Can. J. Math., Vol. XXXVI, No. 4, 1984, pp. 601-614

FONCTION DE GREEN ET SURFACES NODALES DES FONCTIONS PROPRES DE L'HAMILTONIEN $-\frac{1}{2}\Delta + V$

J. VAUTHIER

On étudie, dans ce travail, l'hamiltonien $H = \frac{1}{2}\Delta + V$ suivant deux points de vue distincts. Le premier, dans le paragraphe 1, consiste à faire une hypothèse de nature asymptotique sur le potentiel V : on suppose qu'en dehors d'une boule B, il est à croissance au plus polynômiale. On étudie la fonction de Green de H dans le complémentaire de la boule B précédente. La méthode consiste à utiliser le processus de générateur $\frac{1}{2}\Delta$ stoppé sur le bord de B avec V jouant un rôle de création ou d'annihilation. On projette par une fonction d'exhaustion et on utilise un théorème de comparaison. C'est par un calcul élémentaire sur une équation du second ordre que l'on calcule les poids des espaces entre lesquels opère la fonction de Green du complémentaire de B définie par H.

Le deuxième paragraphe traite, au contraire, de la situation à distance finie: on suppose que V est dans L^P_{loc}, $p > n/2$ et on prouve grâce à l'exponentielle de Kac, un résultat concernant la représentation sur un compact K des solutions f de $Hf = 0$ qui sont dans $L^{q+\epsilon}(\mathbf{R}^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\epsilon > 0$ et qui sont nulles sur le bord K. Dans **[5]**, Gaveau obtient un résultat analogue avec $p = 2$, $\epsilon = 0$, f dans L^P_{loc}, et V dans L^∞_{loc}. On peut ainsi, en passant, trouver un résultat de régularité pour la solution f : ceci est plus faible que le théorème de Carmona **[4]** ou Simon **[11]** ou encore que les résultats génèraux sur les opérateurs elliptiques **[10]**, mais la méthode employée ici, quoique tout à fait élémentaire, permet d'accrocher déjà la continuité de f. Le résultat central concerne la taille des surfaces nodales: on donne une estimée du diamètre d'une telle surface en fonction de la grosseur de la norme L^P de la partie négative de $V - \lambda$ (λ valeur propre correspondante). On trouve aussi, de manière élémentaire, en l'améliorant si $V \geqq 0$, le résultat de Madame Berthier **[1]** sur le spectre compact de H : il est nul si $p > n - 2$ (nous avons $p > n/2$). Si

Reçu le 4 avril 1983.

$V < 0$, notre condition fait intervenir le diamètre du support (ce dont Madame Berthier n'a pas besoin) mais $p > n/2$ ce qui si mieux que $p > n - 2$. La question se pose évidemment de savoir l'on peut construire des potentiels "trop gros" pour le compact qui permettait pour $n/2 < p < n - 2$ l'existence de solutions compactes non identiquement nulles.

Je remercie MM. P. Malliavin et B. Gaveau pour les conversations que j'ai eues avec eux concernant ce travail.

1. Etude de la fonction de Green associée à $-\frac{1}{2}\Delta + V$.

1.0. Soit K un compact de $\mathbf{R}^n$. On note Δ le laplacien euclidien

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial X_i^2}$$

et V une fonction de classe C^1 sur le complémentaire de K et satisfaisant pour $a \geqq 0$,

1.0.1 $\quad V(x) \geqq -C(1 + |x|)^a, \quad x \in \mathbf{R}^n \setminus K.$

Soit $R > 1$ tel que $K \subset \{ |x| < R\}$.

1.1. On note x_ω^R le processus sur $\{|x| \geqq R\}$, stoppé sur $\{ |x| = R\}$ et de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta - V$. $p^R(t, X, y)$ désigne la loi de x_ω^R et $G^R(x, y)$ la fonction de Green associée

$$G^R(x, y) = \int_0^{+\infty} P(t, x, y)dt \leqq +\infty.$$

Dans ce premier paragraphe, on va montrer que G^R définit un opérateur continu entre des espaces L^r avec poids, ce qui prouvera en particulier qu'elle n'est pas infinie.

1.2. *Fonction d'exhaustion.* On pose

$$q(x) = \exp[(1 + x)^b] \quad \text{avec } b \geqq \frac{a}{2} + 1$$

(donc $b \geqq 1$). On a alors par un calcul direct

1.2.1. $$|\overrightarrow{\text{grad}}\, q|^2 = q^2b^2(1 + |x|)^{2b-2} = \alpha(q)$$

$$\Delta q = qb^2(1 + x)^{2b-2} + qb(b - 1)(1 + |x|)^{b-2}$$

$$\geqq qb^2(1 + |x|)^{2b-2} = \beta(q)(\text{car } b \geqq 1).$$

Donc

$$\frac{\Delta q}{|\overrightarrow{\text{grad}}\, q|^2} \geqq \frac{1}{q} = \frac{\beta}{\alpha}(q).$$

1.2.2. $$\sup_{q(x) \geqq \xi} \frac{-V(x)}{|\overrightarrow{\text{grad}}\, q|^2} \leqq \frac{C}{b^2\xi^2} = \widetilde{V}(\xi)$$

on posera $k = C/b^2$.

Pour obtenir un opérateur G^R entre deux espaces à poids à partir du noyau $G^R(x, y)$, on peut essayer (cf. [**12**]) pour des fonctions A convenables définies sur $\mathbf{R}^+$, d'obtenir une majoration du type

$$\int G^R(x, y)A(q(y)) \leqq B(q(x))$$

avec B explicite.

1.3. *Définition.* On note $\underset{\sim}{b}_\omega$ le bownien usuel de $\mathbf{R}^n$ de générateur infinitésimal $\frac{1}{2}\Delta$. On pose

$$S = \inf \{t; |b_\omega| = R\}$$

(premier temps de rencontre de l'ouvert $O_R = \{x; |x| > R\}$).

1.4. LEMME. *Avec les notations précédentes, on a pour toute fonction A positive et tout x de O_R l'égalité*

$$\int G^R(x, y)A(q(y))dy = E_x \int_0^S \exp\left(\int_0^t - V(b_\omega)ds\right)A(q(b_\omega))\, dt.$$

Preuve. Egalité classique qui se démontre en utilisant la définition de G^R et de S grâce à l'exponentielle de Kac.

On utilisera dans la suite le lemme de comparaison suivant (voir P. Malliavin [**7**], [**8**], [**9**], pour un lemme de comparaison général).

1.5. LEMME ([**6**], p. 120). *Soit b_ω le brownien sur $\mathbf{R}$ et soient ξ_1 et ξ_2 des solutions sur $\mathbf{R}$ de*

$$d\xi_i = a_i(t, \xi_i)dt + db_\omega \quad (i = 1, 2)$$

satisfaisant $\xi_1(0) = \xi_2(0) = x$. Si, pour tout $t \geqq 0$ et x, on a $a_1(t, x) < a_2(t, x)$, alors

$$\xi_1(t) \leqq \xi_2(t)$$

presque surement pour tout $t \geqq 0$.

1.6. *Definition.* Soit l'opérateur différentiel

$$L = \frac{\alpha(\xi)}{2} \frac{d}{d\xi^2} + (n - 1)\beta(\xi)\frac{d}{d\xi} + \alpha\widetilde{V}(\xi)$$

ou α et β sont définies en 1.2.1. On note $g(\xi, \eta)$ la fonction de Green de L sur $[R, +\infty]$ donnant la solution $g(f)$ de l'équation

$$L(g(f)) = f$$

$$g(f)_{|\xi=R} = 0$$

$$\lim_{\xi\to+\infty} g(f) = 0.$$

1.7. *Définition.* Si $2n - 3 > \sqrt{8k}$ (k défini en 1.2.2) on pose

$$r\pm = -(2n - 3) \pm \sqrt{(2n - 3)^2 - 8k}.$$

1.8. Lemme. *Si* $2n - 3 > \sqrt{8k}$,

$$g(\xi, \eta) = \frac{1}{\sqrt{(2n - 3)^2 - 8k}} \left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{r_+} - \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{r_-} \right] \frac{\eta}{\alpha(\eta)}.$$

Preuve. L'équation différentielle

$$\frac{\alpha}{2} y'' + (n - 1)\beta y' + \alpha\widetilde{V} y = f$$

équivaut à

$$\frac{\xi^2}{2} y'' + (n - 1)\xi y' + ky = \frac{f}{\alpha} \xi^2$$

après multiplication par ξ^2/α. On la transforme en l'équation linéaire suivante par le changement $\xi = e^u$, $z(u) = y(\xi)$:

$$\frac{1}{2} z'' + \left(n - \frac{3}{2}\right) z' + kz = \frac{f}{\alpha} (e^u)e^{2u}.$$

D'où la solution annulant à l'infini et pour $\xi = R$ si $2n - 3 > \sqrt{8k}$ en utilisant 1.7:

$$\frac{1}{\sqrt{(2n - 3)^2 - 8k}} \int_R^\xi \left[\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{r_+} - \left(\frac{\xi}{\eta}\right)^{r_-} \right] \frac{f(\eta)}{\alpha(\eta)} \eta^2 \frac{d\eta}{\eta}.$$

1.9. Lemme. *Pour toute fonction A positive décroissante sur* $[R, +\infty[$, *on a la majoration suivante*

1.9.1. $$E_x \int_0^S \exp\left(-\int_0^t V(b_\omega(s))ds\right)A(q(\underset{\sim}{b}_\omega(t)))dt$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{(2n-3)^2-8k}} \int_R^{+\infty} \left| \left(\frac{q(x)}{\eta}\right)^{r_+} - \left(\frac{q(x)}{\eta}\right)^{r_-} \right| \frac{A(\eta)d\eta}{\eta}.$$

Preuve. Le changement d'horloge

$$t^* = r_\omega^{-1}(t) = \int_0^t |\overrightarrow{\text{grad}}\, q|^2(\underset{\sim}{b}_\omega(s))ds$$

transforme

$$\mathscr{E} = E_x \int_0^S \exp\left(-\int_0^t V(b_\omega(s))ds\right) A(q(\underset{\sim}{b}\,_\omega(t)))dt$$

en

$$\mathscr{E} = E_x \int_0^{S^*} \exp\left(-\int_0^{t^*} \frac{V(\underset{\sim}{b}_\omega(s^*))}{|\overrightarrow{\text{grad}}\, q(\underset{\sim}{b}\omega)|^2} ds\right) \times \frac{A(q(\underset{\sim}{b}_\omega(\tau_\omega(t^*))))}{|\overrightarrow{\text{grad}}\, q(\underset{\sim}{b}_\omega(t^*))|^2} dt^*.$$

On note $r_\omega = |\underset{\sim}{b}_\omega|$ le processus de Bessel défini par l'équation différentielle stochastique

$$dr_\omega = d\underset{\sim}{b}_\omega + \frac{n-1}{r} dt.$$

Le lemme d'Ito ([**6**], p. 24) permet de calculer la différentielle stochastique de $q(\underset{\sim}{b})$

$$dq(\underset{\sim}{b}_\omega) = b(1+r)^{b-1} q\left(d\underset{\sim}{b}_\omega + \frac{n-1}{r}dt\right) + \frac{1}{2}[b(b-1)(1+r)^{b-2}q(r) + b^2(1+r)^{2b-2}q(r)]dt.$$

Le changement d'horloge τ_ω donne alors

$$dq(\underset{\sim}{b}_\omega(\tau_\omega)) = d\underset{\sim}{b}_\omega + \left(\frac{n-1}{r_\omega} + \frac{1}{2}\frac{b-1}{1+r_\omega} + \frac{1}{2}b(1+r)^{b-1}\right)dt.$$

Comme

$$\frac{b-1}{1+r} + b(1+r)^{b-1} > 0,$$

quel que soit r, le Lemme 1.5 s'applique, et on a

$$q(\underset{\sim}{b}_\omega(\tau_\omega)) \geqq u_\omega(t) = q(x) + \underset{\sim}{b}_\omega(t) + \int_0^t \frac{n-1}{u_\omega(s)} ds.$$

L'expression $\mathscr{E}$ est majorée par (A decroit)

$$\mathscr{E} \leqq E_{q(x)} \int_0^{s^*} \exp\left(\int_0^{t^*} \tilde{V}(u_\omega(s)ds\right) \times \frac{A(u_\omega(t^*))}{\inf_{q(\underset{\sim}{b}_\omega) \geqq u_\omega(t^*)} |\overrightarrow{\text{grad}}\, q(\underset{\sim}{b}_\omega)|^2} dt^*.$$

Un nouveau changement d'horloge

$$t' = \sigma_\omega^{-1}(t) = \int_0^t \frac{dt}{\alpha(u_\omega)}$$

donne en posant $v_\omega = u_\omega(\sigma_\omega(t'))$, $S' = \sigma_\omega^{-1}(S^*)$,

$$\mathscr{E} \leq E_{q(x)} \int_0^{S'} \exp\left(\int_0^{t'} \tilde{V}(v_\omega(s))\alpha(v_\omega)ds\right) \times \frac{A(v_\omega(t'))\,\alpha(v_\omega)}{\inf_{q(\underset{\sim}{b}_\omega) \geq v_\omega(t')} |\overrightarrow{\text{grad}}\, q(\underset{\sim}{b}_\omega)|^2}.$$

On remarque que

$$(\alpha(v_\omega)/\inf_{q(\underset{\sim}{b}_\omega) \geqq v_\omega} |\overrightarrow{\text{grad}}\, q(\underset{\sim}{b}_\omega)|^2)) = 1.$$

La fonction

$$\psi(\xi) = E_\xi \int_0^{S'} \exp\left(\int_0^{t'} \tilde{V}(v_\omega(s))\alpha(v_\omega(s))ds\right) A(v_\omega(t'))dt'$$

est la solution de $L_\psi = A$ qui s'annule à l'infini et en $\xi = R$. Donc

$$\psi(\xi) = g(A)(\xi) = \int_R^{+\infty} g(\xi, \eta) A(\eta) d\eta$$

est donnée par 1.8 que l'on majore facilement pour obtenir 1.9.1.

1.10. *Définition*. On appelle $\mathscr{F}$ la classe de fonctions A telles que A soit décroissante, positive sur $\mathbf{R}^+$ et que l'integrale suivante converge:

$$\int_R^{+\infty} A(\xi)\xi^{-r_+ -1} d\xi < +\infty.$$

On pose $B(\xi) = \xi^{r_+}$.

https://doi.org/10.4153/CJM-1984-038-3 Published online by Cambridge University Press

1.11. THEOREME. *Pour tout A dans $\mathcal{F}$, pour $n \geqq 2$ et*

$$b \geqq \max \left(\frac{2\sqrt{2C}}{2n - 3}, \frac{a}{2} + 1 \right),$$

$G^R_{(x, y)}$ définit un opérateur continu de l'espace à poids $L^r(B(q)A^{1-r}(q))$ dans l'espace à poids $L^r(A(q)B^{1-r}(q))$ pour $1 < r < +\infty$ avec

$$q(x) = \exp (1 + |x|)^b.$$

Preuve. On utilise un résultat standard d'analyse fonctionelle grâce à la majoration

$$\int G^R(x, y)A(q(y))dy \leqq Cte \cdot B(q(x))$$

obtenue à partir de 1.9.1 ([**12**]).

On a ainsi plus particulièrement avec $A = \xi^{r \cdot -\epsilon}$:

1.12. *Corollaire. Pour tout $\epsilon > 0$ sous les hypothèses de* 1.11 *$G^R(x, y)$ définit un opérateur continue de*

$$L^r(q(x)^{(2-r)r_+ + \epsilon(r-1)}) \text{ dans } L^r(q(x)^{(2-r)r_+ - \epsilon}), \; 1 < r < \infty;$$

en particulier si $r = 2$, de $L^2(q(x)^{\epsilon})$ dans $L^2(q(x)^{-\epsilon})$.

2. Etude du spectre compact. Surfaces nodales.

LEMME 2.1. *Soient K un compact de $\mathbf{R}^n$ et $V \geq 0$ un élément de $L^P(K)$ avec $p > n/2$. Il existe une constante $C(n, p, V)$ telle que pour tous a et $t > 0$ vérifiant $at < C(n, p, V)$ on ait*

$$\sup_{x \epsilon K} E_x \left[e^{a \int_0^t V(b_\omega(s)) 1_K(b_\omega(s)) ds} \right] < +\infty.$$

Preuve. Théorème 11.2, p. 117 de [**11**].

LEMME 3.2. *Soit V à support dans un compact K, V dans $L^P(K)$, $p > n/2$. Soit $\{V_j\}$ une suite extraite de fonctions continues à support compact convergeant vers V dans $L^P(K)$. Alors, pour tout $\alpha > 0$, tout $t < c/2\alpha$, ($c = c(n, p, V^-)$ du Lemme* 1), *et tout x de K il existe une suite extraite V_{j_k} de V_j pour laquelle on a* :

$$\lim_{j \to +\infty} E_x \left| e^{-\int_0^t V_{j_k}(b_\omega(s)) ds} - e^{-\int_0^t V(b_\omega(s)) ds} \right|^\alpha = 0.$$

Preuve. Par l'inégalité de Hölder on a

$$E_x \left[\left| e^{-\int_0^t (V_j - V)(b_\omega(s)) ds} - 1 \right|^\alpha e^{-\alpha \int_0^t V(b_\omega) ds} \right]$$

$$\leq \left(E_x\left|e^{-\int_0^t(V_j-V)ds}-1\right|^{2\alpha}\right)^{1/2}\left(E_x\, e^{2\alpha\int_0^t V^-\, ds}\right)^{1/2}$$

avec $V^- = \sup(-V, 0)$. Ce dernier terme est borné si

$$2\alpha t \leqq C(n, p, V^-).$$

Pour contrôler le premier terme, on remarque que si $g(x, y)$ est la fonction de Green usuelle de $\mathbf{R}^n$, et 1_K l'indicatrice du compact K,

$$E_x \int_0^t |V_j - V|ds \leq \int_{\mathbf{R}^n} g(x, y)1_K(y)\,|V_j - V|(y)dy$$
$$\leq \left(\int_K |V_j - V|^p(y)dy\right)^{1/p}\left(\int_K g(x, y)^q dy\right)^{1/q}$$

avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Comme $p > \frac{n}{2}$,

$$\int_K \frac{dy}{|x - y|^{(n-2)q}} \leq C_K,$$

C_K indépendante de x. Donc

$$E_x \int_0^t |V_j - V|ds \text{ tend vers } 0,$$

et presque sûrement $\int_0^t V_{j_k}(b_\omega(s))ds$ a pour limite $\int_0^t V(b_\omega(s))ds$, V_{j_k} étant une suite extraite de la suite V_j. Donc, presque sûrement

$$\left|e^{-\int_0^t(V_{j_k}-V)(b_\omega(s))ds} - 1\right| \leqq 2$$

et le théorème de convergence dominée achève la démonstration.

Lemme 2.3. *Soit V à support dans K, V élément de $L^P(K)$, $p > n/2$. Il existe t_o tel que pour toute fonction $F \in C^2$ à support compact dans K et tout $t \leqq t_o$ on ait pour tout x de K*

$$f(x) = E_x\left[e^{-\int_0^t(V(b_\omega(s))ds}f(b_\omega(t))\right]$$
$$+ E_x\left[\int_0^t e^{-\int_0^s(V(b_\omega)du)}\left(\frac{1}{2}\Delta f - Vf\right)\right].$$

Preuve. Soit $\{V_j\}$ suite de fonctions continues convergeant vers V dans $L^P(K)$. On écrit la formule de Dynkin ([**5**], Lemme 8) pour f et V_j:

$$f(x = E_x\left[e^{-\int_0^t V_j ds}f(b_\omega(t))\right] + E_x\left[\int_0^t e^{-\int_0^s V_j du}\left(\frac{1}{2}\Delta f - Vf\right)\right].$$

Comme f est bornée, en utilisant le Lemme 2.2, le premier terme converge vers

$$E_x\left[e^{-\int_0^t V(b_\omega) ds} f(b_\omega(t))\right].$$

Pour le second, on étudie

$$A = E_x\left[\int_0^t (e^{-\int_0^s V_j} - e^{-\int_0^s V})\left(\frac{1}{2}\Delta f - V_j f\right)\right]$$

$$+ E_x\left[\int_0^t e^{-\int_0^s V} (V - V_j) f\right].$$

Définition 2.4. Soit K un compact et T_K le temps d'arrêt de la diffusion, partant de $x \in K$, sur ∂K:

$$T_K = \inf \{t | b_\omega(t) \in \partial K\}.$$

On pose $H = \frac{1}{2}\Delta - V$, V dans $L^p{}_{\mathrm{loc}}(R^n)$.

LEMME 2.5. *Soit f dans $L^{q+\epsilon}(R^n)$, $\epsilon > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et solution au sens des distributions de l'équation $Hf = 0$. Alors $f(b_\omega(T_K))$ a un sens.*

Preuve. Comme f est dans $L^{q+\epsilon}$, Vf est dans un $L^{1+\epsilon'}(K)$ pour un $\epsilon' > 0$. Un argument standard d'ellipticité montre que puisque Δf est dans $L^{1+\epsilon'}(K)$, f est dans l'espace de Sobolev $W^{1+\epsilon'}(K)$. f est donc continue sauf sur un ensemble de capacité nulle et $f(b_\omega(T_K))$ est défini.

PROPOSITION 2.6. *Soit $p > n/2$ et V dans $L^p{}_{\mathrm{loc}}(R^n)$. Pour tout $\epsilon > 0$ toute fonction f de $L^{q+\epsilon}(R^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, solution de $Hf = 0$ et telle que $f(b_\omega(T_K)) = 0$ p.s., se met sous la forme*

$$(p \cdot p \cdot x \in K)(\forall t > 0)$$

$$f(x) = E_x[\exp\left(-\int_0^{t \wedge T_K} V(b_\omega(s)) ds\right) f(b_\omega(t \wedge T_K))].$$

Preuve. Soit f_k une suite de fonctions C^2 à support compact dans K telles que $\{f_k\}$ tends vers f dans $W^{1+\epsilon'}_{(2)}(K)$ (cf. Lemme 2.5) et $\{f_k(x)\}$ tend vers $f(x)$ presque partout. On utilise la formule du Lemme 2.3 pour chaque f_k et $V1|_K$:

$$f_k(x) = E_x[\exp\left(-\int_0^t V1|_K(b_\omega(s)) ds\right) f_k(b_\omega(s))]$$

$$+ E_x\left[\int_0^t \exp\left(-\int_0^s V1|_k(b_\omega(s)) ds\right) f_k(b_\omega(s)) ds\right].$$

Soit $a(\epsilon)$ conjugé de $1 + \epsilon'$, i.e.,

$$\frac{1}{a(\epsilon)} + \frac{1}{1\mathrm{m} + \epsilon'} = 1.$$

Soit $t_1(\epsilon)$ et C_ϵ associés par le Lemme 2.1 à la constante $a(\epsilon)$. Alors d'une part:

$$|E_x[\exp\left(-\int_0^{t\wedge T_K} Vds\right)(f_k - f)]|$$

$$\leqq \{E_x[\,|f_k - f|\,(b_\omega(t\wedge T_K))]^{1+\epsilon'}\}^{1/1+\epsilon'}$$

$$\times \left\{E_x \exp\,(a(\epsilon) \int_0^{t\wedge T_K} V^- ds\right\}^{1/a(\epsilon)}.$$

Comme $t < t_1(\epsilon)$, $t_\wedge T_K < t_1(\epsilon)$ et cette derniére esperance est bornée par $(C_\epsilon)^{1/a(\epsilon)}$. De plus

$$E_x|f_k - f|^{1+\epsilon'}(b_\omega(t\wedge T_K)) = E_x[1|_{t<T_K}\,|f_k - f|^{1+\epsilon'}(b_\omega(t))]$$

$$+ E_x[1|_{t\geqq T_K}\,|f_k - f|^{1+\epsilon'}(b_\omega(T_k))].$$

Ce deuxième terme est nul par hypothèse et le premier est égal à

$$\int_K p^{(K)}(t, x, y)|f_k - f|^{1+\epsilon'}(y)dy$$

où $p^{(K)}$ désigne la loi du brownien stoppé sur $\partial(K)$. Comme $p^{(K)}$ opère continûment de $L^1(K)$ dans lui-même, ceci tend vers 0.

D'autre part

$$|E_x \int_0^{T\wedge t_K} \exp\left(-\int_0^s V\right)H(f - f_k)(b_\omega(s))ds$$

$$\leqq \int_0^{T\wedge t_K}\left[E_x \exp\left(a(\epsilon) \int_0^s V^-\right)\right]^{1/a(\epsilon)}$$

$$\times \left[E_x|H(f-f_k)|^{1+\epsilon}\right]^{1/1+\epsilon'} ds$$

$$\leqq \left[\int_0^{T\wedge t_K} E_x \exp\,(a(\epsilon) \int_0^s V^-)ds\right]^{1/a(\epsilon)}$$

$$\times \left[\int_0^{t\wedge t_K} E_x|H(f_k - f)|^{1+\epsilon'}ds\right]^{1/1+\epsilon'}$$

et pour $t < t_1(\epsilon)$, ce premier terme est borné par

$$t_1^{1/a(\epsilon)}C_\epsilon^{1/a(\epsilon)} \quad \text{(voir Lemme 2.1).}$$

Le second est majoré par

$$\int_K G^K(a, y)\,|H(f_k - f)|^{1+\epsilon'}dy.$$

G^K désignant la fonction de Green du compact K, soit:

$$G_K(x, y) = \int_0^{+\infty} p^k(t, x, y)dt.$$

Comme G^K opère continûment de L^1_K dans L^1_K, on en déduit que ce terme tend vers 0.

En extrayant une sous-suite on obtient la formule de représentation annoncée pour $t \leqq t_1(\epsilon)$ et presque tout x. On commence par se débarrasser de la borne $t_1(\epsilon)$. Entre $t_1(\epsilon)_\wedge T_K$ et $2t_1(\epsilon)_\wedge T_k$, on a, en conditionnant par la tribu du passé de $t_1(\epsilon) \wedge T_k$

$$E_x\left[\exp\left(-\int_0^{2t_1\wedge T_K} V1_K(b_\omega)ds\right)f(b_\omega)(2t_1\wedge T_K)\right)$$

$$= E_x\left[\exp\left(-\int_0^{t\wedge T_K} V(b_\omega)1_K ds\right)E_{(b_\omega(t_1\wedge T_K))}\right.$$

$$\left.\times\ (\exp\left(-\int_0^{t\wedge t_K} V1_K\, ds\right)f(b_\omega)(t_1\wedge T_K))\right]$$

$$= E_x \exp\left(-\int_0^{t\wedge t_K} V1_K(b_\omega)ds\right)f(b_\omega(t_1\wedge T_K))$$

$$= f(x)$$

ceci se reproduit de $2t_1{}_\wedge T_K$ à $3t_1{}_\wedge T_K \ldots$ et on a ainsi prouvé la formule $p \cdot p \cdot$ en x.

COROLLAIRE 2.7. *Toute [classe de] fonction de $L^{q+\epsilon}$ (R^n) solution de $Hf = 0$ et telle que $f(b_\omega(T_K)) = 0$, a un représentant continu sur K.*

Preuve. Pour prouver la continuité en x on écrit $V = V_1 + R$ ou V_1 est continue et

$$\|R\|_{L^p(K)} < \alpha.$$

On pose

$$X_x(\omega) = \exp\left(-\int_0^t V1_K\,(b_\omega(s) + x)\right)ds$$

$$Y_x(\omega) = \exp\left(-\int_0^t R1_K\,(b_\omega(s) + x)\right)ds.$$

$X_x(\omega)$ est continue en x, ω fixe et

$$\|X_x\|_{L^\infty(\Omega x K)} < M.$$

On a donc à étudier $(1/a + 1/b = 1)$

$$\left|E_o(X_xY_x - X_{x'}Y_{x'})\right| \leqq \left(E_o|X_x - X_{x'}|^a\right)^{1/a}\left(E_o(|Y_x|^b)\right)^{1/b}$$

$$= \left(E_o|X_{x'}|^{a_1}\right)^{1/a_1}\left(E_o|Y_x - Y_{x'}|^{b_1}\right)^{1/b_1}.$$

Le premier terme tend vers 0, et le second aussi parce que prenant $a_1 = +\infty$, $b_1 = 1$,

$$E_o\left|\exp\left(-\int_0^t R1_K(x + b_\omega)ds - \exp\left(-\int_0^t R1_K(x' + b_\omega)ds\right|\right.\right.$$

$$= E_o\left|\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left[\int_0^t R1_K(x + b_\omega)ds\right]^k - \left[\int_0^t R1_K(x' + b_\omega)\right]^k\right|$$

$$\leqq \sum_{k=1}\left[E_o\left(\int_0^t R1_K(x + b_\omega(t_1))dt_1\right.\right.$$

$$\left.\times \int_{t_1}^t \dots \int_{t_{k-1}}^t R1_K(x' + b_\omega(t_k))dt_k\right)$$

$$\left. + E_o\int_0^t R1_K(x' + b_\omega(t_1))dt_1\int_{t_1}^t \dots \int_{t_{k-1}}^t R1_K(x' + b_\omega(t_k))dt_k\right]$$

et par le méthode du Lemme 2.1, on majore ces espérances par

$$\|R\|^k_{L^p(K)}(\widetilde{C}_{q,n})^k t^{(1-n/2p)k}$$

qui est plus petit que δ^k, $\delta < 1$, si α est assez petit. La somme de la série est majorée par C_α d'où le contrôle du deuxième terme.

Remarque. Un résultat de régularité plus fort est prouvé dans [**4**] prop. (3.3) et Corollaire 25.8, p. 262 de [**10**].

THEOREME 2.8. *Soit f une fonction propre de $-\frac{1}{2}\Delta + V$. On suppose que V est dans $L^p{}_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $p > n/2$ et f dans $L^{q+\epsilon}(R^n)$, $\epsilon > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On suppose de plus que $f(b_\omega(T_K)) = 0$ (Lemme 2.5) pour un compact K et f non identiquement nulle sur K. Si λ est la valeur propre correspondante, on a l'estimation suivante du diamètre de K:*

$$(\text{diam } K)^{(n-2p)/p} \leqq \gamma_{p,n}\,\|(V - \lambda)^-\|_{L^p(K)}$$

où

$$\gamma_{p,n} = 2^{n/2-1}\Gamma\left(\frac{n}{2} - 2\right)\frac{1}{p}\,(\sigma_{n-1})^{-1/q}\left(\frac{2p - n}{p - 1}\right)^{-1/q}$$

σ_{n-1} désignant l'aire de la sphère unité de R^n.

Preuve. Prouvons ce thérème par contraposition. Posons $\widetilde{V} = V - \lambda$. Il revient alors à montrer que si

$$\|\tilde{V}^-\|_{L^p(K)} < \frac{1}{\gamma_{p,n}} (\text{diam } K)^{(n-2p)/p}$$

alors toute solution de $Hf = 0$ dans $L^{q+\epsilon}(R^n)$ satisfaisant $f(b_\omega(T_K)) = 0$, est identiquement nulle sur K. Découpons l'espace de probabilité suivant les deux évènements $\{t < T_K\}$ et $\{t \leqq T_K\}$. On a donc (prop. 2.7)

$$f(x) = E_x \left[\exp\left(-\int_0^{T_k} \tilde{V}(b_\omega(s))ds \right) F(b_\omega(T_K)) \right]$$
$$+ E_x \left[\exp\left(-\int_0^t \tilde{V} 1_K(b_\omega(s))ds \right) F(b_\omega(t)) 1_{\{t \leqq T_K\}} \right].$$

Le premier terme est nul par hypothèse sur f. Le second est majoré, en utilisant deux fois l'inégalité de Hölder, par

$$\left(E_x \left[\exp\left(-p \int_0^t \tilde{V} 1_K(b_\omega(s))ds \right) \right] \right)^{1/p} (E_x|f|^{q+\epsilon})^{q/q+\epsilon}$$
$$\times (P(t \leqq T_K))^{\epsilon/q+\epsilon}.$$

Le deuxième terme est uniformément borné en $t \geqq 1$, le troisième tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Il suffit donc que le premier terme soit uniformément borné en t. Nous le contrôlons grâce au résultat de [**2**] (Théorème 1). On a

$$\sup_{t>0} \sup_{x \in K} E_x \left[\exp\left(-p \int_0^t \tilde{V} 1|_k(b_\omega(s))ds \right) \right] < +\infty.$$

Si

$$\sup_{x \in K} \int_K G(x, y) p(\tilde{V}(y))^- dy = \alpha < 1,$$

$G(x, y)$ désignant le noyau de Green usuel de R^n. C'est ici que nous faisons intervenir notre hypothèse de depart: nous savons que

$$\|\tilde{V}^-\|_{L^p(K)} < \frac{1}{\gamma_{p,n}} (\text{diam } K)^{(n-2p)/p}$$

or

$$\int_K G(x, y) p(\tilde{V}(y))^- dy \leqq \left(\int_K (G^q(x, y)dy \right)^{1/q} \|\tilde{V}^-\|_{L^p(K)}$$
$$< \frac{1}{\gamma_{p,n}} (\text{diam } K)^{(n-2p)/p} \left(\int_K G^q(x, y)dy \right)^{1/q}.$$

Comme

$$G(x, y) = \frac{2^{n/2-1} \Gamma\left(\frac{n}{2} - 2\right)}{|x - y|^{n-2}},$$

on a

$$\left(\int_K G^q(x, y)dy\right)^{1/q} = 2^{n-2}\,\Gamma\left(\frac{n}{2} - 2\right)\left(\int_K \frac{dy}{|x - y|^{q(n-2)}}\right)^{1/q}$$
$$\leqq \gamma_{p,n}\,(\mathrm{diam}\,K)^{(2p-n)/p}.$$

Ce qui prouve que

$$\sup_{x \in K} \int_K G(x, y)p(\widetilde{V}^-(y))^- dy = \alpha < 1$$

et termine la démonstration.

Au cours de la démonstration, nous avons prouvé le résultat suivant (cf [**1**]).

THEOREME 2.9. 1) *Les solutions compactes de* $Hf = 0$ *qui sont dans* $L^{q+\epsilon}(Rn)$ *avec* $V \geqq 0$ *et* V *dans* $L^p{}_{\mathrm{loc}}(R^n)p > n/2$ *sont identiquement nulles.*

2) *Si* V *est quelconque dans* $L^p{}_{\mathrm{loc}}(R^n)$, $p > n/2$, f est identiquement nulle sur K si $Hf = 0$, f dans $L^{q+\epsilon}(R^n)$ *et*

$$||V||_{L_p(K)} \leqq \frac{1}{\gamma_{p,n}}\,(\mathrm{diam}\,K)^{(n-2p)/p}.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. A.M. Berthier, *On the point spectrum of Schrodinger operator,* Ann. Scient. Ecole Normale Sup. *15* (1982), 1-15.

2. A.M. Berthier et B. Gaveau, *Critère de convergence des fonctionnelles de Kac et application en mécanique quantique et en géométrie*, Journal of Functional Analysis *29* (1978), 416-424.

3. R. Carmona, *Pointwise bounds for Schrodinger eigenstates*, Comm. Math. Phys. *62* (1978), 97-106.

4. ——— *Regularity properties of Schrodinger and Dirichlet semigroups*, J. Funct. Anal. *33* (1979), 259-296.

5. B. Gaveau, *Fonctions propres et non existence absolue d'états liés pour certains systèmes quantiques*, Communication in Math. Physics *69* (1979), 131-147.

6. I.L. Gihman et A.V. Shorokhod, *Stochastic differential equations* (Springer-Verlag, Berlin, 1972). (Ergebnisse der Mathematik, 72).

7. P. Malliavin, *Asymptotic of the Green's function of Riemannian manifold and Ito's stochastic integrals*, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. *71* (1974), 381-383.

8. ——— *Géométrie stochastique*, Cours au C.I.M.E. (1976).

9. ——— *Géométrie différentielle stochastique*, Montréal, Les Presses de L'Université de Montréal, (1978). (Séminaire de Mathématiques Supérieures, Eté, 1977).

10. J. Moser, *A new proof of De Giorgi's theorem concerning the regularity for elliptic differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. *13* (1960), 457-468.

11. B. Simon, *Functional integration and quantum physics* (Academic Press, 1979).

12. J. Vauthier, *Théorèmes d'annulation et de finitude d'espaces de 1-formes harmoniques sur un variété de Riemann ouverte*, Bull. Sc. Math. *103* (1979), 129-177.

Université de Paris VI,
Paris, France