BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 47H10, 46B20
VOL. 46 (1992) [287–294]

POINTS FIXES DANS LES ESPACES DES OPERATEURS NUCLEAIRES

MOURAD BESBES

We prove that some metric inequalities imply weak or weak-star normal structure. In particular, we prove that every ω^*-compact convex set in the space $C_1(\ell^p, \ell^q)$ of nuclear operators from ℓ^p into ℓ^q, $(1 < p, q < \infty, 1/p + 1/q = 1)$ has the weak* normal structure. This generalises a recent result of C. Lennard.

0. INTRODUCTION

Soient p et q deux réels dans $(1, +\infty)$ tels que $1/p + 1/q = 1$. On note $C_\infty(\ell^q, \ell^p)$ l'ensemble des opérateurs compacts de ℓ^q dans ℓ^p et $C_1(\ell^p, \ell^q)$ l'ensemble des opérateurs nucléaires de ℓ^p dans ℓ^q. Il est alors classique d'identifier $C_1(\ell^p, \ell^q)$ et $[C_\infty(\ell^q, \ell^p)]^*$ (voir [**13**]). On notera ω^* la topologie associée à cette dualité.

DÉFINITIONS:

Soit X un dual $X = Y^*$. On note ω^* la topologie préfaible $\sigma(X, Y)$. On dit que X possède la propriété du point fixe pour les convexes ω^*-compacts (on notera $\omega^*.p.p.f$ cette propriété) si pour tout convexe ω^*-compact C et toute contraction

$$T : C \to C\,;\, \|T(x) - T(y)\| \leqslant \|x - y\| \ \forall\, x, y \in C,$$

il existe $x_0 \in C$, fixe par T.

Cette propriété est considérée par exemple dans [**8**] ou [**12**]. On sait [**12**] que $\ell^1 = c_0^*$ possède la $\omega^*.p.p.f$.

Soit C un convexe ω^*-compact. On dira que C possède la structure normale pour la topologie ω^* (On notera $\omega^*.S.N.$ cette propriété) si pour tout sous convexe K inclus dans C, ω^*-fermé, non vide et non réduit à un point, il existe $x_0 \in K$ non diametral. (c'est à dire, tel que $\sup\limits_{y \in K} \|x_0 - y\| < \operatorname{diam} K$). On définit de manière analogue la $\omega.S.N$ dans les convexes ω-compacts.

Received 18th September, 1991.
L'auteur remercie G. Godefroy, P. Mazet et G. Pisier pour de fructueuses discussions.

1. Resultats principaux

Notre premier résultat étend un résultat obtenu par Lennard [**10**].

Theoreme 1.1. *Tout convexe ω^*-compact inclus dans $C_1(\ell^p,\ell^q)$ possède la $\omega^*.S.N$. En particulier $C_1(\ell^p,\ell^q)$ possède la $\omega^*.p.p.f$.*

Démonstration: On établira d'abord deux lemmes techniques dont l'idée se trouve dans [**1**]. On désignera par projection naturelle définie sur ℓ^r une projection

$$\text{définie par : } P_n(x) = (x_1,\ldots,x_n,0\ldots)$$

si $x = (x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots) \in \ell^r, n$ étant un entier fixé.

Soient P et $\widetilde{P}$ deux projections naturelles définies respectivement sur ℓ^p et ℓ^q, et soient Q et $\widetilde{Q}$ les projections définies par $P+Q=I$ et $\widetilde{P}+\widetilde{Q}=I$. □

Lemme 1.2. *Pour tout $x \in C_1(\ell^p,\ell^q)$, on a*

$$\|x\|^q_{C_1} \geqslant \left\|\widetilde{P}xP\right\|^q_{C_1} + \left\|\widetilde{Q}xP\right\|^q_{C_1} + \|xQ\|^q_{C_1}.$$

Démonstration: Soit $y \in C_\infty(\ell^q,\ell^p)$

$$\begin{aligned}\|y\|_{C_\infty} &= \sup_{\xi\in\ell^q,\|\xi\|\leqslant 1} \|y\xi\| \\ &= \sup_{\xi\in\ell^q,\|\xi\|\leqslant 1} \left(\|Py\xi\|^p + \|Qy\xi\|^p\right)^{1/p} \\ &\leqslant \left(\|Py\|^p_{C_\infty} + \|Qy\|^p_{C_\infty}\right)^{1/p}\end{aligned}$$

De plus, on a:

$$\|Py\|^p_{C_\infty} \leqslant \left\|Py\widetilde{P}\right\|^p_{C_\infty} + \left\|Py\widetilde{Q}\right\|^p_{C_\infty}$$

en effet, pour $u \in \ell^q$, on a :

$$\begin{aligned}\|Pyu\|^p &= \left\|Py\left(\widetilde{P}u+\widetilde{Q}u\right)\right\|^p \\ &= \left\|\left(Py\widetilde{P}\right)\left(\widetilde{P}u\right) + \left(Py\widetilde{Q}\right)\left(\widetilde{Q}u\right)\right\|^p \\ &\leqslant \left(\left\|Py\widetilde{P}\right\|\left\|\widetilde{P}u\right\| + \left\|Py\widetilde{Q}\right\|\left\|\widetilde{Q}u\right\|\right)^p \\ &\leqslant \left(\left\|Py\widetilde{P}\right\|^p + \left\|Py\widetilde{Q}\right\|^p\right)\left(\left\|\widetilde{P}u\right\|^q + \left\|\widetilde{Q}u\right\|^q\right)^{p/q}.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|y\|^p_{C_\infty} \leqslant \left\|Py\widetilde{P}\right\|^p_{C_\infty} + \left\|Py\widetilde{Q}\right\|^p_{C_\infty} + \|Qy\|^p_{C_\infty}$$

et par dualité :

$$\|x\|^q_{C_1} \geqslant \left\|\widetilde{P}xP\right\|^q_{C^1} + \left\|\widetilde{Q}xP\right\|^q_{C^1} + \|xQ\|^q_{C^1}.$$

https://doi.org/10.1017/S0004972700011904 Published online by Cambridge University Press

Lemme 1.3. *Soient* $(x_n)_{n\geqslant 1}$ *une suite d'éléments de* $C_1(\ell^p,\ell^q)$ *telle que* $x_n \xrightarrow{\omega^*} 0$ *et* $x \in C_1(\ell^p,\ell^q)$ *alors* $\liminf \|x_n + x\|^q \geqslant 1/2^{q/p} \liminf \|x_n\|^q + \|x\|^q$.

Démonstration: Comme $x_n \xrightarrow{\omega^*} 0$ $\exists P_n \uparrow I$ et $\widetilde{P}_n \uparrow I$ deux suites de projections naturelles définies respectivement sur ℓ^p et ℓ^q telles que :

$$\left\|\widetilde{P}_n x_n P_n\right\|_{n\to\infty} \to 0 \text{ et } \left\|\widetilde{P}_n x P_n - x\right\|_{n\to\infty} \to 0.$$

En utilisant le lemme précédent, on obtient :

$$\|x_n + x\|^q \geqslant \left\|\widetilde{P}_n x P_n\right\|^q + \left\|\widetilde{Q}_n x_n P_n\right\|^q + \|x_n Q_n\|^q + \varepsilon_n$$

avec $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ d'où

$$\liminf \|x_n + x\|^q \geqslant \|x\|^q + \liminf \left(\left\|\widetilde{Q}_n x_n P_n\right\|^q + \|x_n Q_n\|^q\right).$$

Or
$$2^{1/p}\left(\left\|\widetilde{Q}_n x_n P_n\right\|^q + \|x_n Q_n\|^q\right)^{1/q} \geqslant \left\|\widetilde{Q}_n x_n P_n\right\| + \|x_n Q_n\| \geqslant \|x_n\| - \left\|\widetilde{P}_n x_n P_n\right\|$$

Donc:
$$\liminf \|x_n + x\|^q \geqslant \|x\|^q + \frac{1}{2^{q/p}} \liminf \|x_n\|^q.$$

$\square$

Remarques 1.4. Le coefficient $1/2^{q/p}$ dans le lemme 1.3 est nécessaire comme le montre l'exemple suivant. D'ailleurs dans le cas où $p = q = 2$ le coefficient $1/2$ est le meilleur possible.

Exemple. Dans le cas où $p = q = 2$ considérons les éléments x_n et x de $C_1 = C_1(\ell^2,\ell^2)$ définis par :

$$x = \frac{1}{\alpha} e_1 \otimes e_1 \text{ et } x_n = e_1 \otimes e_n + e_n \otimes e_1 + \alpha e_n \otimes e_n$$

où $\alpha > 0$ et $(e_1,\ldots,e_n,\ldots)$ est la base canonique de ℓ^2. Il est alors facile de voir que $x_n \xrightarrow{\omega^*} 0, \|x_n\|_{C_1} = \sqrt{\alpha^2+4}, \forall\, n \geqslant 1; \|x\|_{C_1} = 1/\alpha$ et $\|x_n + x\|_{C_1} = (\alpha^2+1)/\alpha$.

Ainsi si C est un réel positif vérifiant l'inégalité

$$\liminf \|x_n + x\|^2 \geqslant C \liminf \|x_n\|^2 + \|x\|^2,$$

alors
$$\left[\frac{\alpha^2+1}{\alpha}\right]^2 \geqslant C(\alpha^2+4) + \frac{1}{\alpha^2}, \ \forall\, \alpha > 0$$

et donc $C \leqslant (\alpha^2+2)/(\alpha^2+4)$, pour tout $\alpha > 0$, ce qui entraine que $C \leqslant 1/2$.

En prenant $\alpha = 1$, on a : $\liminf \|x_n\| > \liminf \|x_n + x\|$.

Cet exemple montre donc aussi que l'espace $C_1(\ell^2)$ ne vérifie pas la condition d'Opial dont il sera question à la fin de l'article.

Remarquons que le lemme 1.3 permet de montrer aussi que l'espace $C_1(\ell^p, \ell^q)$ vérifie la propriété UKK^* [6] définie par : $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tel que

$$\left.\begin{array}{l} \|x_n\| \leqslant 1 \\ x_n \xrightarrow{\omega^*} x \\ \inf\{\|x_n - x_m\|, n \neq m\} \geqslant \varepsilon \end{array}\right\} \Rightarrow \|x\| \leqslant 1 - \delta.$$

En effet, considérons une suite (x_n) telle que :

$$\|x_n\| \leqslant 1, x_n \xrightarrow{\omega^*} x \text{ et } \inf\{\|x_n - x_m\|, n \neq m\} \geqslant \varepsilon$$

alors $\liminf \|x_n - x\| \geqslant \varepsilon/2$.

D'après le lemme 1.2, on obtient,

$$\|x\|^q + \frac{1}{2^q . 2^{q/p}} \varepsilon^q \leqslant 1$$

et donc
$$\|x\| \leqslant \left(1 - \frac{\varepsilon^q}{2^{(q/p+q)}}\right)^{1/q}$$

La fin de la démonstration du théorème 1.1 est maintenant classique [**12**, par exemple].

Soit C un convexe ω^*-compact, non vide et non réduit à un point où tout point est diamétral. Il existe alors une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans C telle que :

$$(*) \qquad \forall\, n \neq m, \|x_n - x_m\| \geqslant \frac{\delta}{2}$$

où $\delta = \operatorname{diam} K$.

Quitte à en extraire une sous-suite et à faire une translation, on peut supposer que $x_n \xrightarrow{\omega^*} 0$. D'après (*), on a $\liminf \|x_n\| > 0$.

D'autre part, d'après le lemme 1.3 on a :

$$\forall\, x \in K \quad \liminf \|x_n - x\|^q \geqslant \frac{1}{2^{q/p}} \liminf \|x_n\|^q + \|x\|^q$$

et donc $\sup\limits_{x \in K} \|x\| < \operatorname{diam} K$, ce qui contredit l'hypothèse. ∎

2. Generalisation des resultats

On se propose maintenant de généraliser les résultats précédents.

Proposition 2.1. *Soit X un Banach. Supposons qu'il existe $p > 0, \alpha_p$ et $\beta_p \in [0,1]$ tels que*

(i) $\alpha_p + \beta_p > 1$,
(ii) $\sup_n \|x_n - x\|^p \geqslant \alpha_p \|x\|^p + \beta_p \liminf \|x_n\|^p$

pour toute suite (x_n) telle que $x_n \xrightarrow{\omega} 0$ et tout $x \in X$. Alors tout convexe ω-compact de X possède la $\omega.S.N$.

Démonstration: Supposons qu'il existe un convexe K ω-compact dans X, non vide et non réduit à un point où tout point est diamétral. D'après [4], il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ dans K telle que : $\lim_{n\to\infty} d(x_{n+1},\ \mathrm{conv}\,(x_1,\dots,x_n)) = \delta$ (*) (δ étant le diamètre de K).

Quitte à en entraire une sous-suite et à faire une translation on peut supposer que $x_n \xrightarrow{\omega} 0 \in K$.

D'après (*) on a $\liminf_{n\to\infty} \|x_n\| = \delta$ car $0 \in \overline{\mathrm{conv}\ (x_1,\dots,x_n,\dots)}$. En appliquant l'hypothèse de la proposition à la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$, on obtient $\delta^p \geqslant \alpha_p \|x\|^p + \beta_p \delta^p \ \forall\, x \in K$ ce qui montre que 0 est non diamétral dans K. Il en résulte que tout convexe ω-compact de X possède la $\omega.S.N$. ∎

Dans l'argument ci-dessus, on utilise le théorème de Mazur sur la compatibilité des topologies faibles et fortes pour démontrer que $0 \in \overline{\mathrm{conv}}\ (x_1,\dots,x_n,\dots)$. Dans le cas où X est un dual séparable, on peut modifier cet argument grâce à une construction dûe à Lennard [11] ce qui permet d'obtenir la Proposition 2.2:

Proposition 2.2. *Soit X un dual séparable. Supposons qu'il existe $p > 0, \alpha_p$ et $\beta_p \in [0,1]$ tels que :*

(i) $\alpha_p + \beta_p > 1$,
(ii) $\sup_n \|x_n - x\|^p \geqslant \alpha_p \|x\|^p + \beta_p \liminf \|x_n\|^p$

pour toute suite (x_n) telle que $x_n \xrightarrow{\omega^*} 0$ et tout $x \in X$. Alors tout convexe ω^*-compact de X possède la $\omega^*.S.N$.

Démonstration: Supposons qu'il existe un convexe K ω^*-compact, inclus dans X, non vide et non réduit à un point où tout point est diamétral. Soit (u_n) une suite dense dans K pour la topologie forte. En suivant [11], on construit une suite (x_n) d'éléments de K telle que:

$$\forall\, n \geqslant 1,\ d(x_{n+1},\ \mathrm{conv}\ (x_1,\dots,x_n,u_1,\dots,u_n)) \geqslant \delta\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

(où δ est le diamètre de K). Comme K est ω^*-compact et X est séparable, il existe une sous suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow{\omega^*} x \in K$. De plus, comme la suite (u_n) est dense dans K, il existe une sous suite $(x_{\varphi o \psi(n)})$ telle que $\lim_{n\to\infty} \|x_{\varphi o\psi(n)} - x\| = \delta$. (On peut construire cette sous suite par récurrence en choisissant pour chaque n un élément $u_{\delta(n)}$ tel que $\|u_{\delta(n)} - x\| < 1/n$ et $\psi(n)$ tel que $\psi(n) > \psi(n-1)$ et $\varphi o \psi(n) > \delta(n)$).

En appliquant l'hypothèse de la proposition à la suite $(x_{\varphi o\psi(n)} - x)$, on montre comme ci-dessus que x est non diamétral dans K. Il en résulte que tout convexe ω^*-compact de X possède la $\omega^*.S.N$. $\square$

Les propositions ci-dessus permettent de montrer des résultats d'existence de points fixes dans les espaces isomorphes à $C_1(\ell^p, \ell^q)$. Nous avons en effet le:

COROLLAIRE 2.3. *Soit X un Banach K-isomorphe à $C_1(\ell^p,\ell^q)$; supposons que $K < \left(1 + 1/(2^{q/p})\right)^{1/q}$; alors tout convexe ω-compact de X possède la $\omega.S.N$.*

REMARQUES 2.4. La proposition 2.1 permet en particulier de retrouver les résultats suivants (voir [9]):

(a) Soit X un Banach K-isomorphe à ℓ^p avec $1 \leqslant p < \infty$ et $K < 2^{1/p}$. Alors tout convexe ω-compact de X possède la $\omega.S.N$.

(b) Cas des espaces de James: Soit

$$J_p = \{(x_n) \in c_0;\ \sup \sum_{k=1}^{K} \left|x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}\right|^p < \infty,\ n_1 < n_2 < \cdots < n_{2K},\ K > 0\}.$$

On munit l'espace J_p de la norme :

$$\|x\| = \sup \left(\sum_{k=1}^{K} \left|x_{n_{2k}} - x_{n_{2k-1}}\right|^p \right)^{1/p}$$

J_p est alors un espace de Banach pour tout $p \in [1, +\infty[$. Si X est K-isomorphe à J_p avec $K < 2^{1/p}$, alors tout convexe ω-compact de X a la $\omega.S.N$.

REMARQUE 2.5. Examinons les deux cas particuliers suivants de la proposition 2.2:

(a) $\alpha_p = 1$ et $\beta_p > 0$

(b) $\beta_p = 1$ et $\alpha_p > 0$

Dans le premier cas, on peut montrer comme ci-dessus pour $C_1(\ell^p,\ell^q)$ que X vérifie la propriété $U.K.K.^*$ Dans le deuxième cas, l'espace X vérifie la propriété d'Opial pour la topologie ω^* définie par:

On dit que X vérifie la condition d'Opial [16], pour la topologie ω^* si pour toute suite (x_n) dans X telle que $x_n \xrightarrow{\omega^*} x_0$ et tout $x \neq x_0$ on a:

$$\liminf \|x_n - x\| > \liminf \|x_n - x_0\|.$$

REMARQUE 2.6.

* Tout dual vérifiant la condition d'Opial pour la topologie ω^* possède la $\omega^*.p.p.f$ (voir [5] ou [16]).

* L'espace $\ell^1 = c_0^*$ vérifie la condition d'Opial pour $\sigma(\ell^1, c_0)$. Il en est de même des espaces ℓ^p, $1 < p < \infty$ pour $\sigma(\ell^p, \ell^q)$ où $1/p + 1/q = 1$.

* L'exemple donné dans la remarque 1.4 montre que C_1 ne vérifie pas la condition d'Opial.

* L'exemple suivant montre que l'espace de Hardy H^1, ne vérifie pas la condition d'Opial pour la topologie préfaible naturelle. Néanmoins, on montre ([2] ou [3]) que H^1 a la $\omega^*.p.p.f.$

Posons $f_n(z) = 1/2z^{2n} + z^n$ et $f(z) = 1/2$

alors
$$f_n \xrightarrow{\omega^*} 0, \|f_n\|_{H^1} = \int_0^{2\pi} |1 + \frac{1}{2}e^{in\theta}| \frac{d\theta}{2\pi} > 1$$

et
$$\|f_n + f\|_{H^1} = \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{2} + e^{in\theta} + \frac{1}{2}e^{2in\theta} \right| \frac{d\theta}{2\pi}$$
$$= \int_0^{2\pi} (1 + \cos n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 1$$

* D. Van Dulst a démontré dans [5] que pour tout dual séparable X on peut trouver une norme duale $|\ |$, équivalente à sa norme initiale, telle que $(X, |\ |)$ vérifie la condition d'Opial.

Notre dernier résultat fournit une réponse positive à une question de Sims [14] (voir aussi [7] et [15]) dans le cas où X est séparable.

THEOREME 2.7. *Soit X un dual séparable vérifiant la condition d'Opial pour la topologie ω^*. Alors tout convexe ω^*-compact de X possède la $\omega^*.S.N$.*

REFERENCES

[1] A. Arazy, 'More on convergence in unitary matrix spaces', *Proc. Amer. Math. Soc.* . **83** (1981), 44–48.

[2] M. Besbes, 'Points fixes des contractions définies sur un convexe L^o-fermé de L^1', *C.R.A. Sciences de Paris, t. 311* (1990), 243–246.

[3] M. Besbes, S. Dilworth, P. Dowling and C. Lennard, 'New convexity and fixed point properties in Hardy and Lebesgue-Bochner spaces', *J. Funct. Anal.* (to appear).

[4] M.S. Brodski and D.P. Milman, 'On the center of a convex set', *Dokl. Acad. Nauk. USSR* **59** (1948)), 837–840.

[5] D. Van Dulst, 'Equivalent norms and the fixed point property for non-expansive mappings', *J. London Math. Soc.* **25** (1982), 139–144.

[6] D. Van Dulst and B. Sims, 'Fixed points of non-expansive mappings and Chebyshev centers in Banach spaces with norms of type (KK)', in *Lecture notes in Math.* **991**, pp. 34–43 (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1983).

[7] J.P. Gossez and E. Lami Dozo, 'Normal structure and Schauder bases', *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.* **55** (1969), 673–681.

[8] A. Khamsi, *Thèse de doctorat* (Université Paris VI, 1987).

[9] A. Khamsi, 'Normal structure for Banach spaces with Schauder decomposition', *Canad. Math. Bull.* **32** (1989), 344–351.

[10] C. Lennard, 'C_1 is uniformly Kadec Klee*', *Proc. Amer. Math. Soc.* **109** (1990), 71–77.

[11] C. Lennard, 'A new convexity property that implies a fixed point property for L^1', (préprint).

[12] T.C. Lim, 'Asymptotic centers and non-expansive mappings in conjugate Banach spaces', *Pacific J. Math.* **90** (1980), 135–143.

[13] B. Simon, 'Convergence in trace ideals', *Proc. Amer. Math. Soc.* **83** (1981), 39–43.

[14] B. Sims, 'Fixed points of non-expansive maps on weak and weak*-compact sets', in *Queen's University of Kingston. Lecture Notes*, 1982.

[15] S. Swaminathan, 'Normal structure in Banach spaces and its generalisations', *Contemp. Math. A.M.S. Providence* **18**, 201–215.

[16] Z. Opial, 'Weak convergence of the sequence of successive approximations for non-expansive mappings', *Bull. Amer. Math. Soc.* **73** (1967), 591–597.

Equipe d'analyse, Boîte 186
Université Paris VI
4, Place Jussieu
75252 - Paris Cedex 05
France