SUR LES ÉVÉNEMENTS EN CHAÎNE ET LA DISTRIBUTION BINOMIALE NÉGATIVE GÉNÉRALISÉE*)

par

CORNELIS CAMPAGNE

Amsterdam

§ 1. INTRODUCTION

Dans plusieurs études [1] Ammeter a démontré que la distribution binomiale négative généralisée peut être interprétée de différentes manières, à savoir comme

a. une contagion des probabilités (Pólya-Eggenberger);
b. une distribution de Poisson basée sur des probabilités fondamentales variables;
c. une distribution de Poisson où la probabilité fondamentale de sinistres n'est pas suffisamment connue;
d. une distribution de Poisson par rapport aux événements, où un seul événement peut comporter plusieurs prétentions de sinistres;
e. une distribution de Poisson basée sur une modification de la répartition des montants de sinistres.

On a, en effet, les relations suivantes:

a. la contagion des probabilités

$$F(x, P, h, p(z)) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{h-1+r}{r} \left(\frac{P}{h+P}\right)^r \left(\frac{h}{h+P}\right)^h \int_0^x p^{(r)}(z)dz =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{P\left(P+\frac{P}{h}\right)\left(P+2\frac{P}{h}\right)\cdots\left(P+(r-1)\frac{P}{h}\right)}{r!\left(1+\frac{P}{h}\right)^{h+r}} \int_0^x p^{(r)}(z)dz \qquad (1)$$

où $F(x, P, h, p(z))$ représente la probabilité que le sinistre est au plus égal à x dans un intervalle de temps où le sinistre probable est

*) Présenté au Colloque de l'ASTIN 1962 à Juan-les-Pins.

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

P. x et P y sont exprimés en le sinistre moyen par événement. $p(z)dz$ est la fonction de fréquence du sinistre par événement.

Nous posons $\int_0^\infty z\, p(z)dz = 1 p^{(r)}(z)$ est la convolution de $p(z)$ avec $p(z)$, faite r fois, tandis que h est la notation du paramètre qui figure dans la distribution binomiale négative. Si h est égal à ∞ nous obtenons comme fonction de répartition pour le nombre d'événements survenus la distribution de Poisson.

Dans la formule d'Eggenberger l'excès de dispersion est désigné par $\frac{P}{h}$

b. et *c*. les probabilités fondamentales variables respectivement les probabilités fondamentales pas suffisamment connues.

$$F(x,\, P,\, h,\, p(z)\,) = \sum_{r=0}^{\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-Pq}\,(Pq)^r}{r\,!}\, \frac{h^h\, e^{-hq}\, q^{h-1}}{\Gamma\,(h)}\, dq \cdot \int_0^x p^{(r)}(z)\, dz \tag{2}$$

La probabilité fondamentale variable P_q et la probabilité fondamentale pas suffisamment connue ont toutes les deux la distribution de fréquence

$$\frac{h^h\, e^{-hq}\, q^{h-1}}{\Gamma\,(h)}\, dq\,.$$

d. et *e*. plusieurs prétentions de sinistres sur un événement respectivement une modification de la répartition des montants de sinistres.

$$F(x,\, P,\, h,\, p(z)\,) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-P^*}\, P^{*r}}{r\,!} \int_0^x p^{*(r)}(z)\, dz \tag{3}$$

où

$$P^* = \frac{\lg\left(1 + \frac{P}{h}\right)}{\frac{P}{h}}\, P$$

$$p^*(z) = \frac{1}{\lg\left(1 + \frac{P}{h}\right)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\frac{P}{h}}{1 + \frac{P}{h}}\right)^r \frac{p^{(r)}(z)}{r}$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

de sorte que la probabilité pour que r prétentions résultent d'un événement est désignée par

$$\frac{1}{\lg\left(1+\frac{P}{h}\right)}\left(\frac{\frac{P}{h}}{1+\frac{P}{h}}\right)^r \frac{1}{r}$$

Posé autrement: la répartition des montants de sinistres dans le cas d'un événement d'où ne resulte qu'une seule prétention est désignée par $p^*(z)$, tandis que le sinistre moyen par événement devient

$$\int_0^\infty z\,p^*(z)dz = \frac{\frac{P}{h}}{\lg\left(1+\frac{P}{h}\right)}$$

de sorte que le sinistre probable devient $\dfrac{P^*\frac{P}{h}}{\lg\left(1+\frac{P}{h}\right)} = P$

Nous nous proposons, dans cet article, d'examiner quelle est la possibilité de construire la distribution binomiale négative généralisée en partant d'une distribution primaire indiquant la probabilité pour que r événements primaires surviennent, chaque événement primaire donnant lieu à une chaîne d'événements. Comme dans notre article "The influence of chain reactions on the loss distrition function" [2], nous entendons par ceci que chaque événement primaire donne lieu à un nombre (≥ 0) d'événements secondaires, chaque événement secondaire à un nombre (≥ 0) d'événements tertiaires etc.

§ 2. LES ÉQUATIONS DE BASE EN CAS D'ÉVÉNEMENTS EN CHAÎNE

Nous supposons qu'après la survenance d'un événement par réaction primaire des nouveaux événements peuvent se produire par une réaction continue. Les probabilités y relatives sont rendues sous la forme génératrice

$P_1(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$ où $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$ et a_i représente la probabilité pour que i événements résultent du premier événement, comme première génération des événements en chaîne.

Chacun de ces derniers événements donne lieu à des événements appartenant à la deuxième génération de la chaîne, de nouveau selon les probabilités $P_1(s)$.

La fonction génératrice de la deuxième génération est alors

$$P_2(s) = P_1[P_1(s)]$$

Et par suite

$$P_i(s) = P_1[P_{i-1}(s)]$$

La distribution du nombre total des éléments présents dans les générations passant de 0 jusqu'à n inclusivement, fut indiquée sous la forme génératrice par $Q_0(s)$, $Q_1(s)$, $Q_2(s)$ . . .

Il s'avère que $Q_0(s)$ est égal à s, c'est-à-dire à l'événement initial qui suscite les événements en chaîne. On a en outre

$$Q_1(s) = s\,P_1[Q_0(s)]$$
$$Q_2(s) = s\,P_1[Q_1(s)] \text{ etc.}$$

La distribution finale, que l'on obtient en élaborant les événements en chaîne, nous désignons sous la forme génératrice par $Q(s)$.

$Q(s)$ satisfait à

$$Q(s) = s\,P_1[Q(s)] \tag{4}$$

Nous posons $Q(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i s^i$, $\alpha_0 = 0$ et $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$

Si la fonction génératrice pour qu'un événement initial ait lieu est

$$P(s) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i s^i \text{ avec } \sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1\,,$$

alors on obtient comme fonction génératrice finale, représentant la distribution du nombre d'événements survenus

$$R(s) = \sum_{i=0}^{\infty} r_i s^i = P\{Q(s)\} \tag{5}$$

D'après (4) il existe entre les probabilités comprises dans $P_1(s) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i s^i$ et $Q(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i s^i$ les relations suivantes

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= a_0 \\
\alpha_2 &= a_1\,\alpha_1 \\
\alpha_3 &= a_1\,\alpha_2 + a_2\,\alpha_2^{(2)} \\
\alpha_4 &= a_1\,\alpha_3 + a_2\,\alpha_3^{(2)} + a_3\,\alpha_3^{(3)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{i+1} &= a_1\,\alpha_i + a_2\,\alpha_i^{(2)} \ldots\ldots + a_i\,\alpha_i^{(i)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{6}
$$

où $\alpha_n^{(m)}$ représente le coefficient de s^n dans $[Q(s)]^m$

De manière identique nous trouvons d'après (5)

$$
\begin{aligned}
r_0 &= p_0 \\
r_1 &= p_1\,\alpha_1 \\
r_2 &= p_1\,\alpha_2 + p_2\,\alpha_2^{(2)} \\
r_3 &= p_1\,\alpha_3 + p_2\,\alpha_3^{(2)} + p_3\,\alpha_3^{(3)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r_i &= p_1\,\alpha_i + p_2\,\alpha_i^{(2)} \ldots\ldots + p_i\,\alpha_i^{(i)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{7}
$$

où en plus

$$
\sum_{i=2}^{\infty} \alpha_i^{(2)} = 1, \quad \sum_{i=3}^{\infty} \alpha_i^{(3)} = 1
$$

$$
\ldots\ldots \sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i^{(n)} = 1
$$

§ 3. LA DISTRIBUTION BINOMIALE NÉGATIVE GÉNÉRALISÉE COMME PRODUIT DE LA DISTRIBUTION BINOMIALE SE RAPPORTANT AUX ÉVÉNEMENTS EN CHAÎNE

La question que nous nous posons maintenant est de savoir si (1) se laisse écrire de telle sorte que nous pouvons figurer qu'elle est engendrée par une distribution primaire indiquant les probabilités pour qu'il y ait des événements primaires, qui, tous, donnent lieu à des événements en chaîne.

Si nous écrivons (1) sous la forme

$$
\sum_{i=0}^{\infty} r_i \int_0^x p^{(i)}(z)dz
$$

il s'ensuit forcément que

$$\sum_{i=0}^{\infty} r_i \int_0^x p^{(i)}(z)dz = \sum_{i=0}^{\infty} p_i \int_0^x p^{*(i)}(z)dz \tag{8}$$

où $p^*(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \, p^{(i)}(z)$, puisque dans ce cas seulement on peut satisfaire à (7).

Une solution de (8) a été indiquée sous (3).

Là, on a

$$\alpha_i = \frac{1}{\lg\left(1 + \frac{P}{h}\right)} \left(\frac{\frac{P}{h}}{1 + \frac{P}{h}}\right)^i \frac{1}{i} \quad \text{avec } \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1 \tag{9}$$

avec $$p_i = \frac{e^{-P^*}(P^*)^i}{i\,!}, \text{ où } P^* = \frac{\lg\left(1 + \frac{P}{h}\right) P}{\frac{P}{h}}$$

ou bien $$p_i = \left(\frac{h}{P+h}\right)^h \left\{\frac{h.\ \lg\left(1 + \frac{P}{h}\right)}{i\,!}\right\}^i$$

Maintenant il faut examiner si les valeurs α_i substituées en (6) suivant (9), donnent des valeurs pour a_i qui constituent une fonction de répartition.

En sommant (6) nous obtenons $\sum_{i=0}^{\infty} a_i = 1$.

Il peut se trouver que pas toutes les valeurs de a_i sont plus grandes que 0. En effet, on a $a_0 = \alpha_1$

$$a_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$a_2 = \left[\alpha_3 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_2\right]\frac{1}{\alpha_1^2}$$

$$a_3 = \left[\alpha_4 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_3 - \left[\alpha_3 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_2\right]\frac{1}{\alpha_1^2} 2\,\alpha_1\,\alpha_2\right] = \frac{1}{\alpha_1^3} = \left[\alpha_3 \left\{\frac{\alpha_4}{\alpha_3} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right\} - \right.$$
$$\left. - \left\{\frac{\alpha_3}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right\}\frac{2\alpha_2^2}{\alpha_1}\right]\frac{1}{\alpha_1^3} = \frac{A}{\alpha_1^3}\left[\alpha_3\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\,2\,\frac{\alpha_2^2}{\alpha_1}\right] = \frac{A\alpha_2}{\alpha_1^3}\left\{\frac{2}{3}\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\frac{1}{2}\right\} = 0$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

Dans cette équation $A = \dfrac{\dfrac{P}{h}}{1+\dfrac{P}{h}} \dfrac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \dfrac{i-1}{i} A$

$$a_4 = \left[\alpha_5 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_4 - \left[\alpha_3 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\alpha_2\right]\frac{1}{\alpha_1^2}(2\,\alpha_1\,\alpha_3 + \alpha_2^2)\right]\frac{1}{\alpha_1^4} =$$

$$= \left[\alpha_4\left(\frac{\alpha_5}{\alpha_4} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) - \left(\frac{\alpha_3}{\alpha_2} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)\frac{\alpha_2}{\alpha_1^2}(2\,\alpha_1\,\alpha_3 + \alpha_2^2)\right]\frac{1}{\alpha_1^4} =$$

$$= \frac{A}{\alpha_1^4}\left[\alpha_4\frac{3}{10} - \frac{1}{6}\alpha_2\left(2\frac{\alpha_3}{\alpha_1} + \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2}\right)\right] = \frac{A}{\alpha_1^4}\left[\alpha_4\frac{3}{10} - \frac{1}{6}\alpha_2 A^2\left(2\frac{2}{3}\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)\right] =$$

$$= \frac{A\alpha_2}{\alpha_1^4}\left[\frac{\alpha_4}{\alpha_2}\frac{3}{10} - \frac{1}{6}A^2\frac{11}{12}\right] = \frac{A^3\alpha_2}{\alpha_1^4}\left[\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{3}{10} - \frac{1}{6}\frac{11}{12}\right] = -\frac{A^3\alpha_2}{\alpha_1^4}\frac{1}{360}$$

c'est-à-dire plus petit que 0.
Il ressort que (9) n'est pas le résultat d'événements en chaîne.

Nous voulons, maintenant, examiner à quel point (9) peut être considérée comme une approximation d'une chaîne continue.

On a $\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{\alpha_i}{\alpha_{i-1}} = \dfrac{\dfrac{P}{h}}{1+\dfrac{P}{h}} = \dfrac{P}{h+P}$

En posant que $P_1(s) = a_0 + a_1 s \quad a_0 + a_1 = 1$

Il suit de (6), si nous posons

$$a_1 = \frac{P}{h+P} \qquad \text{donc } a_0 = \frac{h}{h+P}$$

$$\text{que } \alpha_i^1 = a_1^{i-1}\,a_0 = \left(\frac{P}{h+P}\right)^{i-1}\frac{h}{h+P}$$

Selon (9) on a

$$\alpha_i = \frac{1}{\lg\left(1+\dfrac{P}{h}\right)}\left(\frac{\dfrac{P}{h}}{1+\dfrac{P}{h}}\right)^i\frac{1}{i} = \left(\frac{\dfrac{P}{h}}{1+\dfrac{P}{h}}\right)^i\frac{1}{i}\;\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\dfrac{\dfrac{P}{h}}{1+\dfrac{P}{h}}\right)^i\dfrac{1}{i}}$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

donc

$$\alpha_i \sim \left(\frac{\frac{P}{h}}{1+\frac{P}{h}}\right)^i \frac{1}{i}\,\frac{1}{\left(\frac{\frac{P}{h}}{1+\frac{P}{h}}\right)\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{P}{h}}{1+\frac{P}{h}}\right)} \sim$$

$$\sim \left(\frac{\frac{P}{h}}{1+\frac{P}{h}}\right)^{i-1} \frac{1}{i}\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{P}{h}}{1+\frac{P}{h}}\right)$$

$$\alpha_i \sim \left(\frac{\frac{P}{h}}{1+\frac{P}{h}}\right)^{i-1} \frac{1}{i}\left(\frac{\frac{1}{2}P+h}{P+h}\right)$$

Il suit de là que $\alpha_1^1 < \alpha_1$, sauf pour des valeurs plus élevées de i où $\alpha_i^1 > \alpha_i$.

Ceci implique que les multiples sinistres qui, selon (9), surviennent après un événement (probabilité p_i) sont beaucoup moins fréquents que ceux qui surviennent après des événements en chaîne à base de $P_1(s) = a_0 + a_1 s$

Est-il possible de construire la distribution binomiale négative généralisée comme le résultat d'une distribution primaire indiquant la probabilité pour qu'un événement fondamental ait lieu, où chaque événement primaire compte comme l'événement initial d'une chaîne continue ?

Comme le passage d'une probabilité fondamentale fixe à la probabilité fondamentale variable indiquée par (1), se combine avec l'introduction d'un seul paramètre h, il est raisonnable de construire la distribution $P_1(s)$, par laquelle les événements en chaîne sont engendrés, des deux probabilités fondamentales a_0 et a_1, qui ensemble font 1.

Dans ce cas on a

$$Q(s) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - a_0)^{i-1} a_0\, s^i$$

d'où

$$\alpha_i = (1 - a_0)^{i-1} a_0$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

En raison de (1) et de l'approximation discutée de (9) le choix de

$$a_0 = \frac{h}{h+P} \text{ donc } 1 - a_0 = \frac{P}{h+P} \text{ semble justifié.}$$

Dans la formule (8) les éléments r_i et α_i sont connus:

$$r_i = \binom{h-1+i}{i} \left(\frac{P}{h+P}\right)^i \left(\frac{h}{h+P}\right)^h$$

$$\alpha_i = \left(\frac{P}{h+P}\right)^{i-1} \frac{h}{h+P}$$

à l'aide de ces données nous allons fixer les valeurs de p_i ($i = 0, 1, \ldots$) dans (7) et examiner si ces valeurs constituent une fonction de répartition.

On a $$r_0 = \left(\frac{h}{h+P}\right)^h = p_0$$

$$r_1 = \left(\frac{P}{h+P}\right) \left(\frac{h}{h+P}\right)^h \frac{h}{1} = p_1 \frac{h}{h+P}$$

d'où $$p_1 = \left(\frac{h}{h+P}\right)^{h-1} \left(\frac{P}{h+P}\right) \frac{h}{1}$$

$$r_2 = \left(\frac{P}{h+P}\right)^2 \left(\frac{h}{h+P}\right)^h \frac{h}{1} \frac{h+1}{2} =$$

$$= \left(\frac{h}{h+P}\right)^{h-1} \left(\frac{P}{h+P}\right) \frac{h}{1} \left(\frac{P}{h+P}\right) \left(\frac{h}{h+P}\right) + p_2 \left(\frac{h}{h+P}\right)^2$$

$$p_2 = \left(\frac{h}{h+P}\right)^{h-2} \left(\frac{P}{h+P}\right)^2 \frac{h}{1} \frac{h-1}{2}$$

$$r_3 = \left(\frac{P}{h+P}\right)^3 \left(\frac{h}{h+P}\right)^h \frac{h}{1} \frac{h+1}{2} \frac{h+2}{3} =$$

$$= \left(\frac{h}{h+P}\right)^{h-1} \left(\frac{P}{h+P}\right) \frac{h}{1} \left(\frac{P}{h+P}\right)^2 \left(\frac{h}{h+P}\right) +$$

$$+ \left(\frac{h}{h+P}\right)^{h-2} \left(\frac{P}{h+P}\right)^2 \frac{h}{1} \frac{h-1}{2} 2 \left(\frac{h}{h+P}\right)^2 \frac{P}{h+P} +$$

$$+ p_3 \left(\frac{h}{h+P}\right)^3$$

$$p_3 = \left(\frac{h}{h+P}\right)^{h-3} \left(\frac{P}{h+P}\right)^3 \frac{h}{1} \left[\frac{(h+1)(h+2)}{2.3} - 1 - (h-1)\right] =$$

$$= \left(\frac{h}{h+P}\right)^{h-3} \left(\frac{P}{h+P}\right)^3 \frac{h}{1} \frac{h-1}{2} \frac{h-2}{3}$$

Il appert que $$p_i = \left(\frac{h}{h+P}\right)^h \left(\frac{P}{h}\right)^i \binom{h}{i}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = \left(\frac{h}{h+P}\right)^h \left(1 + \frac{P}{h}\right)^h = 1$$

Ainsi on obtient pour (8)

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{h-1+i}{i} \left(\frac{P}{h+P}\right)^i \left(\frac{h}{h+P}\right)^h \int_0^x p^{(i)}(z)\, dz =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{h}{i} \left(\frac{P}{h}\right)^i \left(\frac{h}{h+P}\right)^h \int_0^x p^{*(i)}(z)\, dz$$

avec $$p^*(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P}{h+P}\right)^{i-1} \left(\frac{h}{h+P}\right) p^{(i)}(z)$$

et $$P_1(s) = \frac{h}{h+P} + \frac{P}{h+P}\, s$$

tandis que $$Q(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P}{h+P}\right)^{i-1} \left(\frac{h}{h+P}\right) s^i$$

satisfait à $$Q(s) = s\, P_1\{Q(s)\}$$

Il s'ensuit que la distribution binomiale négative généralisée est le produit d'une distribution binomiale par rapport aux événements initiaux qui donnent lieu à des événements en chaîne.

§ 4. LE SYSTÈME BASÉ SUR DEUX PARAMÈTRES

Comme évolution de la distribution (1) la distribution suivante a été déduite par L. Yntema, en appliquant la théorie des processus stochastiques. (voir les théorèmes III et IV de la thèse Mathematical Models of Demographic Analysis [3])

$$F(x, P, h, h', p(z)) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{h-1+r}{r} \left(\frac{P}{h'+P}\right)^r \left(\frac{h'}{h'+P}\right)^h \int_0^x p^{(r)}(z)dz \tag{10}$$

$F(x,\ P,\ h,\ h',\ p(z)\ )$ indique la probabilité pour que le sinistre soit égal ou plus petit que x dans l'intervalle où le sinistre probable est $P\frac{h}{h'}$. Pour ceci h doit être plus grand que 1 et h' plus grand que 0.

Dans ce qui suit nous donnerons la déduction et montrerons ensuite que cette distribution se laisse interpréter de manière identique à (1).

La contagion des probabilités de Pólya — Eggenberger est empruntée au problème suivant: Une urne renferme r boules rouges et z boules noires. Aprés en avoir tiré une boule rouge, $1 + e$ boules rouges sont restituées; de même après en avoir tiré une boule noire, $1 + e$ boules noires sont restituées.

Nous posons $$\lim_{n \to \infty} \frac{n\,r}{r+z} = P$$

et $$\lim_{n \to \infty} \frac{n\,e}{r+z} = \frac{P}{h}$$

En développant la formule de Pólya et Eggenberger nous supposons, maintenant, qu'après le tirage d'une boule rouge $1 + e_r$ boules rouges sont restituées, après le tirage d'une boule noire $1 + e_z$ boules noires.

Nous posons alors $$\lim_{n \to \infty} \frac{n\,r}{r+z} = P$$

et $$\lim_{n \to \infty} \frac{n\,e_r}{r+z} = \alpha P$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n\,e_z}{r+z} = \beta P$$

Considérons ensuite le système par rapport au temps, en supposant que dans l'intervalle Δt qu'un seul tirage soit possible et posons $\lim\limits_{n \to \infty} n\Delta t = t$ en choisissant l'unité de temps de manière que $P = t$, c'est-à-dire que, le contenu de l'urne restant inchangé, le

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

nombre probable de boules rouges tiré dans l'intervalle t soit exactement t.

Soit $P_k(t)$ la probabilité pour que l'on tire k boules rouges dans l'intervalle t. La probabilité de passage pour que l'on tire une boule rouge si n tirages ont eu lieu par lesquels on a tiré k boules rouges, est

$$ {}_1p_k\,(n.\Delta t) = \frac{\Delta t\,(1 + k\alpha)}{1 + k\alpha\,\Delta t + (n - k)\,\beta\Delta t} $$

De l'équation différentielle

$$ P_k\ (n\ \Delta t) = \frac{\Delta t\,[1 + (k-1)\alpha]}{1 + (k-1)\alpha\,\Delta t + (n-k)\beta\,\Delta t}\ P_{k-1}\,(\overline{n-1}\,.\,\Delta t) + $$
$$ + \left[1 - \frac{\Delta t\,[1 + k\,\alpha]}{1 + k\alpha\,\Delta t + (n - 1 - k)\beta\,\Delta t}\right] P_k\ (\overline{n-1}\,.\,\Delta t) $$

il résulte en cas de passage de limite $\Delta t \to 0$ $n \to \infty$ $n\,\Delta t \to t$

$$ P_k^1\ (t) = \frac{1 + (k-1)\alpha}{1 + \beta t}\,P_{k-1}\ (t) - \frac{1 + k\alpha}{1 + \beta t}\,P_k\ (t) \tag{11} $$

et pour $k = 0$

$$ P_0^1\,(t) = -\,\frac{1}{1 + \beta t}\,P_0\,(t) \tag{12} $$

avec les conditions-limite $P_0(0) = 1$ $P_k(0) = 0$ $k = 1, 2, \ldots\ldots$

Nous posons

$$ P_k(t) = C_{k,t}\ (1 + \beta t)^{-\frac{1 + k\alpha}{\beta}} \tag{13} $$

d'où il suit que $C_{k,t}$ satisfait à

$$ C^1_{k,t} = (1 + (k-1)\alpha)\,C_{k-1,t}\ (1 + \beta t)^{-1 + \frac{\alpha}{\beta}} $$

avec $C_{0,0} = 1 \qquad C_{k,0} = 0 \qquad k = 1, 2, \ldots$

En outre il résulte de (12) et (13) en rapport avec $C_{0,0} = 1$ que

$$ C_{0,t} = 1 $$

Nous trouvons la solution

$$ P_k(t) = \frac{(1 + \overline{k-1}.\alpha)\,\ldots\ldots\,(1 + \alpha)}{\alpha^k\,k\,!\,(1 + \beta t)^{1/\beta}} \left[1 - (1 + \beta t)^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]^k $$

ou bien, en substituant $t = P \quad k = r$

$$f\,(r, P, \alpha, \beta) = \binom{\frac{1}{\alpha} + r - 1}{r} \left(1 + \beta P\right)^{-\frac{1}{\beta}} \left[1 - (1 + \beta P)^{-\frac{\alpha}{\beta}}\right]^r \quad (14)$$

En posant encore

$$(1 + \beta P)^{-\frac{\alpha}{\beta}} = H \qquad \frac{1}{\alpha} = h$$

alors $$f(r, P, h, \beta) = \binom{H + r - 1}{r} H^h (1 - H)^r$$

avec

$$\sum_{r=0}^{\infty} f\,(r, P, h, \beta) = H^h \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-h}{r} (H - 1)^r = H^h (1 + H - 1)^{-h} = 1$$

où la série $\sum_{r=0}^{\infty} \binom{-h}{r} (H - 1)^r$ est une série de puissance uniformément convergente. $0 < 1 - H < 1$

Ensuite on a

$$\sum_{r=0}^{\infty} r f(r, P, h, \beta) = H^h (H - 1) \frac{d}{dH} \sum_{0}^{\infty} \binom{-h}{r} (H - 1)^r =$$

$$= H^h (H - 1) \frac{d}{dH} H^{-h} = \frac{(H - 1)(-h)}{H}$$

ou $\overline{P} = \frac{1}{\alpha} \left\{ (1 + \beta P)^{\frac{\alpha}{\beta}} - 1 \right\}$ pour $\alpha = \beta \qquad \overline{P} = P$

Nous obtenons de manière analogue

$$\sigma^2 = \overline{P}\,(1 + \beta P)^{\frac{\alpha}{\beta}} = \overline{P}\,(\alpha \overline{P} + 1)$$

En partant de l'hypothèse d'une probabilité fondamentale variable que nous indiquons par Pq, où $h(q)dq$ est la fonction de fréquence de q, alors, au cas où

$$h(q)dq = \frac{h'^h}{\Gamma(h)}\, e^{-h'q}\, q^{h-1}\, dq$$

tandis que la probabilité pour que r événements aient lieu est donnée par la distribution de Poisson,

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

c'est-à-dire
$$\frac{e^{-Pq}\,(Pq)^r}{r\,!}$$

nous obtenons de nouveau (14), pourvu que le choix de β soit approprié.

C'est que

$$\int_0^\infty \frac{h'^h}{\Gamma(h)}\, e^{-h'q}\, q^{h-1}\, dq\, \frac{e^{-Pq}\,(Pq)^r}{r\,!} = \binom{r+h-1}{r} \left(\frac{P}{h'+P}\right)^r \left(\frac{h'}{h'+P}\right)^h \tag{15}$$

A cause de
$$\int_0^\infty q\, h\,(q)\, dq = \frac{h}{h'}$$

on obtient
$$\bar{P} = \frac{h}{h'}\, P$$

$$\text{ou } \frac{1}{\alpha}\left\{(1+\beta P)^{\frac{\alpha}{\beta}} - 1\right\} = \frac{h}{h'}\, P \qquad \text{ou, parce que } h = \frac{1}{\alpha}$$

$$h' = \frac{P}{(1+\beta P)^{\frac{\alpha}{\beta}} - 1}$$

En substituant cette valeur en (15) nous obtenons (14).

$\alpha = \beta$ donne $h' = h$, ce qu'il fallait.

Maintenant, nous voulons démontrer que (10) se laisse également construire en partant de la distribution de Poisson indiquant les probabilités pour que des événements surviennent, chaque événement pouvant donner matière à 1, 2, ... prétentions de sinistres.

$$\text{Soit } \pi\,(t) = \int_0^\infty e^{itz}\, p(z)dz$$

alors la fonction caractéristique de (10) est

$$\varphi\,(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{h-1+r}{r} \left(\frac{P}{h'+P}\right)^r \left(\frac{h'}{h'+P}\right)^h \left[\pi\,(t)\right]^r =$$

$$= \left(\frac{h'}{h'+P}\right)^h \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-h}{r} \left(\frac{-P}{h'+P}\,\pi\,(t)\right)^r =$$

$$= \left(\frac{h'}{h' + P}\right)^h \left(1 - \frac{P}{h' + P}\,\pi(t)\right)^{-h} = \left[1 - \frac{P}{h'}\,(\pi(t) - 1)\right]^{-h} =$$

$$= \left[1 - \frac{\overline{P}}{h}\,(\pi(t) - 1)\right]^{-h}$$

Par conséquent $\varphi'(o) = \overline{P}_i$

Ceci veut dire que le sinistre probable est $\overline{P}$.

Et comme en outre

$$\varphi''(o) = i^2 \overline{P} p_2 + i^2\, \overline{P}^2\, \frac{h + 1}{h}$$

la variance du sinistre est

$$\overline{P} p_2 + \frac{\overline{P}^2}{h}$$

Nous posons

$$\overline{P}\lambda.\ \frac{p_2 + \dfrac{\overline{P}}{h}}{\lambda} = \overline{P}^*.p_2^*$$

pour examiner ensuite la possibilité de considérer (10) comme une distribution primaire, déterminant la probabilité pour qu'un nombre certain d'événements survienne, dont chaque événement peut donner matière à une ou plusieurs prétentions de sinistres.

Dans ce cas, la fonction caractéristique de la distribution de Poisson est $e^{\overline{P}*[\pi*(t)-1]}$

De $$\left[1 - \frac{\overline{P}}{h}\,(\pi(t) - 1)\right]^{-h} = e^{\overline{P}*[\pi*(t)-1]}$$

ou $- h \lg \left[\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)\left(1 - \frac{\overline{P}}{h + \overline{P}}\,\pi(t)\right)\right] = \bar{P}^*\,[\pi^*(t) - 1]$ résulte

$$-h \lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right) + h \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{P}}{h + \overline{P}}\right)^r \frac{[\pi(t)]^r}{r} = -\,\overline{P}^* + \overline{P}^*\,\pi^*(t)$$

Posons maintenant

$$\overline{P}^* = h \lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

alors

$$\pi^*(t) = \frac{1}{\lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{P}}{h + \overline{P}}\right)^r \frac{[\pi(t)]^r}{r}$$

ou

$$p^*(z) = \frac{1}{\lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{P}}{h + \overline{P}}\right)^r \frac{p^{(r)}(z)}{r}$$

Et comme

$$\overline{P}^* = \lambda \overline{P} = h \lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)$$

on obtient

$$\lambda = \frac{h}{\overline{P}} \lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)$$

Il reste à vérifier si

$$p_2^* = \frac{p_2 + \frac{\overline{P}}{h}}{\frac{h}{\overline{P}} \lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)}$$

On a $\int_0^\infty z\, p(z) dz = 1$ et $\int_0^\infty z\, p^{(r)}(z) dz = r$

d'où

$$\int_0^\infty z\, p^*(z) dz = \frac{1}{\lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{P}}{h + \overline{P}}\right)^r = \frac{\frac{\overline{P}}{h}}{\lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)} = \frac{1}{\lambda}$$

On a en outre

$$\int_0^\infty z^2 p(z) dz = p_2 \qquad \int_0^\infty z^2 p^{(r)}(z) dz = r(p_2 + r - 1)$$

donc

$$p_2^* = \int_0^\infty z^2 p^*(z) dz = \frac{1}{\lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{\overline{P}}{h + \overline{P}}\right)^r \left(p_2 + r - 1\right) =$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

$$= \frac{p_2}{\lambda} + \frac{1}{\lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right)} \frac{\left(\frac{\overline{P}}{h + \overline{P}}\right)^2}{\left(1 - \frac{\overline{P}}{h + \overline{P}}\right)^2} = \frac{p_2 + \frac{\overline{P}}{h}}{\lambda}$$

Il suit de là que

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{h - 1 + r}{r} \left(\frac{P}{h' + P}\right)^r \left(\frac{h'}{h' + P}\right)^h \int_0^x p^{(r)}(z)dz =$$

$$= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{e^{-\overline{P}^*} \overline{P}^{*r}}{r!} \int_0^x p^{*(r)}(z)dz$$

où

$$\overline{P}^* = h \lg\left(1 + \frac{\overline{P}}{h}\right) = h \lg\left(1 + \frac{P}{h'}\right)$$

$$p^*(z) = \frac{1}{\lg\left(1 + \frac{P}{h'}\right)} \sum_{r=1}^{\infty} \left(\frac{P}{h' + P}\right)^r \frac{p^{(r)}(z)}{r}$$

le tout par analogie à (3).

Reste la question de savoir si (10) se laisse écrire comme une distribution primaire par rapport aux événements en chaîne.

Dans ce cas on a

$$r_i = \binom{h - 1 + i}{i} \left(\frac{P}{h' + P}\right)^i \left(\frac{h'}{h' + P}\right)^h$$

Nous posons

$$P_1(s) = \frac{h'}{h' + P} + \frac{P}{h' + P}s$$

alors il faut que

$$\alpha_i = \left(\frac{h'}{h' + P}\right) \left(\frac{P}{h' + P}\right)^{i-1}$$

et nous trouvons à l'aide de (7)

$$p_i = \left(\frac{h'}{h' + P}\right)^h \left(\frac{P}{h'}\right)^i \binom{h}{i}$$

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

d'où

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{h-1+i}{i} \left(\frac{P}{h'+P}\right)^i \left(\frac{h'}{h'+P}\right)^h \int_0^x p^{(i)}(z)\, dz =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{h'}{h'+P}\right)^h \left(\frac{P}{h'}\right)^i \binom{h}{i} \int_0^x p^{*(i)}(z) dz \qquad (16)$$

avec $$p^*(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{P}{h'+P}\right)^{i-1} \left(\frac{h'}{h'+P}\right) p^{(i)}(z),$$

confirmant ainsi cette analogie.

§ 5. Application

En ce qui concerne l'application pratique de la théorie des événements en chaîne à l'assurance INCENDIE, nous pouvons faire les observations suivantes.

La théorie des événements en chaîne, donnée dans cet essai, se laisse interpréter comme un modèle descriptif du phénomène d'une conflagration continue.

Il ressort maintenant de la théorie développée que la distribution binomiale négative généralisée se laisse entendre comme le produit de la distribution binomiale, indiquant la fonction de répartition de la survenance d'une incendie primaire, avec les événements en chaîne, indiquant une conflagration continue.

La simplification, présentée par la distribution binomiale comme la distribution de probabilités pour qu'une incendie primaire se déclare, est compensée par l'introduction des événements en chaîne (voir l'équation obtenue pour (8), page 231, ainsi que l'équation (16).

Littérature

[1] Ammeter, H., A Generalization of the Collective theory of risk in regard to fluctuating basic-probabilities. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1948.
Ammeter, H.: Die Elemente der Kollektiven Risikotheorie von festen und zufallsartig schwankenden Grundwahrscheinlichkeiten. *Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker* 49, Band Heft 1, 30 April 1949.
Ammeter, H., Die Ermittlung der Risikogewinne im Versicherungs-

https://doi.org/10.1017/S0515036100009971 Published online by Cambridge University Press

wesen auf risikotheoretischer Grundlage. *Mitteilungen der Ver. Schw. Vers. Math.* Band 57, Heft 2.

[2] CAMPAGNE, C., with the collaboration of C. DRIEBERGEN, The influence of chain reactions on the loss distribution function. *Transactions XVth International Congress of Actuaries*. New York 1957, Volume II, pag. 248.

[3] YNTEMA, L., Mathematical Models of Demographic Analysis. *Ac. Proefschrift* 1952. J. J. Groen en Zoon N.V., Leiden. Stelling III en IV.