, $p_{n,k'} \in P^+_n$.

Cas 2: $r_{n,k'}$ est impair.

La preuve est la même (utiliser entre autre les propriétés 5(ii) et 6(i)).

(C2)(iii) Evident par construction de la fonction f_n.

(C2)(iv) Nous avons supposé que nous étions dans le cas 1 (l'autre cas se traitant de la même manière).

(a) C'est une conséquence des propriétés 1(i) et 5(iii).
(b) C'est une conséquence des propriétés 1(iii) et 6(iii).
(c) C'est une conséquence de la propriété 2 et des conditions (a) et (b) ci-dessus.
(d) C'est une conséquence des propriétés 3(i), 5(iv) et 6(iv) ainsi que de la condition (c) ci-dessus.

(C2)(v) Evident par construction de la fonction f_n.

4.2. *Propriétés de la suite* $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$. Nous avons tout d'abord le lemme suivant qui nous sera utile dans la suite.

LEMME 4.2. *Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [a_{n,k}, a_{n,k+1}]$.*

PREUVE. Si l'on note $E(x)$ la partie entière de x, on a
$$a_{0,E(x)} = E(x) \leq x \leq E(x) + 1 = a_{0,E(x)+1}$$
ou de manière équivalente, grâce à la condition (C1)(ii),
$$x \in [a_{n,7^nE(x)}, a_{n,7^nE(x)+7^n}].$$
Comme la suite $(a_{n,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ est croissante, il existe un entier relatif $k \in \{7^nE(x), \ldots, 7^nE(x) + 7^n - 1\}$, tel que $x \in [a_{n,k}, a_{n,k+1}]$. ∎

PROPOSITION 4.3. *Nous avons l'inclusion $D \subset A$.*

PREUVE. Nous allons raisonner par l'absurde; supposons que $D \not\subset A$. Il existe un élément de D n'appartenant pas à A; choisissons un tel élément d_i dont l'indice i soit le plus petit possible. En particulier, nous avons $\{d_0, \ldots, d_{i-1}\} \subset A$. Grâce à la condition (C1)(ii), il existe un entier m tel que

$$\{d_0, \ldots, d_{i-1}\} \subset D_m, \tag{8}$$

D'après le Lemme 4.2, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$d_i \in [a_{m,k}, a_{m,k+1}] \tag{9}$$

Deux situations sont alors possibles.

Cas 1: $p_{m,k} \in P_m^+$.

Nous allons utiliser les deux lemmes suivants.

LEMME 4.4. *Pour* $n \geq m$, $p_{n,7^{n-m}(k+1)-1} \in P_n^+$.

PREUVE. Par la condition (C2)(ii), $r_{m,k}$ est pair et l'égalité

$$r_{n,7^{n-m}(k+1)-1} = 7^{n-m} r_{m,k} + 7^{n-m} - 1$$

permet de dire que $r_{n,7^{n-m}(k+1)-1}$ est aussi pair. A nouveau, par la condition (C2)(ii), nous obtenons que $p_{n,7^{n-m}(k+1)-1} \in P_n^+$. ∎

LEMME 4.5. *Pour* $n \geq m$,

$$d_i \in [a_{n,7^{n-m}(k+1)-1}, a_{n,7^{n-m}(k+1)}]. \tag{10}$$

PREUVE. Nous allons démontrer ce lemme par récurrence. Grâce à la relation (9), la relation (10) est vraie à l'ordre $n = m$. Supposons la relation (10) vraie à l'ordre $n - 1$ ($n \geq m + 1$). Avec la notation $k' = 7^{n-1-m}(k + 1) - 1$, $d_i \in [a_{n,7k'}, a_{n,7k'+7}]$ et aussi, grâce au Lemme 4.4, $p_{n-1,k'} \in P_{n-1}^+$.

· Si $d_i \in [a_{n,7k'}, a_{n,7k'+3}]$, nous avons d'une part (remarquer que $d_i \notin A$)

$$d_i \in (D \setminus D_{n-1}) \cap \left]a_{n,7k'}, a_{n,7k'+3}\right[, \tag{11}$$

et d'autre part, grâce à la relation (8) et à la croissance de la suite $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$,

$$d_0, \ldots, d_{i-1} \notin (D \setminus D_{n-1}) \cap \left]a_{n,7k'}, a_{n,7k'+3}\right[. \tag{12}$$

En combinant les relations (11) et (12) et en utilisant la condition (C2)(v) cas 1(a), on obtient $d_i = a_{n,7k'+2}$, ce qui contredit le fait que $d_i \notin A$.

· Si $d_i \in [a_{n,7k'+3}, a_{n,7k'+6}]$, nous obtenons de la même façon une contradiction.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

Ainsi $d_i \in [a_{n,7k'+6}, a_{n,7(k'+1)}] = [a_{n,7^{n-m}(k+1)-1}, a_{n,7^{n-m}(k+1)}]$ et la relation (10) est vraie à l'ordre n. ■

Grâce au Lemme 4.5, en faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans la relation (10), on obtient $d_i = a_{m,k+1}$ car $|a_{n,7^{n-m}(k+1)-1} - a_{n,7^{n-m}(k+1)}| \leq \frac{1}{2^n} \longrightarrow 0$ (voir condition (C1)(iv)) et $a_{n,7^{n-m}(k+1)} = a_{m,k+1}$. Ceci est impossible puisque $d_i \notin A$.

Cas 2: $p_{m,k} \in P_m^-$.

Nous procédons de la même manière en remplaçant la relation (10) par

$$d_i \in [a_{n,7^{n-m}k}, a_{n,7^{n-m}k+1}]$$

et en obtenant finalement la contradiction $d_i = a_{m,k}$. ■

4.3. *Convergence de la suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vers* f. Nous allons montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction, notée f.

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$; d'après le Lemme 4.2, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in [a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$. Nous supposerons dans la suite que $p_{n-1,k} \in P_{n-1}^+$, un raisonnement analogue pouvant être fait si $p_{n-1,k} \in P_{n-1}^-$. Alors, d'après la condition (C2)(iv) cas 1(d), on a

$$f_{n-1}(a_{n-1,k}) \leq f_n(x) \leq f_{n-1}(a_{n-1,k+1}). \tag{13}$$

D'autre part, puisque f_{n-1} est croissante sur l'intervalle $[a_{n-1,k}, a_{n-1,k+1}]$,

$$f_{n-1}(a_{n-1,k}) \leq f_{n-1}(x) \leq f_{n-1}(a_{n-1,k+1}). \tag{14}$$

En combinant les relations (13) et (14), on déduit:

$$|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq |f_{n-1}(a_{n-1,k+1}) - f_{n-1}(a_{n-1,k})| \leq |a_{n-1,k+1} - a_{n-1,k}|,$$

la deuxième inégalité étant réalisée puisque, grâce à la condition (C2)(ii) et le Lemme 3.1, la fonction f_{n-1} est 1-Lipschitzienne. Grâce à la condition (C1)(iv), on obtient $|f_n(x) - f_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, ce qui permet d'écrire

$$\sup\big\{|f_n(x) - f_{n-1}(x)| : x \in \mathbb{R}\big\} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La série $\sum_{n\geq 1}(f_n - f_{n-1})$ converge donc normalement sur $\mathbb{R}$; les sommes partielles étant égales à $f_n - f_0$, on conclut que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction, notée f, qui est elle aussi 1-Lipschitzienne.

4.4. *Premières propriétés de* f. Nous allons étudier les propriétés élémentaires de f qui nous seront utiles dans la suite.

LEMME 4.6. *Soit $C \in \mathbb{R}$; si, pour un entier naturel n et deux entiers relatifs k_1, k_2 avec $k_1 \leq k_2$, on a*

$$f_n \geq C \quad (\textit{resp. } f_n \leq C) \textit{ sur } [a_{n,k_1}, a_{n,k_2}],$$

alors on a aussi $f \geq C$ (resp. $f \leq C$) sur $[a_{n,k_1}, a_{n,k_2}]$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

PREUVE. Pour montrer ce résultat, il suffit de prouver par récurrence que, pour tout $q \geq n$,

(15) $$f_q \geq C \quad (\text{resp. } f_q \leq C) \text{ sur } [a_{n,k_1}, a_{n,k_2}].$$

Le résultat est vrai par hypothèse pour $q = n$. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $q-1$ ($q \geq n+1$). Comme

$$[a_{n,k_1}, a_{n,k_2}] = \bigcup_{k=7^{q-n-1}k_1}^{7^{q-n-1}k_2-1} [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}],$$

il suffit de vérifier la relation (15) sur chaque intervalle $[a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$, $k \in \{7^{q-n-1}k_1, \ldots, 7^{q-n-1}k_2 - 1\}$. Par hypothèse de récurrence, nous avons $f_{q-1} \geq C$ (resp. $f_{q-1} \leq C$) sur l'intervalle $[a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$. Alors, grâce à la condition (C2)(iv)(d), on déduit que $f_q \geq C$ (resp. $f_q \leq C$) sur l'intervalle $[a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$. La relation (15) est donc satisfaite à l'ordre q. ∎

LEMME 4.7. *Si, pour un entier naturel $n \geq 2$ et deux entiers relatifs k_1, k_2 avec $k_1 \leq k_2$, on a*

$$f_n(x) \geq \alpha x + \beta \text{ sur } [a_{n,k_1}, a_{n,k_2}],$$

où $\alpha \in [\inf P^-_{n-1}, \sup P^+_{n-1}]$ et $\beta \in \mathbb{R}$, alors on a aussi

$$f(x) \geq \alpha x + \beta \text{ sur } [a_{n,k_1}, a_{n,k_2}].$$

PREUVE. Pour montrer le résultat, il suffit de prouver par récurrence que, pour tout $q \geq n$,

(16) $$f_q(x) \geq \alpha x + \beta \text{ sur } [a_{n,k_1}, a_{n,k_2}].$$

Le résultat est vrai par hypothèse pour $q = n$. Supposons le résultat vrai jusqu'à l'ordre $q-1$ ($q \geq n+1$). Comme

$$[a_{n,k_1}, a_{n,k_2}] = \bigcup_{k=7^{q-n-1}k_1}^{7^{q-n-1}k_2-1} [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}],$$

il suffit de vérifier la relation (16) sur chaque intervalle $[a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$, $k \in \{7^{q-n-1}k_1, \ldots, 7^{q-n-1}k_2 - 1\}$. Par hypothèse de récurrence, nous avons

(17) $$f_{q-1}(x) \geq \alpha x + \beta \text{ sur } [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}].$$

Nous allons maintenant distinguer deux cas.

Cas 1: $p_{q-1,k} \in P^+_{q-1}$.

Nous avons, d'après la condition (C2)(iv) cas 1(c), pour $x \in [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$,

(18) $$f_q(x) \geq f_{q-1}(a_{q-1,k}) + \sup P^+_{q-2}.(x - a_{q-1,k}),$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

car $q \geq n+1 \geq 3$. En combinant l'inégalité (17) pour $x = a_{q-1,k}$ et l'inégalité (18), on obtient, pour $x \in [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$,

$$f_q(x) \geq \alpha a_{q-1,k} + \beta + \sup P^+_{q-2}.(x - a_{q-1,k}).$$

Or, $x - a_{q-1,k} \geq 0$ et, d'après le Lemme 3.1, $\sup P^+_{q-2} \geq \sup P^+_{n-1} \geq \alpha$ (puisque $q-2 \geq n-1$), donc, pour $x \in [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$

$$f_q(x) \geq \alpha a_{q-1,k} + \beta + \alpha(x - a_{q-1,k}) = \alpha x + \beta.$$

Cas 2: $p_{q-1,k} \in P^-_{q-1}$.

Nous avons, d'après la condition (C2)(iv) cas 2(c), pour $x \in [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$,

$$f_q(x) \geq f_{q-1}(a_{q-1,k+1}) + \inf P^-_{q-2}.(x - a_{q-1,k+1}), \tag{19}$$

car $q \geq n+1 \geq 3$. En combinant l'inégalité (17) pour $x = a_{q-1,k+1}$ et l'inégalité (19), on obtient, pour $x \in [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$

$$f_q(x) \geq \alpha a_{q-1,k+1} + \beta + \inf P^-_{q-2}.(x - a_{q-1,k+1}).$$

Or, $x - a_{q-1,k+1} \leq 0$ et $\inf P^-_{q-2} \leq \inf P^-_{n-1} \leq \alpha$ (puisque $q-2 \geq n-1$), donc, pour $x \in [a_{q-1,k}, a_{q-1,k+1}]$

$$f_q(x) \geq \alpha a_{q-1,k+1} + \beta + \alpha(x - a_{q-1,k+1}) = \alpha x + \beta.$$

La relation (16) est donc satisfaite à l'ordre q. ■

LEMME 4.8. *Pour tous entiers naturels q et n tels que $q \geq n$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$f_q(a_{n,k}) = f(a_{n,k}).$$

PREUVE. Grâce à la condition (C2)(iii), on montre facilement par récurrence que, pour tout $q \geq n$, $f_q(a_{n,k}) = f_n(a_{n,k})$. En faisant $q \longrightarrow +\infty$ dans cette égalité, on obtient alors le résultat souhaité. ■

4.5. *Calcul du sous-différentiel proximal de f.*

4.5.1. Calcul de $\partial^\pi f(\bar{x})$ si $\bar{x} \notin A$. Nous allons montrer par l'absurde que $\partial^\pi f(\bar{x}) = \emptyset$. Supposons que $\partial^\pi f(\bar{x})$ contient au moins un élément noté ξ. Il existe un voisinage V de $\bar{x}$ et il existe $\sigma > 0$ tel que

$$f(y) \geq f(\bar{x}) + \xi.(y - \bar{x}) - \sigma(y - \bar{x})^2, \tag{20}$$

pour $y \in V$.

D'après le Lemme 4.2, pour tout $n \geq 1$, il existe $k_n \in \mathbb{Z}$ (qui est bien sûr unique) tel que

$$\bar{x} \in \left]a_{n-1,k_n}, a_{n-1,k_n+1}\right[= \left]a_{n,7k_n}, a_{n,7k_n+7}\right[.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

D'après la condition (C1)(iv), $[a_{n-1,k_n}, a_{n-1,k_n+1}] \subset V$ pour n assez grand; en toute généralité, nous pouvons donc supposer que la relation (20) est vraie pour tout $y \in [a_{n-1,k_n}, a_{n-1,k_n+1}]$. D'autre part, on peut trouver un unique entier r_n dans $\{0, 1, \ldots, 6\}$ tel que

$$\bar{x} \in \left]a_{n,7k_n+r_n}, a_{n,7k_n+r_n+1}\right[\tag{21}$$

A l'ordre $n \geq 1$, il y a six situations possibles.

$(S1)^+_n$: $p_{n-1,k_n} \in P^+_{n-1}$ et $r_n \in \{0, 1, 2\}$;
$(S1)^-_n$: $p_{n-1,k_n} \in P^-_{n-1}$ et $r_n \in \{4, 5, 6\}$;
$(S2)^+_n$: $p_{n-1,k_n} \in P^+_{n-1}$ et $r_n \in \{3, 4, 5\}$;
$(S2)^-_n$: $p_{n-1,k_n} \in P^-_{n-1}$ et $r_n \in \{1, 2, 3\}$;
$(S3)^+_n$: $p_{n-1,k_n} \in P^+_{n-1}$ et $r_n = 6$;
$(S3)^-_n$: $p_{n-1,k_n} \in P^-_{n-1}$ et $r_n = 0$.

Nous sommes alors dans l'un des cinq cas suivants.

Cas 1: il existe une infinité d'entiers n telle que nous soyons dans la situation $(S1)^+_n$.

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer en toute généralité que, pour tout $n \geq 2$, nous soyons dans la situation $(S1)^+_n$. D'après la relation (20),

$$\begin{cases} f(a_{n-1,k_n}) \geq f(\bar{x}) + \xi.(a_{n-1,k_n} - \bar{x}) - \sigma(\bar{x} - a_{n-1,k_n})^2; \\ f(a_{n-1,k_n+1}) \geq f(\bar{x}) + \xi.(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x}) - \sigma(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x})^2. \end{cases} \tag{22}$$

Comme la pente de la fonction f_{n-1} sur $[a_{n-1,k_n}, a_{n-1,k_n+1}]$ est par définition p_{n-1,k_n} (voir la condition (C2)(ii)), on a aussi

$$\begin{cases} f_{n-1}(a_{n-1,k_n}) = f_{n-1}(\bar{x}) + p_{n-1,k_n}.(a_{n-1,k_n} - \bar{x}); \\ f_{n-1}(a_{n-1,k_n+1}) = f_{n-1}(\bar{x}) + p_{n-1,k_n}.(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x}), \end{cases}$$

ce que l'on peut écrire, grâce au Lemme 4.8,

$$\begin{cases} f(a_{n-1,k_n}) = f_{n-1}(\bar{x}) + p_{n-1,k_n}.(a_{n-1,k_n} - \bar{x}); \\ f(a_{n-1,k_n+1}) = f_{n-1}(\bar{x}) + p_{n-1,k_n}.(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x}), \end{cases} \tag{23}$$

En combinant les relations (22) et (23), nous obtenons

$$\begin{cases} f_{n-1}(\bar{x}) + p_{n-1,k_n}.(a_{n-1,k_n} - \bar{x}) \geq f(\bar{x}) + \xi.(a_{n-1,k_n} - \bar{x}) - \sigma(\bar{x} - a_{n-1,k_n})^2; \\ f_{n-1}(\bar{x}) + p_{n-1,k_n}.(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x}) \geq f(\bar{x}) + \xi.(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x}) - \sigma(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x})^2. \end{cases} \tag{24}$$

Or, d'après la condition (C2)(iv) cas 1(a), $f_n \geq f_{n-1}$ sur $[a_{n,7k_n}, a_{n,7k_n+3}]$, ce qui entraîne, par le Lemme 4.7,

$$f \geq f_{n-1}$$

sur $[a_{n,7k_n}, a_{n,7k_n+3}]$; en privilégiant le point $\bar{x}$ dans cette dernière inégalité, on déduit

$$f(\bar{x}) \geq f_{n-1}(\bar{x}) \tag{25}$$

En combinant les relations (24) et (25), on obtient le nouveau système

$$\begin{cases} (p_{n-1,k_n} - \xi).(\bar{x} - a_{n-1,k_n}) \leq \sigma(\bar{x} - a_{n-1,k_n})^2; \\ (\xi - p_{n-1,k_n}).(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x}) \leq \sigma(a_{n-1,k_n+1} - \bar{x})^2, \end{cases}$$

ou de manière équivalente, puisque $\overline{x} \notin A$,

$$\begin{cases} \text{(i)} & p_{n-1,k_n} - \xi \leq \sigma(\overline{x} - a_{n-1,k_n}); \\ \text{(ii)} & \xi - p_{n-1,k_n} \leq \sigma(a_{n-1,k_n+1} - \overline{x}). \end{cases} \tag{26}$$

En faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans les relations (26) et en remarquant que $\lim_{n\to+\infty} p_{n-1,k_n} = 1$, on déduit que $\xi = 1$. En reportant maintenant cette dernière information dans l'inégalité (26)(ii), on obtient alors

$$\frac{1}{n+\ell-2} \leq \xi - p_{n-1,k_n} \leq \sigma \frac{1}{2^{n-1}},$$

ce qui contredit le fait que $\frac{1}{2^n}$ est négligeable devant $\frac{1}{n}$ au voisinage de l'infini.

Cas 2: il existe une infinité d'entiers n telle que nous soyons dans la situation $(S1)_n^-$.

Il suffit de reprendre les arguments du cas 1, en considérant l'intervalle $[a_{n,7k_n+4}, a_{n,7k_n+7}]$ au lieu de l'intervalle $[a_{n,7k_n}, a_{n,7k_n+3}]$ pour justifier la relation (25) et en montrant ensuite que nécessairement $\xi = -1$. Pour obtenir une contradiction, il faut utiliser la relation (26)(i) au lieu de la relation (26)(ii).

Cas 3: il existe une infinité d'entiers n telle que nous soyons dans la situation $(S2)_n^+$.

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer en toute généralité que, pour tout $n \geq 2$, nous soyons dans la situation $(S2)_n^+$. D'après la relation (20),

$$\begin{cases} \text{(i)} & f(a_{n,7k_n}) \geq f(\overline{x}) + \xi.(a_{n,7k_n} - \overline{x}) - \sigma(\overline{x} - a_{n,7k_n})^2; \\ \text{(ii)} & f(a_{n,7k_n+6}) \geq f(\overline{x}) + \xi.(a_{n,7k_n+6} - \overline{x}) - \sigma(a_{n,7k_n+6} - \overline{x})^2. \end{cases} \tag{27}$$

D'après la condition (C2)(iv) cas 1(d) et le Lemme 4.8, on a $f_n \geq f_{n-1}(a_{n-1,k_n}) = f(a_{n-1,k_n})$ sur $[a_{n-1,k_n}, a_{n-1,k_n+1}]$ ce qui entraîne, par le Lemme 4.6,

$$f \geq f(a_{n-1,k_n}) \quad \text{sur} \quad [a_{n-1,k_n}, a_{n-1,k_n+1}].$$

En privilégiant le point $\overline{x}$ dans cette dernière inégalité, on a en particulier

$$f(\overline{x}) \geq f(a_{n-1,k_n}) = f(a_{n,7k_n}). \tag{28}$$

En combinant les relations (27)(i) et (28), on déduit

$$\xi.(a_{n,7k_n} - \overline{x}) \leq \sigma(\overline{x} - a_{n,7k_n})^2$$

et, puisque $\overline{x} \notin A$, $\xi \geq -\sigma(\overline{x} - a_{n,7k_n})$. En faisant $n \longrightarrow +\infty$, on conclut que $\xi \geq 0$.

De même, d'après la condition (C2)(iv) cas 1(b) et le Lemme 4.8, on a $f_n \geq f_n(a_{n,7k_n+6}) = f(a_{n,7k_n+6})$ sur $[a_{n,7k_n+3}, a_{n,7k_n+6}]$ ce qui entraîne, par le Lemme 4.6,

$$f \geq f(a_{n,7k_n+6}) \quad \text{sur} \quad [a_{n,7k_n+3}, a_{n,7k_n+6}].$$

En privilégiant le point $\overline{x}$ dans cette dernière inégalité, on a en particulier

$$f(\overline{x}) \geq f(a_{n,7k_n+6}). \tag{29}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

En combinant les relations (27)(ii) et (29), on déduit

$$\xi.(a_{n,7k_n+6} - \bar{x}) \leq \sigma(a_{n,7k_n+6} - \bar{x})^2$$

et, puisque $\bar{x} \notin A$, $\xi \leq \sigma(a_{n,7k_n+6} - \bar{x})$. En faisant $n \longrightarrow +\infty$, on conclut que $\xi \leq 0$.

Ainsi $\xi = 0$; nous allons maintenant montrer que 0 ne peut pas être dans le sous-différentiel proximal de f en $\bar{x}$. D'après la condition (C2)(iv) cas 1(b), nous avons, pour $x \in [a_{n,7k_n+3}, a_{n,7k_n+6}]$,

$$f_n(x) \geq f_n(a_{n,7k_n+6}) - \frac{1}{2}(x - a_{n,7k_n+6}),$$

ce qui entraîne, par le Lemme 4.7 (grâce au Lemme 3.1, on a bien $-\frac{1}{2} \in [\inf P^-_{n-1}, \sup P^+_{n-1}]$, si $n \geq 2$), pour $x \in [a_{n,7k_n+3}, a_{n,7k_n+6}]$,

$$f(x) \geq f_n(a_{n,7k_n+6}) - \frac{1}{2}(x - a_{n,7k_n+6}).$$

En privilégiant le point $\bar{x}$ dans cette dernière inégalité, on a en particulier

$$f(\bar{x}) \geq f_n(a_{n,7k_n+6}) - \frac{1}{2}(\bar{x} - a_{n,7k_n+6}). \tag{30}$$

En combinant les relations (27)(ii) et (30), on déduit, (ne pas oublier que $\xi = 0$)

$$-\frac{1}{2}(\bar{x} - a_{n,7k_n+6}) \leq \sigma(a_{n,7k_n+6} - \bar{x})^2$$

et donc $\frac{1}{2} \leq \sigma(a_{n,7k_n+6} - \bar{x})$. En faisant $n \longrightarrow +\infty$, on aboutit à la contradiction $\frac{1}{2} \leq 0$.

Cas 4: il existe une infinité d'entiers n telle que nous soyons dans la situation $(S2)^-_n$.

Il suffit de reprendre les arguments du cas 3, en considérant le point $a_{n,7k_n+7}$ au lieu du point $a_{n,7k_n}$, le point $a_{n,7k_n+1}$ au lieu du point $a_{n,7k_n+6}$ et en utilisant la condition (C2)(iv) cas 2 au lieu de la condition (C2)(iv) cas 1.

Cas 5: à partir d'un certain rang $n_0 \geq 1$, nous sommes dans la situation $(S3)^+_n$ ou $(S3)^-_n$.

Supposons que pour $n = n_0$, nous soyons dans la situation $(S3)^+_n$ (resp. $(S3)^-_n$). Nous allons alors démontrer par récurrence que nous sommes aussi dans la situation $(S3)^+_n$ (resp. $(S3)^-_n$), pour tout $n \geq n_0$. Plus précisément, montrons que, pour tout $n \geq n_0$, nous avons

$$\begin{cases} \text{(i)} & p_{n-1,k_n} \in P^+_{n-1} \text{ et } r_n = 6 \\ & (\text{resp. } p_{n-1,k_n} \in P^-_{n-1} \text{ et } r_n = 0); \\ \text{(ii)} & k_n = 7^{n-n_0}(k_{n_0} + 1) - 1 \\ & (\text{resp. } k_n = 7^{n-n_0} k_{n_0}). \end{cases} \tag{31}$$

Le résultat est trivialement vrai à l'ordre n_0. Supposons le vrai à l'ordre n ($n \geq n_0$). Comme $r_n = 6$ (resp. $r_n = 0$), d'après la relation (21), $\bar{x} \in [a_{n,7k_n+6}, a_{n,7k_n+7}]$ (resp. $\bar{x} \in [a_{n,7k_n}, a_{n,7k_n+1}]$) et donc $k_{n+1} = 7k_n + 6$ (resp. $k_{n+1} = 7k_n$). La partie (ii) est donc satisfaite à l'ordre $n + 1$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

Comme $p_{n-1,k_n} \in P^+_{n-1}$ (resp. P^-_{n-1}), nous avons, par la condition (C2)(ii), r_{n-1,k_n} est pair (resp. impair). L'égalité

$$r_{n,k_{n+1}} = 7r_{n-1,k_n} + 6 \quad (\text{resp. } r_{n,k_{n+1}} = 7r_{n-1,k_n})$$

permet d'affirmer que $r_{n,k_{n+1}}$ est pair (resp. impair) et donc, par la condition (C2)(ii), $p_{n,k_{n+1}} \in P^+_n$ (resp. P^-_n). On achève la preuve du (i) à l'ordre $n+1$ en remarquant que nous sommes soit dans la situation $(\mathrm{S3})^+_{n+1}$ ou $(\mathrm{S3})^-_{n+1}$.

Grâce à la relation (31) et la condition (C1)(ii), nous avons, pour $n \geq n_0$,

$$\overline{x} \in [a_{n,7k_n+6}, a_{n_0-1,k_{n_0}+1}] \quad \text{et} \quad |a_{n,7k_n+6} - a_{n_0-1,k_{n_0}+1}| \leq \frac{1}{2^n}$$
$$\left(\text{resp. } \overline{x} \in [a_{n_0-1,k_{n_0}}, a_{n,7k_n+1}] \quad \text{et} \quad |a_{n,7k_n+1} - a_{n_0-1,k_{n_0}}| \leq \frac{1}{2^n}\right).$$

En faisant $n \longrightarrow +\infty$, on conclut $\overline{x} = a_{n_0-1,k_{n_0}+1}$ (resp. $\overline{x} = a_{n_0-1,k_{n_0}}$), ce qui contredit le fait que $\overline{x} \notin A$.

En conclusion, aucun des cinq cas n'est possible. On arrive à une contradiction et ainsi $\partial^\pi f(\overline{x}) = \emptyset$.

4.5.2. Calcul de $\partial^\pi f(\overline{x})$ si $\overline{x} \in A$. Supposons que $\partial^\pi f(\overline{x})$ contient au moins un élément noté ξ. Il existe un voisinage V de $\overline{x}$ et il existe $\sigma > 0$ tel que

$$f(y) \geq f(\overline{x}) + \xi.(y - \overline{x}) - \sigma(y - \overline{x})^2, \tag{32}$$

pour $y \in V$. Comme $\overline{x} \in A$, il existe $(m, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ tel que $\overline{x} = a_{m,k}$. D'après la condition (C1)(ii), on peut aussi écrire $\overline{x}$ sous la forme

$$\overline{x} = a_{n,7^{n-m}k}, \tag{33}$$

pour tout $n \geq m$. Notons $p_1 = p_{n,7^{n-m}k-1}$, $p_2 = p_{n,7^{n-m}k}$, $y_1 = a_{n,7^{n-m}k-1}$ et $y_2 = a_{n,7^{n-m}k+1}$; nous avons, d'après la relation (33), $\overline{x} \in [y_1, y_2]$ et de plus $|y_1 - y_2| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$. Donc, pour n assez grand, $(y_1, y_2) \in V \times V$. Pour un tel entier n, par la relation (32), nous avons, pour $i = 1, 2$:

$$f(y_i) \geq f(\overline{x}) + \xi.(y_i - \overline{x}) - \sigma(y_i - \overline{x})^2.$$

Or la fonction f_n est affine sur l'intervalle $[y_1, \overline{x}]$ (resp. $[\overline{x}, y_2]$) de pente p_1 (resp. p_2), donc, pour $i = 1, 2$:

$$f(y_i) = f_n(y_i) = f_n(\overline{x}) + p_i(y_i - \overline{x}) = f(\overline{x}) + p_i(y_i - \overline{x})$$

(utiliser le Lemme 4.8 pour la première et la troisième égalité). En reportant dans la dernière inégalité, on obtient:

$$\begin{cases} (\xi - p_1).(\overline{x} - y_1) \geq -\sigma(\overline{x} - y_1)^2; \\ (p_2 - \xi).(y_2 - \overline{x}) \geq -\sigma(y_2 - \overline{x})^2. \end{cases}$$

Après simplification, on déduit:

$$\begin{cases} \text{(i)} & \xi - p_1 \geq -\sigma(\overline{x} - y_1); \\ \text{(ii)} & p_2 - \xi \geq -\sigma(y_2 - \overline{x}). \end{cases} \tag{34}$$

Nous allons maintenant être obligé d'envisager deux cas complémentaires.

Cas 1: $\overline{x} \notin D$.

Par la condition (C1)(iii), l'entier $r_{m,k}$ est nul ou impair.

· Si $r_{m,k} = 0$, on a les égalités:

$$\begin{cases} r_{n,7^{n-m}k} = 0 & \text{(donc pair);} \\ r_{n,7^{n-m}k-1} = 7^n - 1 & \text{(donc pair),} \end{cases}$$

ce qui entraîne, par la condition (C2)(ii), $p_1, p_2 \in P_n^+$. Alors, en faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans les relations (34), on obtient (i) $\xi - 1 \geq 0$ et (ii) $1 - \xi \geq 0$, soit $\xi = 1$. En injectant cette égalité dans la relation (34)(ii), il vient

$$-\frac{1}{n + \ell - 1} \geq p_2 - 1 \geq -\sigma(y_2 - \overline{x}) \geq -\frac{\sigma}{2^n},$$

ce qui contredit le fait que $\frac{1}{2^n}$ est négligeable devant $\frac{1}{n}$. Dans ce cas, on a donc $\partial^\pi f(\overline{x}) = \emptyset$.

· Si l'entier $r_{m,k}$ est impair, on a les égalités:

$$\begin{cases} r_{n,7^{n-m}k} = 7^{n-m} r_{m,k} & \text{(donc impair);} \\ r_{n,7^{n-m}k-1} = 7^{n-m} r_{m,k} - 1 & \text{(donc pair),} \end{cases}$$

la deuxième égalité étant vraie puisque $7^{n-m} r_{m,k} > 0$. Ceci entraîne, par la condition (C2)(ii), $p_1 \in P_n^+$ et $p_2 \in P_n^-$. Alors, en faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans les relations (34), on obtient (i) $\xi - 1 \geq 0$ et (ii) $-1 - \xi \geq 0$, ce qui est absurde. Dans ce cas, on a donc $\partial^\pi f(\overline{x}) = \emptyset$.

Cas 2: $\overline{x} \in D$.

Par la condition (C1)(iii), l'entier $r_{m,k}$ est pair et non nul. Dans ce cas, on a les égalités:

$$\begin{cases} r_{n,7^{n-m}k} = 7^{n-m} r_{m,k} & \text{(donc pair);} \\ r_{n,7^{n-m}k-1} = 7^{n-m} r_{m,k} - 1 & \text{(donc impair),} \end{cases}$$

la deuxième égalité étant vraie puisque $7^{n-m} r_{m,k} > 0$. Ceci entraîne, par la condition (C2)(ii), $p_1 \in P_n^-$ et $p_2 \in P_n^+$. Alors, en faisant $n \longrightarrow +\infty$ dans les relations (34), on obtient (i) $\xi + 1 \geq 0$ et (ii) $1 - \xi \geq 0$, soit $\xi \in [-1, 1]$ (cette conclusion était prévisible puisque la fonction f est 1-Lipschitzienne).

Montrons maintenant que $\xi = 1$ (resp. $\xi = -1$) n'est pas possible comme élément du sous-différentiel proximal de f en $\overline{x}$. Sinon, en injectant cette égalité dans la relation (34)(ii) (resp. (i)), il vient

$$-\frac{1}{n + \ell - 1} \geq p_2 - 1 \geq -\sigma(y_2 - \overline{x}) \geq -\frac{\sigma}{2^n},$$
$$\left(\text{resp. } -\frac{1}{n + \ell - 1} \geq -1 - p_1 \geq -\sigma(\overline{x} - y_1) \geq -\frac{\sigma}{2^n}\right),$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press

ce qui contredit le fait que $\frac{1}{2^n}$ est négligeable devant $\frac{1}{n}$.

Ainsi $\partial^\pi f(\overline{x}) \subset\,]-1,1[$; montrons qu'inversement $]-1,1[\, \subset \partial^\pi f(\overline{x})$. Pour cela, soit n un entier supérieur à $\max(m,1)$;

· D'après la condition (C2)(iv) cas 1 (c), pour $z \in [a_{n,7^{n-m}k}, a_{n,7^{n-m}k+1}]$, on a

$$f_{n+1}(z) \geq f_n(a_{n,7^{n-m}k}) + \sup P^+_{n-1}.(z - a_{n,7^{n-m}k}).$$

Donc, par les Lemmes 4.7 et 4.8 et la relation (33),

$$\begin{aligned} f(z) &\geq f(\overline{x}) + \sup P^+_{n-1}.(z - a_{n,7^{n-m}k}) \\ &\geq f(\overline{x}) + \left(1 - \frac{1}{n-1+\ell}\right).(z - a_{n,7^{n-m}k}). \end{aligned}$$

· D'après la condition (C2)(iv) cas 2 (c) , pour $z \in [a_{n,7^{n-m}k-1}, a_{n,7^{n-m}k}]$, on a

$$f_{n+1}(z) \geq f_n(a_{n,7^{n-m}k}) + \inf P^-_{n-1}.(z - a_{n,7^{n-m}k}).$$

Donc, par les Lemmes 4.7 et 4.8 et la relation (33),

$$\begin{aligned} f(z) &\geq f(\overline{x}) + \inf P^-_{n-1}.(z - a_{n,7^{n-m}k}) \\ &\geq f(\overline{x}) + (-1 + \frac{1}{n-1+\ell}).(z - a_{n,7^{n-m}k}). \end{aligned}$$

Finalement sur la réunion de ces deux intervalles, *i.e.*, $[a_{n,7^{n-m}k-1}, a_{n,7^{n-m}k+1}]$, on a

$$f(z) \geq f(\overline{x}) + t.(z - a_{n,7^{n-m}k}),$$

dès que $t \in [-1 + \frac{1}{n-1+\ell}, 1 - \frac{1}{n-1+\ell}]$. En prenant $\sigma = 0$ dans la définition du sous-différentiel proximal, on obtient finalement

$$\left[-1 + \frac{1}{n-1+\ell}, 1 - \frac{1}{n-1+\ell}\right] \subset \partial^\pi f(\overline{x}).$$

En faisant $n \longrightarrow +\infty$, on conclut $]-1,1[\, \subset \partial^\pi f(\overline{x})$.

4.6. *Conclusion.* D'après le paragraphe 4.5, nous avons obtenu une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ 1-Lipschitzienne telle que $\partial^\pi f(\overline{x}) = \,]-1,1[$ si $\overline{x} \in A \cap D$ et $\partial^\pi f(\overline{x}) = \emptyset$ sinon. La fonction f satisfait donc bien les conditions du théorème 2.1 puisque, d'après la Proposition 4.3, $D \cap A = D$. Or, d'après le Lemme 4.8, pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$f(k) = f(a_{0,k}) = f_0(a_{0,k}) = f_0(k) = \left(1 - \frac{1}{\ell}\right) k.$$

En particulier, f s'annule en zéro et, si l'on fait varier le paramètre ℓ, toutes les fonctions obtenues sont distinctes au point 1. C'est pourquoi il existe une infinité de fonctions f satisfaisant les conditions du Théorème 2.1.

REFERENCES

1. F. H. Clarke, *Generalized gradients and applications.* Trans. Am. Math. Soc. **205**(1975), 247–262.
2. ———, *Optimization and Nonsmooth Analysis*. John Wiley, New York, 1983.
3. F. H. Clarke and R. M. Redheffer, *The proximal subgradient and constancy*. Canad. Math. Bull. **36** (1993), 30–32.
4. F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev and P. R. Wolenski, *Proximal analysis and minimization principles*. J. Math. Anal. App. **196**(1995), 722–735.
5. F. H. Clarke, R. J. Stern and P. R. Wolenski, *Subgradient criteria for monotonicity, the Lipschitz condition, and convexity*. Can. J. Math. (6) **45**(1993), 1167–1183.
6. E. Jouini, *A remark on Clarke's normal cone and the marginal cost pricing rule*. J. Math. Econom. **17**(1988), 309–315.
7. R. A. Poliquin, *Integration of subdifferentials of nonconvex functions.* Nonlinear Anal. (4) **17**(1991), 385–398.
8. R. T. Rockafellar, *Convex Analysis.* Princeton University Press, New Jersey, 1970.
9. ———, *Proximal subgradients, marginal values, and augmented lagrangians in nonconvex optimization*. Math. Op. Res. **6**(1981), 424–436.
10. ———, *The theory of subgradients and its applications; convex and non convex functions.* Helderman Verlag, Berlin, 1981.
11. S. Saks, *Theory of the integral.* Second revised edition, Hafner Publishing Co., New York, 1937.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
123, rue Albert Thomas
87060 Limoges
France
email: benoist@cict.fr

https://doi.org/10.4153/CJM-1998-013-0 Published online by Cambridge University Press