Canad. J. Math. Vol. **52** (4), 2000 pp. 757–788

Le problème de Neumann pour certaines équations du type de Monge-Ampère sur une variété riemannienne

Abdellah Hanani

Abstract. Let (M_n, g) be a strictly convex riemannian manifold with C^∞ boundary. We prove the existence of classical solution for the nonlinear elliptic partial differential equation of Monge-Ampère: $\det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u) = F(x, \nabla u; u)$ in M with a Neumann condition on the boundary of the form $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x, u)$, where $F \in C^\infty(TM \times \mathbb{R})$ is an everywhere strictly positive function satisfying some assumptions, ν stands for the unit normal vector field and $\varphi \in C^\infty(\partial M \times \mathbb{R})$ is a non-decreasing function in u.

0 Introduction

On s'intéresse ici à l'existence et à l'unicité des solutions classiques du problème de Neumann nonlinéaire pour les équations du type de Monge-Ampère modifiées suivantes:

$$\det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u) = F(x, \nabla u; u) \tag{1}$$

sur une variété riemannienne (M, g) compacte à bord C^∞ non vide; $F \in C^\infty(TM \times \mathbb{R})$ est une fonction partout strictement positive. On impose, à la frontière, une condition de Neumann de la forme:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x, u), \tag{2}$$

où ν est le champ de vecteurs unitaires normal à ∂M dirigé vers l'intérieur, $\frac{\partial}{\partial \nu}$ est la dérivation correspondante, et $\varphi \in C^\infty(\partial M \times \mathbb{R})$ est la restriction à $\partial M \times \mathbb{R}$ d'une fonction C^∞ sur $M \times \mathbb{R}$ notée encore φ.

Ce type d'équation a été introduit pour étudier certaines variantes du problème de Minkowski telles que la recherche de graphes radiaux à courbure de Gauss prescrite, construits à partir de la sphère unité de l'espace euclidien.

On suppose que M est strictement convexe c'est-à-dire qu'il existe une fonction $r \in C^\infty(M)$ strictement convexe et nulle sur le bord. Il résulte du principe du maximum que $r < 0$ à l'intérieur de M. On cherche alors une solution de (1)–(2) telle que le 2-tenseur covariant g' représenté localement par la matrice $(-ug_{ij} + \nabla_{ij} u)$ soit partout défini positif; on dira alors que u est admissible. En conséquence, l'équation envisagée est elliptique, et les théorèmes de régularité usuels de la théorie des équations elliptiques permettant de conclure en ce qui concerne la régularité C^∞ des solutions $C^{2,\alpha}$.

Reçu par les éditeurs le 12 mars 1999; revisée le 6 janvier 2000.
Classification (AMS) par sujet: 35J60, 53C55, 58G30.
Mots clés: connexion de Levi-Civita, équations de Monge-Ampère, problème de Neumann, estimées a priori, méthode de continuité.
©Société Mathématique du Canada 2000.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Pour résoudre, on utilise la méthode de continuité dont la mise en oeuvre repose sur des estimations a priori dans $C^{2,\alpha}$. Les estimées des dérivées secondes font usage d'une décomposition du tenseur $\nabla^2 u$ sur le bord, analogue à celle que préconisent Lions-Trudinger-Urbas [4], qui ont étudié le problème dans le cas d'un premier membre classique sur un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, strictement convexe, muni de la métrique euclidienne. Toutefois la méthode de ces auteurs ne s'étend pas directement. La décomposition à considérer, donnée au section 1, et son utilisation dans le cadre riemannien sont différentes.

Sous des hypothèses naturelles sur les données du problème, précisées au troisième chapitre, on obtient d'abord une estimation a priori C^0 de la solution. Les estimées du gradient et des dérivées secondes normales et mixtes sur le bord s'en déduisent. Ensuite, on combine le principe du maximum et la décomposition précitée de $\nabla^2 u$ pour compléter l'estimée C^2. On donne, en appendice, l'estimée $C^{2,\alpha}$ à l'intérieur. Grâce à la théorie des estimées L^p [1] et à une application du principe du maximum, l'estimée $C^{2,\alpha}(M)$ se réduit à une estimée au bord. Celle-ci est obtenue par l'usage d'une version faible de l'inégalité de Harnack [6] appliquée à une fonction des dérivées secondes tangentielles sur une portion du bord et étendue aux autres dérivées secondes en utilisant l'estimée de la norme hölderienne du gradient due à Krylov [3].

1 Notations et préliminaires

1.1

Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$, connexe, compacte, orientable à bord ∂M non vide; la métrique g est représentée localement par la matrice $(g_{ij})_{i,j}$. On désigne par ∇ la connexion de Levi-Civita de la variété (M, g), c'est l'unique connexion métrique à torsion nulle. Dans un système de coordonnées locales $(x^i)_{1\leq i\leq n}$, elle est donnée par

$$\nabla_{e_i} e_j = \Gamma^k_{ij} e_k,$$

où $e_i = \partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ et Γ^k_{ij} sont les symboles de Christoffel de la métrique g. Si $u \in C^\infty(M)$, on a

$$\nabla_i u = \partial_i u \quad \text{et} \quad \nabla_{ij} u = \partial_{ij} u - \Gamma^k_{ij} \partial_k u.$$

Le laplacien et le carré de la norme du gradient de u en métrique g sont donnés par

$$\triangle u = \nabla^i_i \varphi = g^{ij} \nabla_{ij} u \quad \text{et} \quad |\nabla u|^2 = \nabla^i u \nabla_i u = g^{ij} \nabla_i u \nabla_j u.$$

On note $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita du bord associée à la métrique induite et on désigne par W et B l'opérateur de Weingarten et la seconde forme fondamentale de ∂M relatifs au champ normal unitaire ν. On prolonge ν, W et B en des champs de tenseurs sur un voisinage tubulaire Ω de ∂M par transport parallèle le long des géodésiques de M issues du bord dans la direction normale. De la même façon, tout repère orthonormé local $\{(e_i)_{1\leq i\leq n-1}, e_n = \nu\}$ défini sur un voisinage de $x \in \partial M$ dans ∂M se prolonge en un repère mobile orthonormé sur un voisinage de x dans M.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

1.2

Les calculs de ce paragraphe se font sur le bord ∂M. Pour tous champs de vecteurs X et Y sur M dont les restrictions au bord sont tangentes à ∂M, on a

$$W(X) = -\nabla_\nu X, \quad B(X,Y) = g(WX,Y) = g(\nu, \nabla_X Y)$$

ainsi que la décomposition canonique suivante:

$$\nabla_X Y = \overline{\nabla}_X Y + B(X,Y)\nu.$$

En particulier, si $u \in C^\infty(M)$ est une fonction dont la dérivée normale est égale à φ partout sur le bord pour une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, quelles que soient les directions tangentielles $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$, on obtient,

$$\nabla_{ij} u = \overline{\nabla}_{ij} u - B_{ij}\varphi \tag{1}$$

et

$$\nabla_{in} u = \nabla_i \varphi + W_i^k \nabla_k u, \tag{2}$$

où $B_{ij} = B(e_i, e_j)$ et W_i^k, $k = 1, \dots, n-1$, désignent les composantes de $W(e_i)$.

1.3

Soit $u \in C^\infty(M)$ vérifiant la condition au bord ci-dessus. À cette fonction on associe une fonction $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_u \in C^\infty(TM)$ de la façon suivante. Si $x \in \partial M$, la restriction de $\mathcal{Q}$ à $T_x M$ est la forme définie, pour tout $Z \in T_x M$, par

$$\mathcal{Q}(Z) = -ug(Z,Z) + \nabla^2 u(Z^\top, Z^\top) + \nabla^2 u(Z^\perp, Z^\perp),$$

où $Z^\top$ et $Z^\perp$ sont les composantes tangentielles et normales de Z. Une forme qu'on peut encore écrire comme suit:

$$\mathcal{Q}(Z) = -ug(Z,Z) + \nabla^2 u(Z,Z) - 2\nabla^2 u(Z^\top, Z^\perp).$$

Ensuite, et puisque $\nabla^2 u(Z^\top, Z^\perp) = Z^i Z^n \nabla_{in} u$, il vient, d'après (2),

$$\mathcal{Q}(Z) = -ug(Z,Z) + \nabla_{ZZ} u - 2Z^i Z^n (\nabla_i \varphi + W_i^j \nabla_j u).$$

On prolonge la définition de $\mathcal{Q}(Z)$ si Z est un vecteur tangent en un point arbitraire de M en posant

$$\mathcal{Q}(Z) = -ug(Z,Z) + \nabla_{ZZ} u + \sigma Z^i Z^n (\nabla_i \varphi + W_i^j \nabla_j u),$$

où $\sigma \in C^\infty(M)$ est une fonction à support compact contenu dans le voisinage tubulaire Ω et égale à -2 au voisinage de ∂M. Enfin pour tout champ de vecteurs X sur un O ouvert de M, on note $E = E_u = \mathcal{Q} \circ X \in C^\infty(O)$. Ainsi, $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$ et $E = E_1 + E_2$ avec

(3)
$$E_1 = \mathcal{Q}_1 \circ X = -ug(X,X) + \nabla_{XX} u \quad \text{et} \quad E_2 = \mathcal{Q}_2 \circ X = \sigma g(X,\nu)[\nabla_{X'}\varphi + B(X, \nabla u)],$$

où $X' = X - g(X,\nu)\nu$. La définition de $\mathcal{Q}_1$ et $\mathcal{Q}_2$ est claire.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

2 Estimation a priori

Proposition 1 *Soient $u \in C^\infty(M)$ une fonction admissible et C_0 une constante positive telle que*

$$\|u\|_\infty \leq C_0. \tag{1}$$

Sous l'une des deux conditions suivantes:

1- Il existe $\varphi \in C^\infty(\partial M)$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi$ au bord.
2- Il existe $\varphi \in C^\infty(\partial M \times \mathbb{R})$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi\big(x, u(x)\big)$ au bord.

Il existe une constante positive C_1, ne dépendant que de (M, g), C_0 et d'un majorant de la norme $C^1(K)$ de φ, où K désigne le compact ∂M dans le premier cas et $K = \partial M \times [-C_0, C_0]$ dans le second, telle que

$$\|\nabla u\|_\infty \leq C_1.$$

Démonstration La fonction définissante r de M étant strictement convexe et est nulle au bord, il existe un réel a strictement positif tel que

$$\frac{\partial r}{\partial \nu} \leq -a \quad \text{sur} \quad \partial M. \tag{2}$$

Posons $v = u - kr$, d'après (2) et la continuité de φ sur ∂M, il est possible de fixer le réel k de sorte que $\frac{\partial v}{\partial \nu} \geq 1$ au bord.

1- Considérons la fonctionnelle

$$\Gamma = |\nabla v|^2 + 2lv. \tag{3}$$

Notons $x_0 \in M$ un point où Γ atteint son maximum. Si $x_0 \in M \setminus \partial M$. Au voisinage de x_0, on se place dans un repère orthonormé diagonalisant le tenseur $\nabla^2 u(x_0)$, pour toute direction $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\nabla_i \Gamma = 0$. On obtient

$$0 = (\nabla_{ii} v + l)\nabla_i v = (\nabla_{ii} u - k\nabla_{ii} r + l)\nabla_i v.$$

Une égalité qu'on peut encore écrire sous la forme

$$0 = [(-u + \nabla_{ii} u) + (u - k\nabla_{ii} r + l)]\nabla_i v. \tag{4}$$

Or u est admissible, donc $-u + \nabla_{ii} u \geq 0$. Ensuite, tenons compte de (1), pour toute valeur du réel $l \geq l_1 = C_0 + k \max_\Sigma \nabla_{XX} r$, où Σ est le fibré unitaire tangent de M, on voit que

$$0 < (u - k\nabla_{ii} r + l).$$

L'égalité (4) implique que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $\nabla_i v(x_0) = 0$. Ainsi, la définition (3) de Γ montre que pour tout $x \in M$, et puisqu'alors $\Gamma(x) \leq \Gamma(x_0)$,

$$|\nabla v|^2(x) \leq 2l[v(x_0) - v(x)] \leq 2lD\|\nabla v\|_\infty.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

L'estimée désirée s'en déduit, D désigne le diamètre de M.

À présent, on suppose que $x_0 \in \partial M$. On désigne par $\{(e_i)_{1\le i\le n-1}, e_n\}$ un repère orthonormé au voisinage de x_0 tel que la restriction de e_n à ∂M soit égale à ν. En x_0, on aura

$$\frac{1}{2}\nabla_n\Gamma = \nabla_{nn}v\nabla_n v + l\nabla_n v + \sum_{1\le i\le n-1} \nabla_{ni}v\nabla_i v \le 0. \tag{5}$$

Or, $v = u$ au bord, donc $\overline{\nabla}u = \overline{\nabla}v$. Tenons compte de 1-(2) et la définition de v, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\nabla_n\Gamma = (-u + \nabla_{nn}u)\nabla_n v + (u - k\nabla_{nn}r + l)\nabla_n v\\ + \sum_{1\le i,j\le n-1} B_{ij}\overline{\nabla}_j u\overline{\nabla}_i u + \sum_{1\le i\le n-1} \overline{\nabla}_i\psi\overline{\nabla}_i u,\end{aligned}$$

où $\psi = \varphi - k\frac{\partial r}{\partial\nu}$. Choisissons $l \ge \sup(l_1, C_0 + k\max_{\partial M}\nabla_{nn}r)$. Comme $\nabla_n v \ge 1$ et u est admissible, il vient

$$\sum_{1\le i,j\le n-1} B_{ij}\overline{\nabla}_j u\overline{\nabla}_i u + \sum_{1\le i\le n-1} \overline{\nabla}_i\psi\overline{\nabla}_i u \le \frac{1}{2}\nabla_n\Gamma. \tag{6}$$

On désigne par μ un minorant, strictement positif, de la plus petite courbure principale du bord, on écrit que, pourtout $\varepsilon > 0$

$$\sum_{1\le i\le n-1} \overline{\nabla}_i\psi\overline{\nabla}_i u \ge -\varepsilon|\overline{\nabla}u|^2 - \varepsilon^{-1}|\overline{\nabla}\psi|^2$$

et on reporte dans (6). L'inégalité qui en résulte donne, compte tenu de (5),

$$(\mu - \varepsilon)|\overline{\nabla}u|^2 - \varepsilon^{-1}|\overline{\nabla}\psi|^2 \le 0.$$

Prenons $\varepsilon = 2^{-1}\mu$, on obtient, $|\overline{\nabla}u|^2(x_0) \le 4(\mu)^{-2}|\overline{\nabla}\psi|^2$ et l'estimée a priori de $|\nabla u|$ se déduit de la définition de Γ et l'équation au bord.

2- La fonctionnelle précédente ne permet pas de traiter convenablement ce cas, des modifications s'imposent. Notons $\varphi^x(t) = \varphi(., t)$ et considérons la fonctionnelle

$$\tilde{\Gamma} = (|\nabla v|^2 + 1)\exp(2lv)$$

en un point $x_0 \in M$ où elle atteint son maximum. Si $x_0 \in M \setminus \partial M$, on peut écrire pour toute direction $1 \le i \le n$, $\nabla_i\tilde{\Gamma}(x_0) = 0$. Soit

$$[(-u + \nabla_{ii}u) + (u - k\nabla_{ii}r + l + l|\nabla v|^2)]\nabla_i v = 0$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

et ensuite $\nabla_i v(x_0) = 0$ si $l \geq l_1 = C_0 + k \max_\Sigma \nabla_{XX} r$. On conclut comme précédemment. Supposons donc que $x_0 \in \partial M$ et remarquons qu'avec les notations du premier paragraphe,

$$\frac{1}{2}\exp(-2lv)\nabla_n\tilde{\Gamma} = [\nabla_{nn}u - k\nabla_{nn}r + l(1+|\nabla v|^2)]\nabla_n v$$
$$+ \sum_{1\leq i,j\leq n-1} B_{ij}\overline{\nabla}_j u\overline{\nabla}_i u + \sum_{1\leq i\leq n-1}\overline{\nabla}_i\left(\varphi^x - k\frac{\partial r}{\partial \nu}\right)\overline{\nabla}_i u + \varphi_t'|\nabla v|^2.$$

Désignons par C_1 un majorant de $|\varphi_t'| + |\overline{\nabla}(\varphi^x - k\frac{\partial r}{\partial \nu})|$ sur K, des faits que $\nabla_{nn}u \geq u$, $\nabla_n v \geq 1$ et puisque $\nabla_n\tilde{\Gamma}(x_0) \leq 0$, il vient

$$0 \geq -C_1|\overline{\nabla}v| + (\mu - C_1 + l)|\overline{\nabla}v|^2 + (u - k\nabla_{nn}r + l)\nabla_n v.$$

Ainsi, pour $l = l_1 + C_1 + 1$, on obtient

$$(1+\mu)|\overline{\nabla}v|^2 - C_1|\overline{\nabla}v| \leq 0.$$

D'où $|\overline{\nabla}v|(x_0) \leq C_1$. L'usage des définitions de v et $\tilde{\Gamma}$ permet de conclure.

Proposition 2 *Soient $F \in C^\infty(TM \times \mathbb{R})$, $\varphi \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$, C_0 une constante positive et $\mathbb{B} \subset C^\infty(M)$ un ensemble de solutions admissibles du problème*

$$(1) \qquad \begin{cases} \operatorname{Log}[\det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u)] = F\big(x, \nabla u(x); u(x)\big) & \textit{dans } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi\big(x, u(x)\big) & \textit{sur } \partial M \end{cases}$$

telles que

$$(2) \qquad \sup_{u\in\mathbb{B}}[\|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty] \leq C_0.$$

Il existe une constante positive C_1 telle que, si $u \in \mathbb{B}$, on ait, pour tout $X \in \Sigma \cap T\partial M$ et partout au bord,

$$|\nabla^2 u(X,\nu)| + |\nabla^2 u(\nu,\nu)| \leq C_1,$$

où Σ est le fibré unitaire tangent de M. Notons $K_1 = M \times [-C_0, C_0]$ et $K_2 = \{(x,p;t) \in TM \times \mathbb{R}; |t| + |p| \leq C_0\}$. La constante C_1 n'est fonction que des donnés du problème; la géométrie de (M,g), C_0, $\max_{K_2} F$, un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de φ sur K_1 ainsi que d'un majorant des dérivées partielles d'ordre 1 de F sur K_2.

Démonstration Soit $u \in \mathbb{B}$. On désigne par ν un champ de vecteurs sur M dont la restriction au bord est le champ normal unitaire dirigé vers l'intérieur et tel que $\nabla_\nu \nu = 0$ sur ∂M. Pour tout $x \in M$, on note φ^x et $\varphi_t'^x$ les fonctions $\varphi\big(., u(x)\big)$ et $\varphi_t'\big(., u(x)\big)$.

1- Soit $x \in \partial M$ et $\{(e_i)_{1\leq i\leq n-1}, e_n = \nu(x)\}$ un repère orthonormé en x. Compte tenu de l'équation (1) au bord et la relation (2) de la section 1.2, on a, pour toute direction $i = 1, \ldots, n-1$,

$$\nabla_{in}u = \overline{\nabla}_i\big[\varphi\big(x, u(x)\big)\big] + B_{ij}\overline{\nabla}_j u = \overline{\nabla}_i\varphi^x + \varphi_t'\overline{\nabla}_i u + B_{ij}\overline{\nabla}_j u$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

et par suite

$$|\nabla_{in}u| \leq C_2,$$

où la constante C_2 ne dépend que de C_0, un majorant de la norme C^1 de φ sur le compact $K = \partial M \times [-C_0, C_0]$ ainsi que du maximum sur ∂M de la plus grande courbure principale du bord. Ainsi $|\nabla^2 u(X,\nu)|$ est majoré *a priori* sur le bord de M indépendamment de $X \in \Sigma \cap T\partial M$.

2- À présent, on donne une estimation de $\nabla_{\nu\nu}u$ sur le bord. Pour cela, on considère la fonctionnelle $\Gamma = \nabla_\nu u - \varphi(x,u) + lr$. Montrons que, pour l suffisamment grand, le maximum de Γ est atteint au bord. Notons $\triangle'$ le laplacien dans la métrique représenté par $(g'_{ij} = -ug_{ij} + \nabla_{ij}u)$ et évaluons, en $x \in M$, $\triangle'\Gamma$, il vient

$$\triangle'\Gamma = \nu^m g'^{ij}\nabla_{ijm}u + 2g'^{ij}\nabla_i\nu^m\nabla_{jm}u + \triangle'\nu^m\nabla_m u + \triangle'(lr - \varphi).$$

Or, par dérivation de l'équation satisfaite par u et permutation de l'ordre des dérivées covariantes, on déduit, que

$$g'^{ij}\nabla_{ijm}u = \nabla_m F + g'^{ij}g_{ij}\nabla_m u - g'^{ij}R^h_{jim}\nabla_h u.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\triangle'\Gamma = \nu^m\nabla_m F + g'^{ij}(g_{ij}\nu^m\nabla_m u - \nu^m R^h_{jim}\nabla_h u)\\ + 2g'^{ij}\nabla_i\nu^m\nabla_{jm}u + \triangle'\nu^m\nabla_m u + \triangle'(lr - \varphi).\end{aligned}$$

On note par $(x^i, p^j)_{1\leq i,j\leq n}$ les coordonnées locales de TM induites des coordonnées locales (x^i) sur M. On développe $\nabla_m F$ et $\triangle'\varphi$, puisque $g'^{ij}g'_{mj} = \delta^i_m$, on obtient

$$\begin{aligned}\triangle'\Gamma = \triangle'(lr - \varphi^x) + \frac{\partial F}{\partial p^i}\nabla_{\nu i}u + \triangle'\nu^m\nabla_m u + 2ug'^{ij}\nabla_i\nu_j\\ - g'^{ij}[\nu^m R^h_{jim}\nabla_h u - g_{ij}(\nabla_\nu u + u\varphi'_t) + 2\nabla_i\varphi'^x_t\nabla_j u]\\ - \varphi''_{t^2}|\nabla' u|^2 + \nu^m\nabla^x_m F + F'_t\nabla_\nu u + 2n\nabla_i\nu^i - n\varphi'_t,\end{aligned}$$

où $|\nabla' u|$ désigne la norme du gradient de u dans la métrique déformée g'_u. On peut donc minorer $\triangle'\Gamma$ de la façon suivante

$$\triangle'\Gamma \geq l\,\triangle'\,r + \frac{\partial F}{\partial p^i}\nabla_{\nu i}u - C_2 g'^{ij}g_{ij} - C_3, \tag{3}$$

où C_2 dépend de C_0, $\|\nu\|_{C^2(M)}$, $\|\varphi\|_{C^2(K_1)}$ ainsi que du maximum sur M de la norme du tenseur de courbure $\mathcal{R}$; la constante C_3 dépend de C_0, $\|\nu\|_{C^1(M)}$, $\|\varphi\|_{C^1(K_1)}$ ainsi que d'un majorant des dérivées partielles premières de F sur le compact K_2. Supposons que Γ atteint son maximum en $x \in M \setminus \partial M$, on a $\nabla\Gamma = 0$, d'où

$$\nabla_{\nu i}u = -\nabla_i\nu^m\nabla_m u + \nabla_i\varphi - l\nabla_i r.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

On reporte dans (3), il vient

$$l \triangle' r - C_2 g'^{ij} g_{ij} - C_3 - C_4 \leq \triangle' \Gamma,$$

où C_4 est fonction de $\|u\|_\infty$, $\|\nu\|_{C^1(M)}$, $\|\varphi\|_{C^1(K_1)}$, $\|r\|_{C^1(M)}$ ainsi que d'un majorant des dérivées partielles premières de F sur le compact K_2. Désignons par a un réel strictement positif déterminé par la stricte convexité de r tel que $(\nabla_{ij} r) \geq (a g_{ij})$. L'inégalité précédente donne

$$(la - C_2) g'^{ij} g_{ij} - C_3 - C_4 \leq \triangle' \Gamma. \tag{4}$$

De l'égalité $[\det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u)]^{-1} = e^{-F}$ et de l'inégalité arithmétique géométrique, on voit que

$$g'^{ij} g_{ij} \geq n e^{-\frac{F}{n}} \geq n \exp\left(-\frac{1}{n} \max_{K_1} F\right) \equiv C_5 > 0$$

ceci permet d'écrire (4) sous la forme

$$[la - C_2 - (C_5)^{-1}(C_3 + C_4)] g'^{ij} g_{ij} \leq \triangle' \Gamma. \tag{5}$$

Choisissons $l = a^{-1}[C_2 + (C_5)^{-1}(C_3 + C_4) + 1]$. Or, $\triangle' \Gamma(x) \leq 0$, (5) donne

$$g'^{ij} g_{ij} \leq 0$$

ce qui contredit l'admissibilité de u et Γ ne peut atteindre son maximum à l'intérieur. Comme $\Gamma \equiv 0$ sur ∂M, le maximum de Γ est atteint en tout point du bord, où on peut écrire $\nabla_\nu \Gamma \leq 0$. On obtient, compte tenu de l'admissibilité de u, la majoration *a priori*, de $\nabla_{\nu\nu} u$, suivante

$$-C_0 \leq u g(\nu, \nu) \leq \nabla_{\nu\nu} u \leq \nabla_\nu \varphi - l \nabla_\nu r \leq C_6;$$

la constante C_6 est fonction de (M, g), $\|u\|_\infty$, $\|\nabla u\|_\infty$, $\max_{K_2} F$, un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de φ sur K_1 ainsi que d'un majorant des dérivées partielles d'ordre 1 de F sur K_2.

Lemme 1 *Conservons les notations de la proposition 2. Soient $\mathbb{B} \subset C^\infty(M)$ un ensemble de solutions admissibles du problème (1) vérifiant (2) et X un champ de vecteurs local. Notons par (p^a, $1 \leq a \leq n$) les coordonnées naturelles sur les fibres de TM et $\triangle'$ le laplacien en métrique g' représentée localement par la matrice $(-ug_{ij} + \nabla_{ij} u)$. Pour tout $u \in \mathbb{B}$.*

1- Si $E_1 = -ug(X, X) + \nabla_{XX} u$, alors il existe des constantes positives C_1 et C_2 telles que si on note $P_{kl} = 2\nabla_k X^i g'_{il}$, on ait:

$$\begin{aligned} \triangle' E_1 \geq{} & \nabla_{XX} F - C_1(-nu + \triangle u) g'^{ij} g_{ij} - C_2 g'^{ij} g_{ij} \\ & + g'^{ik} g'^{jl} (-\nabla_X u g_{ij} + \nabla_{Xij} u + P_{ij})(-\nabla_X u g_{kl} + \nabla_{Xkl} u + P_{kl}), \end{aligned} \tag{3}$$

où la constante C_1 ne dépend que de $\|\mathcal{R}\|_\infty$ et $\|X\|_{C^2(M)}$; la constante C_2 est fonction de $\|\mathcal{R}\|_\infty$, $\|\nabla \mathcal{R}\|_\infty$, $\|X\|_{C^1(M)}$, $\|u\|_\infty$ et $\|\nabla u\|_\infty$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

2- *Si $E_2 = \sigma g(X,\nu)[\nabla_{X'}\varphi + B(X,\nabla u)]$ désigne la fonctionnelle définie en 1.3-(3). Il existe des constantes positives C_3 et C_4, telles que*

$$\triangle' E_2 \geq \frac{\partial F}{\partial p^a}\nabla_a E_2 - C_3 g'^{kl} g_{kl} - C_4, \tag{4}$$

où C_3 et C_4 sont fonction de (M,g), $\|\nabla u\|_\infty$ et d'un majorant des dérivées partielles d'ordre $\leq$ 3 de φ sur K_1. La constante C_3 dépend en plus de $\|u\|_\infty$ et $\|X\|_{C^2(M)}$ tandis que C_4; elle dépend de $\|X\|_{C^1(M)}$ et d'un majorant des dérivées partielles d'ordre 1 de F sur K_2.

3- *Si on note $E = E_1 + E_2$, il existe une constante positive D (resp. D') ne dépendant que des constantes C_i, $1 \leq i \leq 5$, des alinéas i- et ii- et d'un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de F sur K_2 (resp. $\|\frac{\partial^2 F}{\partial p^a \partial p^b}\|_{C^0(K_2)}$ et $\|X\|_\infty$), telles que*

$$\begin{aligned}\triangle' E \geq{}& \frac{\partial F}{\partial p^a}\nabla_a E - D(-nu + \triangle u)g'^{ij}g_{ij} - D' g^{ij}g^{kl}\nabla_{ik}u\nabla_{jl}u \\ &+ g'^{ik}g'^{jl}(-\nabla_X u g_{ij} + \nabla_{Xij}u + P_{ij})(-\nabla_X u g_{kl} + \nabla_{Xkl}u + P_{kl}).\end{aligned} \tag{5}$$

Démonstration 1- Soient $u \in \mathbb{B}$ et X un champ de vecteurs local. Le développement de $\triangle' E_1$ donne

$$\begin{aligned}\triangle' E_1 = g'^{kl}&[-\nabla_{kl}u g(X,X) - 4\nabla_k u g(\nabla_l X, X)] \\ &+ 2g'^{kl}[-ug(\nabla_{kl}X,X) - ug(\nabla_k X, \nabla_l X) + \nabla_{kl}X^i X^j \nabla_{ij}u] \\ &+ g'^{kl}[2\nabla_k X^i \nabla_l X^j \nabla_{ij}u + 4\nabla_k X^i X^j \nabla_{lij}u + X^i X^j \nabla_{klij}u].\end{aligned}$$

Par permutations successives des dérivées covariantes, compte tenu des relations

$$\nabla_{lij}u = \nabla_{ijl}u - R^a_{jli}\nabla_a u$$

et

$$\nabla_{kijl}u = \nabla_{ikjl}u - R^a_{jki}\nabla_{al}u - R^a_{lki}\nabla_{ja}u,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\nabla_{klij}u = \nabla_{ijkl}u &- R^a_{lkj}\nabla_{ia}u - R^a_{jki}\nabla_{la}u - R^a_{lki}\nabla_{ja}u \\ &- R^a_{jli}\nabla_{ka}u - (\nabla_i R^a_{lkj} + \nabla_k R^a_{jli})\nabla_a u.\end{aligned} \tag{6}$$

Or $X^i X^j \nabla_{klij}u = \nabla_{klXX}u$, il vient

$$\begin{aligned}\nabla_{klXX}u = \nabla_{XXkl}u &- 2R^a_{lkX}\nabla_{Xa}u - R^a_{XkX}\nabla_{la}u - R^a_{XlX}\nabla_{ka}u \\ &- X^i X^j(\nabla_i R^a_{lkj} + \nabla_k R^a_{jli})\nabla_a u.\end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Saturons cette égalité tensorielle par g'^{kl} et reportons dans l'expression ci-dessus de $\triangle' E_1$, on obtient

$$\begin{aligned}\triangle' E_1 = {}& g'^{kl}\nabla_{XXkl}u + 2g'^{kl}[2\nabla_k X^i \nabla_{Xil}u - R^a_{lkX}\nabla_{Xa}u - R^a_{XkX}\nabla_{la}u] \\ & + g'^{kl}[-4\nabla_k u g(\nabla_l X, X) - 2ug(\nabla_{kl}X, X) - 2ug(\nabla_k X, \nabla_l X)] \\ & + 2(\nabla_{kl}X^i X^j + \nabla_k X^i \nabla_l X^j) g'^{kl}\nabla_{ij}u - g(X,X)g'^{kl}\nabla_{kl}u \\ & + [4\nabla_k X^i R^a_{iXl} - X^i X^j(\nabla_i R^a_{lkj} + \nabla_k R^a_{jli})]g'^{kl}\nabla_a u.\end{aligned} \tag{7}$$

D'autre part, par dérivation covariante de l'équation satisfaite par u, on obtient:

$$\begin{aligned}\nabla_{ij}F = {}& g'^{kl}(-g_{kl}\nabla_{ij}u + \nabla_{ijkl}u) \\ & - g'^{kp}g'^{lq}(-g_{kl}\nabla_i u + \nabla_{ikl}u)(-g_{pq}\nabla_j u + \nabla_{jpq}u).\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}g'^{kl}\nabla_{XXkl}u = {}& \nabla_{XX}F + g'^{kl}g_{kl}\nabla_{XX}u \\ & + g'^{kp}g'^{lq}(-g_{kl}\nabla_X u + \nabla_{Xkl}u)(-g_{pq}\nabla_X u + \nabla_{Xpq}u)\end{aligned}$$

et par suite, tenons compte de la définition de g' et de la relation $g'^{kl}g'_{la} = \delta^k_a$, l'expression (7) de $\triangle' E_1$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}\triangle' E_1 = {}& \nabla_{XX}F + g'^{kp}g'^{lq}(-g_{kl}\nabla_X u + \nabla_{Xkl}u)(-g_{pq}\nabla_X u + \nabla_{Xpq}u) \\ & + 4g'^{kl}\nabla_k X^i(-X^j g_{ij}\nabla_l u + \nabla_{Xil}u) + E_1 g'^{kl}g_{kl} - 2Ric(X,X) \\ & - ng(X,X) + 2(\nabla_{kl}X^i X^j + \nabla_k X^i \nabla_l X^j - X^i R^j_{lkX})g'^{kl}g'_{ij} \\ & + [4\nabla_k X^i R^a_{iXl} - X^i X^j(\nabla_i R^a_{lkj} + \nabla_k R^a_{jli})]g'^{kl}\nabla_a u.\end{aligned}$$

Développons le carré

$$K = g'^{ik}g'^{jl}(-\nabla_X u g_{ij} + \nabla_{Xij}u + P_{ij})(-\nabla_X u g_{kl} + \nabla_{Xkl}u + P_{kl}).$$

On déduit que

$$\begin{aligned}\triangle' E_1 = {}& K + \nabla_{XX}F + E_1 g'^{kl}g_{kl} - 2Ric(X,X) - ng(X,X) \\ & + [4\nabla_k X^i R^a_{iXl} - X^i X^j(\nabla_i R^a_{lkj} + \nabla_k R^a_{jli})]g'^{kl}\nabla_a u \\ & + 2(\nabla_{kl}X^i X^j - \nabla_k X^i \nabla_l X^j - X^i R^j_{lkX})g'^{kl}g'_{ij} \\ & + 4g'^{kl}\nabla_k X^i(-X^j g_{ij}\nabla_l u + g_{il}\nabla_X u).\end{aligned}$$

La minoration (3) du lemme en découle.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

2- Poursuivons par l'étude de $\triangle' E_2$. D'après sa définition le terme E_2 s'écrit sous la forme

$$E_2 = s^i \nabla_i \varphi + t^i \nabla_i u,$$

où les tenseurs s et t, définis respectivement par les composantes contravariantes s^i et t^i, ne dépendent que de X, σ et ν; quant au tenseur t, il dépend, en outre, de B. Donc

$$\nabla_l E_2 = \nabla_l s^i \nabla_i \varphi + s^i \nabla_{li} \varphi + \nabla_l t^i \nabla_i u + t^i \nabla_{li} u.$$

Remarquons qu'il existe un tenseur H de composantes H_l ne dépendant que de celles de s, t, ∇s,∇t, ∇u et des dérivées partielles d'ordre 1 de φ tel que

$$\nabla_l E_2 = H_l + (s^i \varphi'_t + t^i) \nabla_{li} u. \tag{8}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \triangle' E_2 = {} & g'^{kl} \nabla_{kl} s^i \nabla_i \varphi + 2 g'^{kl} \nabla_k s^i \nabla_{li} \varphi + s^i g'^{kl} \nabla_{kli} \varphi \\ & + g'^{kl} \nabla_{kl} t^i \nabla_i u + 2 g'^{kl} \nabla_k t^i \nabla_{li} u + t^i g'^{kl} \nabla_{kli} u. \end{aligned}$$

Tenons compte de la définition de g' et après développement des termes en φ, on en déduit que

$$\triangle' E_2 \geq (s^i \varphi'_t + t^i) g'^{kl} \nabla_{kli} u - C_6 g'^{kl} g_{kl} - C_7, \tag{9}$$

où la constante C_6 dépend de $\|u\|_\infty$, $\|\nabla u\|_\infty$, $\|s\|_{C^2}$, $\|t\|_{C^2}$ ainsi que d'un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 3 de φ sur K_1; la constante C_7 est fonction de $\|\nabla u\|_\infty$, $\|s\|_{C^1}$, $\|t\|_{C^1}$ ainsi que d'un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 3 de φ sur K_1.

Dérivons une fois l'équation satisfaite par u, tenons compte de (6), on peut écrire

$$g'^{kl} \nabla_{kli} u = \nabla_i^x F + F'_t \nabla_i u + \frac{\partial F}{\partial p^a} \nabla_{ai} u + g'^{kl} (\nabla_i u g_{kl} - R^a_{lki} \nabla_a u).$$

Et, d'après (8),

$$(s^i \varphi'_t + t^i) g'^{kl} \nabla_{kli} u \geq \frac{\partial F}{\partial p^a} \nabla_a E_2 - C_8 g'^{kl} g_{kl} - C_9,$$

où les constantes C_8 et C_9 sont fonction de $\|s\|_\infty$, $\|t\|_\infty$, $\|\varphi'_t\|_{C^0(K_1)}$; en outre C_8 dépend de $\|\nabla u\|_\infty$ et $\|\mathcal{R}\|_\infty$ et C_9 d'un majorant des dérivées partielles d'ordre 1 de F sur K_2 et $\|H\|_\infty$, où H est le tenseur introduit dans (8), et donc la constante C_9 dépend en outre de $\|\nabla s\|_\infty$, $\|\nabla t\|_\infty$, $\|\nabla u\|_\infty$ et d'un majorant sur K_1 des dérivées partielles d'ordre 1 de φ. La minoration (4) de $\triangle' E_2$ du lemme découle de (9) ou l'on reporte la dernière inégalité.

3- À présent, remarquons que de l'équation satisfaite par la fonction u et de l'inégalité arithmétique géométrique, il vient:

$$\begin{cases} -nu + \triangle u \geq n \exp\left(\frac{1}{n} \max_{K_2} F\right) \equiv C_{11} > 0 \\ (\text{resp. } g'^{ij} g_{ij} \geq n \exp\left(-\frac{1}{n} \max_{K_2} F\right) \equiv C'_{11} > 0.) \end{cases} \tag{10}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Développons $\nabla_{XX}F$. Tenons compte de (10), on vérifie que

$$\nabla_{XX}F \geq -C_{12}(-nu + \triangle u)g'^{ij}g_{ij} + \frac{\partial F}{\partial p^a}\nabla_a E_1 + \frac{\partial^2 F}{\partial p^k \partial p^l}\nabla_{Xk}u\nabla_{Xl}u, \tag{11}$$

où C_{12} est fonction des constantes dans (9), $\|\mathcal{R}\|_\infty$, $\|u\|_\infty$, $\|\nabla u\|_\infty$, $\|X\|_{C^2(M)}$ ainsi que d'un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de F sur K_2. Il est clair que le dernier terme de cette inégalité peut être minorer comme suit:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial p^k \partial p^l}\nabla_{Xk}u\nabla_{Xl}u \geq -C_{13}g^{ij}g^{kl}\nabla_{ik}u\nabla_{jl}u,$$

où la constante C_{13} n'est fonction que d'un majorant de la norme du tenseur $\frac{\partial^2 F}{\partial p^k \partial p^l}$ sur K_2 et $\|X\|_\infty$. Reportons cette minoration dans (11). On utilise à nouveau la remarque (10) pour minorer convenablement la somme des quatres derniers termes dans (3) et les deux derniers du membre de droite de (4). Les inégalités qui en résultent donnent la minoration (5), de $\triangle' E$, du lemme.

Lemme 2 *Conservons les notations de la proposition 2 et du lemme 1.*

1- Notons par P et Q les tenseurs définis respectivement par

$$P_k = 2\nabla_k X^i X^j g'_{ij}$$

et

$$Q_k = -\nabla_k u g(X,X) + \nabla_{XXk}u + P_k.$$

Il existe alors un tenseur covariant U et un tenseur contravariant V tels que

$$|\nabla' E|^2 \leq \frac{E}{E_1}g'^{kl}Q_kQ_l + \frac{\|E_2\|_\infty}{E_1}|\nabla' E|^2 + \frac{E}{E_1}(g'^{kl}U_k\nabla_l E + V^k\nabla_k E). \tag{3}$$

2- Notons $\tilde{U}_k = -U_k - 2\big(X^i g_{ik}\nabla_X u + \nabla_k u g(X,X)\big)$, il existe une constante positive D'_1 telles que

$$\begin{aligned}\triangle' E - E^{-1}|\nabla' E|^2 \geq{}& \frac{\partial F}{\partial p^i}\nabla_i E + (E_1)^{-1}[g'^{ij}\tilde{U}_i\nabla_j E - V^i\nabla_i E]\\ &- \frac{\|E_2\|_\infty}{E.E_1}|\nabla' E|^2 - D'_1(-nu+\triangle u)g'^{ij}g_{ij} - D_2 g^{ij}g^{kl}\nabla_{ik}u\nabla_{jl}u.\end{aligned} \tag{4}$$

La constante D_2 est la même que celle du lemme 1. D'_1 est fonction de la constante D_1 du lemme 1; elle dépend aussi de $\|U\|_\infty$, $\|V\|_\infty$, $\|u\|_\infty$, $\|\nabla u\|_\infty$, $\|X\|_{C^1(M)}$ ainsi que de $\max_{K_2} F$.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Démonstration 1- Avec les notations du lemme 1, on a

$$\nabla_k E = \nabla_k(E_1 + s^i \nabla_i \varphi + t^i \nabla_i u)$$

et donc, d'après la définition du tenseur Q, il vient

$$\nabla_k E = Q_k - R^i_{XkX} \nabla_i u + T^i g'_{ki} + S_k, \tag{5}$$

où les composantes T^i du tenseur T ne dépendent que des composantes s^i et t^i des tenseurs s et t ainsi que de φ'_t; les composantes S_k sont fonctions de celles des tenseurs s, t, ∇s, ∇t ainsi que de u, ∇u et des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de φ. Il en découle que $\|T\|_\infty$ et $\|S\|_\infty$ peuvent être majorer uniformément en termes de quantités déjà estimées.

Posons

$$H_1 = g'^{kl}(-R^i_{XkX} \nabla_i u + T^i g'_{ki} + S_k)(-R^i_{XlX} \nabla_i u + T^i g'_{li} + S_l),$$

on obtient

$$|\nabla' E|^2 = g'^{kl} Q_k Q_l + H_1 + 2g'^{kl} Q_k(-R^i_{XlX} \nabla_i u + T^i g'_{li} + S_l).$$

Or, $1 = \frac{E}{E_1} - \frac{E_2}{E_1}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} |\nabla' E|^2 = {} & \frac{E}{E_1}(g'^{kl} Q_k Q_l + H_1) - \frac{E_2}{E_1} |\nabla' E|^2 \\ & + 2\frac{E}{E_1} g'^{kl} Q_k(-R^i_{XlX} \nabla_i u + T^i g'_{li} + S_l). \end{aligned} \tag{6}$$

D'après (5), on a

$$Q_k = \nabla_k E + R^i_{XkX} \nabla_i u - T^i g'_{ki} - S_k. \tag{7}$$

L'égalité (6) se réécrit donc sous la forme

$$\begin{aligned} |\nabla' E|^2 = {} & \frac{E}{E_1} g'^{kl} Q_k Q_l - \frac{E_2}{E_1} |\nabla' E|^2 - \frac{E}{E_1} H_1 \\ & + 2\frac{E}{E_1} g'^{kl} \nabla_k E(-R^i_{XlX} \nabla_i u + T^i g'_{li} + S_l). \end{aligned}$$

Remarquons que $g'^{kl} \nabla_k E T^i g'_{li} = \delta^k_i \nabla_k E T^i = \nabla_k E T^k$, la majoration voulue en découle.

2- Rappellons qu'on avait noté $P_{ij} = 2\nabla_i X^a g'_{aj}$, de sorte que $P_i = X^j P_{ij}$. Posons

$$K_1 = g'^{ik} g'^{jl}(-\nabla_X u g_{ij} + \nabla_{Xij} u + P_{ij})(-\nabla_X u g_{kl} + \nabla_{Xkl} u + P_{kl}).$$

Tenons compte de la relation $g'^{ik} g'_{kh} = \delta^i_h$, le développement du carré suivant

$$\begin{aligned} K = g'^{ik} g'^{jl} & [-\nabla_X u g_{ij} + \nabla_{Xij} u + P_{ij} + J_i Q_j] \\ & \times [-\nabla_X u g_{kl} + \nabla_{Xkl} u + P_{kl} + J_k Q_l], \end{aligned}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

où $J_i = -(E_1)^{-1}(-X^h u g_{ih} + \nabla_{Xi} u)$, donne

$$K = K_1 - (E_1)^{-1} g'^{kl} Q_k Q_l + 2(E_1)^{-1} g'^{kl} Q_k \big(\nabla_X u X^i g_{il} + \nabla_l u g(X,X)\big).$$

On utilise (7) pour écrire cette égalité comme suit:

$$\begin{aligned} E_1 K = E_1 K_1 - g'^{kl} Q_k Q_l + 2 g'^{kl} \nabla_k E [\nabla_X u X^i g_{il} + \nabla_l u g(X,X)] \\ + 2[-T^l + g'^{kl}(R^i_{XkX} \nabla_i u - S_k)][\nabla_X u X^i g_{il} + \nabla_l u g(X,X)]. \end{aligned} \tag{8}$$

À présent des inégalités (5) du lemme 1 et (3) du lemme 2, on peut écrire

$$\begin{aligned} \triangle' E - E^{-1} |\nabla' E|^2 \geq K_1 - (E_1)^{-1} g'^{kl} Q_k Q_l + \frac{\partial F}{\partial p^i} \nabla_i E \\ - (E_1)^{-1} (g'^{ij} U_i \nabla_j E + V^i \nabla_i E) - \frac{\|E_2\|_\infty}{E.E_1} |\nabla' E|^2 \\ - D_3(-nu + \triangle u) g'^{ij} g_{ij} - D_4 g^{ij} g^{kl} \nabla_{ik} u \nabla_{jl} u. \end{aligned}$$

Dans cette relation, on remplace $K_1 - (E_1)^{-1} g'^{kl} Q_k Q_l$ par sa valeur déterminée à partir de (8). La relation qui en résulte est

$$\begin{aligned} \triangle' E - E^{-1} |\nabla' E|^2 \geq K + \frac{\partial F}{\partial p^i} \nabla_i E + (E_1)^{-1} (g'^{ij} \tilde{U}_i \nabla_j E - V^i \nabla_i E) \\ - \frac{\|E_2\|_\infty}{E.E_1} |\nabla' E|^2 - D_3(-nu + \triangle u) g'^{ij} g_{ij} - D_4 g^{ij} g^{kl} \nabla_{ik} u \nabla_{jl} u \\ - \frac{2}{E_1} \big(-T^l + g'^{kl}(R^i_{XkX} \nabla_i u - S_k)\big) \big(\nabla_X u X^i g_{il} + \nabla_l u g(X,X)\big), \end{aligned}$$

où l'on a posé $\tilde{U}_k = -U_k - 2\big(X^i g_{ik} \nabla_X u + \nabla_k u g(X,X)\big)$. Tenons compte de la positivité de K, la minoration du lemme s'en déduit en utilisant les inégalités (10) de la preuve du lemme 1 pour minorer convenablement le dernier terme de cette dernière.

Proposition 3 *Conservons les notations de la proposition 2 et des lemmes 1 et 2. Soit $\mathbb{B} \subset C^\infty(M)$ un ensemble de solutions admissibles du problème (1) vérifiant (2). On suppose qu'il existe une fonction $v \in C^\infty(M)$ admissible telle que pour tout $u \in \mathbb{B}$, on ait:*

$$\begin{cases} v \geq u & \text{dans } M \\ \frac{\partial(v-u)}{\partial \nu} \geq a > 0 & \text{sur } \partial M, \end{cases} \tag{3}$$

où a est une constante. Il existe alors des constantes positives C_1 et b telles que, si $u \in \mathbb{B}$, on ait:

(i) $0 < -nu + \triangle u \leq C_1$
(ii) $b^{-1} g \leq g'_u \leq bg$,

où g'_u désigne la métrique déformée $-ug + \nabla^2 u$; les constantes C_1 et b sont fonction de (M, g), $\|u\|_\infty$, $\|\nabla u\|_\infty$, un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 3 de φ sur K_1 ainsi que d'un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de F sur K_2.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Démonstration Désignons par Σ le fibré unitaire de M et notons, pour tout $x \in M$, $\Sigma_x = T_xM \cap \Sigma$. Notons aussi $\tilde{\Sigma} = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ où

$$\Sigma_1 = \bigcup_{x \in M \setminus \partial M} \Sigma_x \quad \text{et} \quad \Sigma_2 = \Big(\bigcup_{x \in \partial M} T_x \partial M \Big) \bigcap \Sigma.$$

Introduisons la famille $\mathcal{G} = \{X_A\}_{A \in \tilde{\Sigma}}$ de champs de vecteurs locaux sur M construite de la façon suivante.

À tout $x \in M$, on associe deux ouverts O_x et O'_x tels que

$$x \in O_x \subset \overline{O_x} \subset O'_x$$

ainsi qu'un repère mobile orthonormé $R(x) = \{e_i^x\}_{1 \le i \le n}$ sur O'_x. Si $x \in M \setminus \partial M$, on suppose que O'_x est disjoint du bord et si $x \in \partial M$, on suppose que $e_n = \nu$ et $\nabla_\nu e_i = 0$ pour tout $i \le n-1$. Dans ce dernier cas, les restrictions des e_i^x, $i \le n-1$, à $O'_x \cap \partial M$ définissent un repère local tangent au bord. Recouvrons la variété compacte M par une famille finie $(O_j)_{j \in J}$ de tels ouverts avec $O_j = O_{x_j}$ et $R_j = R_{x_j} = \{e_i^j\}_{1 \le i \le n}$.

Si $A \in \tilde{\Sigma}$ est un vecteur tangent en y, fixons $j \in J$ tel que $y \in O_j$ et posons $X_A = X_A^i e_i^j$, où les X_A^i sont les composantes de A dans la base $R_j(y)$ de T_yM; X_A est donc un champ de vecteurs unitaires sur O_j. Or $\nabla^k X_A = X_A^i \nabla^k e_i^j$ sur O'_j et puisque $\overline{O_j}$ est un compact de O'_j, il est clair que la famille $\mathcal{G} = \{X_A\}_{A \in \tilde{\Sigma}}$ de champs de vecteurs unitaires locaux est bornée dans C^k pour tout entier k. En plus, si $A \in \Sigma_2$, la restriction de X_A à ∂M est tangente au bord et $\nabla_\nu X_A = 0$.

Soit $u \in \mathbb{B}$. Notons $J = k(\nu - u) + l|\nabla u|^2$, où k et l sont deux réels strictement positifs précisés ultérieurement. Sur le fibré tangent TM, on considère la fonctionnelle $\tilde{\Gamma} = \mathcal{Q} \exp(J \circ \pi)$, où $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2$ est défini en 1.3. Supposons que le maximum de $\tilde{\Gamma}$ sur le fibré unitaire Σ est atteint en $A \in \Sigma_x$. Soit $X = X_A \in \mathcal{G}$ le champ de vecteurs défini ci-dessus sur un voisinage O de x. La fonction $\Gamma = E \exp(J) \in C^\infty(O)$, où $E = E_1 + E_2 = \mathcal{Q} \circ X$ est défini en 1.3-(3), atteint son maximum en x. Si on montre que $E(x) \le Cste$, en écrivant que

$$\tilde{\Gamma}(\eta) \le \tilde{\Gamma}(A) = E(x) \exp\big(J(x)\big), \quad \text{pour tout } \eta \in \Sigma,$$

on obtient

$$-u + \nabla^2 u(\eta, \eta) \le \|\mathcal{Q}_2\|_\infty + E(x) \exp(2\|J\|_\infty) \le Cste.$$

L'estimée a priori C^2 et la proposition s'en déduisent.

Tous les calculs qui suivent sont effectués au point x. Supposons donc que $E(x) \ge 1$ et $E_1(x) \ge 1$, sinon c'est fini. Il en résulte l'existence d'une constante positive C_2 telle que

$$E \le C_2 E_1 \quad \text{et} \quad -nu + \triangle u \le C_2 E. \tag{4}$$

La suite se fait en deux cas selon que $x \in M \setminus \partial M$ ou $x \in \partial M$.

2.1

Supposons que $x \in M \setminus \partial M$. Écrivons que $\nabla \Gamma = 0$ et $\triangle' \Gamma \le 0$; il vient

$$\nabla E + E \nabla J = 0 \tag{5}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

et, puisque $\nabla J = -E^{-1}\nabla E$,

$$\triangle' E - E^{-1}|\nabla' E|^2 + E \triangle' J \leq 0. \tag{6}$$

Conservons les notations du lemme 2, tenons compte de (5) et la définition de J, on peut écrire

$$\begin{aligned} E^{-1}[g'^{ij}\tilde{U}_i\nabla_j E - V^i\nabla_i E] &= -g'^{ij}\tilde{U}_i\nabla_j J + V^j\nabla_j J \\ &= (-g'^{ij}\tilde{U}_i + V^j)\big(k\nabla_j(v-u) + 2l\nabla_{jk}u\,\nabla^k u\big). \end{aligned}$$

La définition de g' donne $\nabla_{jk}u = g'_{jk} + ug_{jk}$ ensuite, et puisque $g'^{ij}g'_{jk} = \delta^i_k$,

$$\begin{aligned} E^{-1}(g'^{ij}\tilde{U}_i\nabla_j E - V^i\nabla_i E) = V^i\big(k\nabla_i(v-u) + 2lu\nabla_i u\big) \\ - 2l\tilde{U}_i\nabla^i u + 2lg'_{ij}V^i\nabla^j u - g'^{ij}\tilde{U}_i\big(k\nabla_j(v-u) + 2lu\nabla_j u\big). \end{aligned}$$

On en déduit, tenons compte de (4) et des inégalités (10), preuve du lemme 1, qu'il existe deux constantes positives C_3 et C_4 telles que

$$E^{-1}(g'^{ij}\tilde{U}_i\nabla_j E - V^i\nabla_i E) \geq -C_3(k+l)g'^{ij}g_{ij} - C_4 lE.$$

Reportons dans l'inégalité (4) du lemme 2, tenons compte à nouveau de (4) et des inégalités (10) de la preuve du lemme 1, on conclut au fait que si

$$E \geq \sup(k, l), \tag{7}$$

alors, il existe une constante positive C_5 ne dépendant ni de k ni de l telle que

$$\begin{aligned} \triangle' E - E^{-1}|\nabla' E|^2 \geq \frac{\partial F}{\partial p^i}\nabla_i E - C_5 E g'^{ij}g_{ij} \\ - \frac{\|E_2\|_\infty}{E.E_1}|\nabla' E|^2 - D_2 g^{ij}g^{kl}\nabla_{ik}u\nabla_{jl}u. \end{aligned} \tag{8}$$

D'autre part, d'après (4), il est clair que

$$g^{ij}g^{kl}\nabla_{ik}u\nabla_{jl}u \leq C_2 E g'^{ij}g^{kl}\nabla_{ik}u\nabla_{jl}u$$

et, d'après (5),

$$|\nabla' E|^2 = E^2|\nabla' J|^2 \leq C_6 E^2\big(k^2|\nabla'(v-u)|^2 + l^2 g'^{ij}g^{kl}\nabla_{ik}u\nabla_{jl}u\big).$$

La constante C_6 ne dépend que de $\|\nabla u\|_\infty$. Par suite, tenons compte de (4),

$$\frac{\|E_2\|_\infty}{E.E_1}|\nabla' E|^2 \leq C_7 k^2 g'^{ij}g_{ij} + l^2 C_8 g'^{ij}g^{kl}\nabla_{ik}u\nabla_{jl}u,$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

où C_7 est fonction de C_2, C_6, $\|E_2\|_\infty$ et $\|\nabla(v-u)\|_\infty$; la constante C_8 dépend de C_2, C_6 et $\|E_2\|_\infty$. Supposons que

$$E \geq \sup(k^2, l^2) \tag{9}$$

et notons $C_9 = C_5 + C_7$ et $C_{10} = C_2 D_2 + C_8$, l'inégalité (8) implique alors

$$\triangle' E - E^{-1}|\nabla' E|^2 \geq \frac{\partial F}{\partial p^i}\nabla_i E - C_9 E g'^{ij} g_{ij} - C_{10} E g'^{ij} g^{kl} \nabla_{ik} u \nabla_{jl} u. \tag{10}$$

À présent calculons $\triangle' J$.

$$\triangle' J = k \triangle' (v-u) + 2l g'^{ij} \nabla_{ijk} u \nabla^k u + 2l g'^{ij} g^{kl} \nabla_{ik} u \nabla_{jl} u.$$

Or, par dérivation de l'équation satisfaite par u, on peut écrire

$$g'^{ij} \nabla_{ijk} u = \nabla_k F + g'^{ij} g_{ij} \nabla_k u - g'^{ij} R^h_{jik} \nabla_h u.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \triangle' J = {} & k g'^{ij}(-v g_{ij} + \nabla_{ij} v) + k(v-u) g'^{ij} g_{ij} - nk + 2l \nabla_k F \nabla^k u \\ & + 2l |\nabla u|^2 g'^{ij} g_{ij} - 2l g'^{ij} R^h_{jik} \nabla_h u \nabla^k u + 2l g'^{ij} g^{kl} \nabla_{ik} u \nabla_{jl} u. \end{aligned}$$

Désignons par b un réel strictement positif tel que $(-v g_{ij} + \nabla_{ij} v) \geq b(g_{ij})$, l'existence d'un tel réel est donnée par l'admissibilité de v. Tenons compte de l'hypothèse (3) et développons $\nabla_k F$, on vérifie, quitte à minorer par zéro les termes positifs, que

$$\triangle' J \geq \frac{\partial F}{\partial p^i} \nabla_i J + (kb - l C_{11}) g'^{ij} g_{ij} + 2l g'^{ij} g^{kl} \nabla_{ik} u \nabla_{jl} u - k(n + C_{12}) - l C_{13}, \tag{11}$$

où la constante C_{11} n'est fonction que de $\|\nabla u\|_\infty$ et $\|\mathcal{R}\|_\infty$, la constante C_{12} (resp.C_{13}) est fonction de $\|\nabla(v-u)\|_\infty$ (resp. $\|\nabla u\|_\infty$) et d'un majorant des dérivées partielles d'ordre 1 de F sur K_2.

Reportons (10) et (11) dans (6), tenons compte de (5), il vient

$$[kb - l C_{11} - C_9] E g'^{ij} g_{ij} + [2l - C_{10}] E g'^{ij} g^{kl} \nabla_{ik} u \nabla_{jl} u \leq k(n + C_{12}) + l C_{13}. \tag{12}$$

Fixons $l = 2^{-1} C_{10}$ et notons $k_0 = b^{-1}(1 + 2^{-1} C_{10} C_{11} + C_9)$. L'inégalité (12) dit, puisque $E \geq 1$, que si $k \geq k_0$, alors $g'^{ij} g_{ij} \leq C_{14}$. Compte tenu de l'équation satisfaite par u, on vérifie, par l'inégalité arithmétique géométrique, que $E_1 \leq C_{15}$ et par suite, d'après (7) et (9),

$$E(x) \leq \sup(k_0, k_0^2, l, l^2, \|E_2\|_\infty + C_{15}).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

2.2

Supposons que $x \in \partial M$. Remarquons d'abord que la restriction de $\mathcal{Q}$ à Σ_x atteint son maximum en A. Si $A = \nu(x)$, le résultat découle de la proposition 2. Si A est transverse, il s'écrit $A = \cos\theta\tau + \sin\theta\nu$ pour un $\tau \in T_x\partial M \cap \Sigma$ et $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par suite $\mathcal{Q}(\tau) \leq \mathcal{Q}(A)$ et $\mathcal{Q}(\nu) \leq \mathcal{Q}(A)$. Or

$$\mathcal{Q}(A) = \cos^2\theta\mathcal{Q}(\tau) + \sin^2\theta\mathcal{Q}(\nu).$$

On en déduit que $\mathcal{Q}(\tau) = \mathcal{Q}(\nu) = \mathcal{Q}(A)$. On peut donc supposer que $A \in T_x\partial M$. Le champ de vecteur $X = X_A \in \mathcal{G}$ associé à A est tangent à ∂M en tout point du bord et $\nabla_\nu X = 0$.

Au point x où Γ atteint son maximum, on a $\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu} \leq 0$; c'est-à-dire

$$\nabla_\nu E_1 + \nabla_\nu E_2 + E[k\nabla_\nu(v-u) + l\nabla_\nu|\nabla u|^2] \leq 0. \tag{13}$$

On se place dans un repère orthonormé $\{(e_i)_{1\leq i\leq n-1}, e_n = \nu\}$ en x. Le réel l étant fixé en accord avec le premier cas. Comme dans les expressions de $\nabla_\nu E_2$ et $\nabla_\nu|\nabla u|^2$ n'interviennent que $\nabla_{ni}u$ et $\nabla_{nn}u$, d'après la proposition 2, on a,

$$\nabla_\nu E_2 \geq -C_{16} \quad \text{et} \quad l\nabla_\nu|\nabla u|^2 \geq -C_{17}.$$

Tenons compte de l'hypothèse (3), l'inégalité (13) s'écrit

$$\nabla_\nu E_1 + E(ka - C_{17}) \leq C_{16}. \tag{14}$$

Calculons $\nabla_\nu E_1$. Par définition de la dérivée covariante, on a:

$$\begin{aligned}\nabla_{ijn}u = \nabla^3 u(e_i, e_j, e_n) &= \big(\nabla_{e_i}(\nabla^2 u)\big)(e_j, e_n)\\ &= \nabla_{e_i}\big(\nabla^2 u(e_j, e_n)\big) - \nabla^2 u(\nabla_{e_i}e_j, e_n) - \nabla^2 u(e_j, \nabla_{e_i}e_n).\end{aligned}$$

D'où, d'après les équations de Gauss et Weingarten 1.2,

$$\begin{aligned}\nabla_{ijn}u = \overline{\nabla}_{e_i}(\langle d\varphi, e_j\rangle + \langle du, We_j\rangle) &- \nabla^2 u(\overline{\nabla}_{e_i}e_j, e_n)\\ &- B_{ij}\nabla^2 u(e_n, e_n) + \nabla^2 u(e_j, We_i).\end{aligned}$$

Ensuite, et puisque

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{e_i}\langle d\varphi, e_j\rangle &= \overline{\nabla}^2\varphi(e_i, e_j) + \langle d\varphi, \overline{\nabla}_{e_i}e_j\rangle\\ &= \nabla^2\varphi(e_i, e_j) + \langle d\varphi, \nabla_{e_i}e_j\rangle,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_{e_i}\langle du, We_j\rangle &= \overline{\nabla}^2 u(e_i, We_j) + \langle du, \overline{\nabla}W(e_i, e_j)\rangle + \langle du, W(\overline{\nabla}_{e_i}e_j)\rangle\\ &= \nabla^2 u(e_i, We_j) + B(e_i, We_j)\varphi + \langle du, \overline{\nabla}W(e_i, e_j)\rangle + \langle du, W(\overline{\nabla}_{e_i}e_j)\rangle\end{aligned}$$

et

$$\nabla^2 u(\overline{\nabla}_{e_i}e_j, e_n) = \langle d\varphi, \overline{\nabla}_{e_i}e_j\rangle + \langle du, W(\overline{\nabla}_{e_i}e_j)\rangle$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

il vient

$$\nabla_{ijn}u = \nabla^2\varphi(e_i,e_j) + \nabla^2 u(e_i, We_j) + B_{ij}(\nabla_n\varphi - \nabla_{nn}u) \\ + \nabla^2 u(e_j, We_i) + \langle du, \overline{\overline{\nabla}} W(e_i,e_j)\rangle + B(e_i, We_j)\varphi.$$

Or

$$\nabla_{nij}u = \nabla_{ijn}u - R^a_{jni}\nabla_a u.$$

On en déduit que

$$\nabla_{\nu XX}u = B(X,WX)\varphi + \nabla_{XX}\varphi + B(X,X)(\nabla_\nu\varphi - \nabla_{\nu\nu}u) \\ + \langle du, \overline{\overline{\nabla}} W(X,X)\rangle - \langle du, R(\nu,X)X\rangle + 2\nabla_{X,WX}u.$$

Il existe donc, d'après la proposition 2, une constante positive C_{18} telle que

$$\nabla_\nu E_1 \geq -C_{18} + \nabla_{XX}\varphi + 2\nabla_{X,WX}u.$$

Développons $\nabla_{XX}\varphi$, d'après (4), il vient

$$\nabla_{XX}\varphi = \varphi'_t\nabla_{XX}u + \varphi''_{t^2}(\nabla_X u)^2 + 2\nabla_X\varphi'^x_t\nabla_X u + \nabla_{XX}\varphi^x \\ \geq -\|\varphi'_t\|_{C^0(K_1)}E - C_{19}.$$

De même, il est immédiat que

$$|\nabla_{X,WX}u| \leq |\nabla_{XX}u|^{\frac12}\,|\nabla_{WX,WX}u|^{\frac12} \leq \|W\|(E_1 + Cste).$$

En conséquence, il existe une constante positive C_{20} dépendant de $\|\varphi'_t\|_{C^0(K_1)}$ et $\|W\|_\infty$ telle que

$$\nabla_\nu E_1 \geq -C_{20}E - C_{18} - C_{19}.$$

Tenons compte de (14), on obtient:

$$E(ka - C_{17} - C_{20}) \leq C_{16} + C_{18} + C_{19}.$$

Pour $k \geq k_1 = a^{-1}(1 + C_{17} + C_{20})$, on aura $E \leq C_{16} + C_{18} + C_{19}$ et l'estimée C^2 de u sera acquise dès qu'on choisit $k = \sup(k_0, k_1)$.

3 Résolution de problèmes

Remarquons d'abord que dans le cas où la donnée au bord φ ne dépend que du point générique, si celle-ci est la restriction au bord d'une fonction $\varphi \in C^\infty(M)$, il existe toujours une fonction $\rho \in C^\infty(M)$ admissible telle que $\frac{\partial\rho}{\partial\nu} = \varphi$ partout sur le bord. En effet, désignons par δ une fonction de $C^\infty(M)$ majorée négativement et coïncidant avec $\frac{\partial r}{\partial\nu}$ sur le bord; une telle fonction existe car $\partial_\nu r \leq -C < 0$ sur le bord. Posons $\rho = \frac{r\varphi}{\delta} - a$, où a

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

est un réel strictement positive. Un simple calcul montre que $\partial_\nu \rho = \varphi$ partout sur ∂M et, si a est assez grand, on aura

$$-\rho g_{ij} + \nabla_{ij}\rho = a g_{ij} - \frac{r\varphi}{\delta} g_{ij} + \nabla_{ij}\left(\frac{r\varphi}{\delta}\right) \geq \frac{a}{2} g_{ij}.$$

Donc ρ est admissible. À présent, on donne le résultat suivant:

Théorème 1 *Soient $F \in C^\infty(M)$ une fonction partout strictement positive et $\varphi \in C^\infty(M)$. Le problème*

$$(1) \qquad \begin{cases} \det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u) = F(x) & \text{dans } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x) & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

admet une et une seule solution $u \in C^\infty(M)$ admissible si et seulement s'il existe une sur solution $w \in C^\infty(M)$ admissible telle que $\partial_\nu w = \varphi$ partout sur ∂M.

Démonstration La nécessité de l'existence d'une sur solution $w \in C^\infty(M)$ admissible vérifiant la condition au bord est immédiate. En effet, si (1) admet une solution u, celle-ci est admissible. La fonction $w = u + a$, où a est un réel strictement positif fixé assez petit de sorte que w soit admissible est une sur solution admissible et elle vérifie la condition au bord. Montrons la réciproque. Remarquons d'abord que l'existence d'une sur solution $w \in C^\infty(M)$ admissible telle que $\partial_\nu w = \varphi$ partout sur ∂M est acquise si la donnée au bord φ est identiquement nulle. En effet, toute fonction $w = -C$ où C est une constante strictement positive inférieure à $(\min_M F)^{\frac{1}{n}}$ répond à la question. Dans tout ce qui suit, on suppose que w n'est pas une solution de (1) et on désigne par ϵ un réel strictement positif fixé assez petit de sorte que $w - 2\epsilon r$ soit admissible. L'unicité de la solution de (1) est une simple conséquence du principe du maximum pour l'opérateur $N(u) \equiv \det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u)$. En vu d'établir l'existence d'une solution C^∞ admissible pour (1), on utilise la méthode de continuité. Désignons par ρ une fonction C^∞ admissible telle que $\frac{\partial \rho}{\partial \nu} = \varphi$ partout sur le bord. Soit k un réel strictement positif. Posons $u_0 = \rho - \epsilon r - k$. Il est clair que

$$-u_0 g_{ij} + \nabla_{ij} u_0 \geq (\epsilon r + k) g_{ij} - \epsilon \nabla_{ij} r.$$

Ensuite, pour k assez grand, on voit que $-u_0 g_{ij} + \nabla_{ij} u_0 \geq \frac{k}{2} g_{ij}$. Ainsi u_0 est admissible et dès qu'on fixe $k \geq 2(\max_M F)^{\frac{1}{n}}$, on obtient:

$$(2) \qquad F_0(x) \equiv N(u_0) \geq F(x) \quad \text{dans } M.$$

Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on considère le problème

$$(E_t) \qquad \begin{cases} N(u_t) = [F_0(x)]^{1-t}[F(x)]^t & \text{dans } M \\ \frac{\partial u_t}{\partial \nu} = \varphi(x) - \epsilon(1-t)\frac{\partial r}{\partial \nu} & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

On note T l'ensemble des réels $t \in [0, 1]$ tels que pour tout $s \leq t$, le problème (E_s) admet une seule solution $u_s \in C^\infty(M)$ admissible. Cet ensemble est non vide car u_0 est une

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

solution de (E_t) pour $t = 0$. Le théorème des fonctions implicites implique à la fois que T est ouvert et puisque $0 \in T$, il existe un réel $t_1 > 0$, tel que $[0, t_1[\, \subset T$. Supposons que $t_1 \leq 1$ et établissons une estimée a priori dans $C^{2,\alpha}(M)$ sur les solutions u_t de (E_t) pour $t \geq t_1$. L'estimée C^0 est immédiate. En effet, désignons par $x_0 \in M$ un point où u_t atteint son maximum. Si $x_0 \in M \setminus \partial M$, alors $\triangle u_t(x_0) \leq 0$. Or, l'admissibilité de u_t implique que

$$0 \leq (-nu_t + \triangle u_t)(x_0).$$

On en déduit que

$$u_t \leq u_t(x_0) \leq 0. \tag{3}$$

Si $x_0 \in \partial M$, on se place dans un repère g-orthonormé $\{(e_i)_{1\leq i\leq n-1}, e_n = \nu\}$, donc, pour toute direction tangentielle i, on a: $\overline{\nabla}_{ii} u_t(x_0) \leq 0$, et, tenons compte de la relation 1.2-(1) et la condition au bord, on peut écrire que

$$\begin{aligned} 0 &\leq (-u_t + \nabla_{ii} u_t)(x_0) = (-u_t + \overline{\nabla}_{ii} u_t)(x_0) - B_{ii}(x_0)\partial_\nu u_t(x_0) \\ &\leq -u_t(x_0) - B_{ii}(x_0)\varphi(x_0). \end{aligned}$$

Ainsi, en notant par α le maximum sur ∂M de la plus grande courbure principale du bord, on obtient

$$u_t \leq u_t(x_0) \leq -B_{ii}(x_0)\varphi(x_0) \leq \alpha \|\varphi\|_\infty,$$

inégalité, qui combinée avec (3), montre que u_t est majorée *a priori*. Pour établir une minoration *a priori*, notons par $x_1 \in M$ un point où la fonction $u_0 - u_t$ atteint son maximum. D'après la définition de u_0, ce maximum ne peut être atteint sur le bord. En effet, puisque $t \geq t_1 > 0$, on voit que

$$\partial_\nu(u_0 - u_t) = -\epsilon t \partial_\nu r > 0 \quad \text{sur } \partial M.$$

Le point x_1 appartient donc à $M \setminus \partial M$. D'après (2) et (E_t), il vient,

$$N(u_t) \leq N(u_0), \quad \text{partout dans } M,$$

on déduit, à l'aide du théorème de la moyenne, l'existence d'une fonction $h \in C^\infty(M)$ admissible telle que

$$g_h'^{ij} \nabla_{ij}(u_0 - u_t) - g_h'^{ij} g_{ij}(u_0 - u_t) \geq 0. \tag{4}$$

Du fait que h est admissible et puisque $u_0 - u_t$ atteint son maximum en x_1, on voit que $g_h'^{ij} \nabla_{ij}(u_0 - u_t)(x_1) \leq 0$ et $g'^{ij}(h) g_{ij} > 0$. Ensuite (4) montre que, partout dans M,

$$u_0 - u_t \leq (u_0 - u_t)(x_1) \leq 0,$$

d'où une minoration *a priori* sur u_t. L'estimée C^0 est donc acquise et la proposition 1 donne une estimation uniforme dans C^1. On est amené à établir l'existence d'une fonction $v \in C^\infty(M)$ admissible vérifiant l'hypothèse (3) de la proposition 3 pour majorer uniformément u_t dans C^2. Tout d'abord

$$\partial_\nu(u_t - w) = \epsilon(t-1)\partial_\nu r > 0 \quad \text{sur } \partial M. \tag{5}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Il en découle que la fonction $u_t - w$ ne peut atteindre son maximum sur le bord. Tenons compte de (2), on voit que $N(w) \leq N(u_t)$ partout dans M, le principe du maximum combiné avec le théorème de la moyenne implique que

$$u_t \leq w, \quad \text{partout dans } M. \tag{6}$$

La fonction $v = w - 2\epsilon r$ est admissible et, tenons compte de (5) et (6), il est clair que les hypothèses de la proposition 3 sont satisfaites, on en déduit que toute solution de (E_t) est estimée a priori dans $C^2(M)$ et par suite dans $C^{2,\alpha}(M)$. Le théorème d'Arzela-Ascoli montre que T est fermé et, par connexité, $T = [0, 1]$. En particulier, on dispose d'une solution C^∞ admissible de (1). D'où le résultat.

Théorème 2 *Soient $\varphi \in C^\infty(\partial M)$ et $F \in C^\infty(TM \times \mathbb{R})$ une fonction partout strictement positive telle que $F_t' \geq 0$ sur $TM \times \mathbb{R}$. Le problème*

$$\begin{cases} \det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u) = F(x, \nabla u; u) & \textit{dans } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x) & \textit{sur } \partial M \end{cases} \tag{1}$$

admet une et une seule solution $u \in C^\infty(M)$ admissible si et seulement s'il existe une sur solution $w \in C^\infty(M)$ admissible telle que $\partial_\nu w = \varphi$ partout sur ∂M.

Démonstration La nécessité de la condition est établise en raisonnant comme au théorème précédent. Supposons que (1) admet une sur solution w admissible vérifiant la condition au bord. En vu d'établir l'existence d'une solution C^∞ admissible de (1), on opère par continuité. Tout d'abord, on fixe un réel ϵ, strictement positif, assez petit de sorte que la fonction $w - 2\epsilon r$ soit admissible. D'après la preuve du théorème précédent, il existe une fonction $v_0 \in C^\infty(M)$ admissible telle que

$$\begin{cases} N(v_0) \geq N(w) & \text{dans } M \\ \frac{\partial v_0}{\partial \nu} = \varphi(x) - \epsilon \frac{\partial r}{\partial \nu} & \text{sur } \partial M. \end{cases} \tag{2}$$

Il s'en suit que $\|v_0\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_0$. Notons par C_1 le maximum de F sur le compact de $TM \times [-C_0, C_0]$ décrit par les $(x, p; t)$ tels que $x \in M$ et $|p| \leq C_0$ et remarquons que, si a est un réel strictement positif, on aura, partout dans M,

$$N(v_0 - a) > a^n \geq C_1 \geq F(x, \nabla v_0; v_0)$$

et ceci dès qu'on fixe $a \geq (C_1)^{\frac{1}{n}}$. On pose $u_0 = v_0 - a$. Or $\nabla u_0 = \nabla v_0$ et $v_0 > u_0$, l'hypothèse de croissance faite sur le second membre implique que, partout dans M,

$$F(x, \nabla v_0; v_0) \geq F(x, \nabla u_0; u_0)$$

et donc

$$\begin{cases} N(u_0) \geq F(x, \nabla u_0; u_0) & \text{dans } M \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \varphi(x) - \epsilon \frac{\partial r}{\partial \nu} & \text{sur } \partial M. \end{cases} \tag{3}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

À présent, pour tout réel $t \in [0,1]$, on considère le problème

$$(E_t) \qquad \begin{cases} N(u_t) = [F(x, \nabla u_t; u_t)]^t [N(u_0)]^{1-t} & \text{dans } M \\ \frac{\partial u_t}{\partial \nu} = \varphi(x) - \epsilon(1-t)\frac{\partial r}{\partial \nu} & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

On note T l'ensemble des réels $t \in [0,1]$ tels que pour tout $s \leq t$, le problème (E_s) admet une seule solution $u_s \in C^\infty(M)$ admissible. Cet ensemble est non vide car u_0 est une solution de (E_t) pour $t = 0$. Le théorème des fonctions implicites implique l'existence d'un réel $t_1 > 0$, tel que $[0, t_1[\subset T$. Supposons que $t_1 \leq 1$, un raisonnement analogue à celui du théorème précédent montre que toute solution de (E_t), où $t \geq t_1$, est majorée *a priori* et comme

$$\partial_\nu(u_0 - u_t) = -\epsilon t \partial_\nu r > 0 \quad \text{sur } \partial M,$$

le maximum de la fonction $u_0 - u_t$ est atteint en un point de $x_0 \in M \setminus \partial M$. Tenons compte de (3), le principe du maximum montre que $(u_0 - u_t)(x_0) \leq 0$. On en déduit l'estimée C^0 et qu'on peut donc conclure dès que les hypothèses de la proposition 3 seront satisfaites. Tenons compte de (2) qui implique que $N(u_0) \geq N(w)$ partout dans M, on déduit que pour tout $t \in [t_0, 1]$, si u_t est une solution de (E_t), alors

$$\begin{cases} N(u_t) \geq [F(x, \nabla u_t; u_t)]^t [N(w)]^{1-t} & \text{dans } M \\ \partial_\nu(u_t - w) = \epsilon(t-1)\partial_\nu r > 0, & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Il découle de la condition sur la frontière que la fonction $u_t - w$ ne peut atteindre son maximum sur le bord. Il s'en suit, puisque $N(w) \leq F(x, \nabla w; w)$ partout dans M, que

$$Ln[N(u_t)] - Ln[N(w)] - t\big[Ln[F(x, \nabla u_t; u_t)] - Ln[F(x, \nabla w; w)]\big] \geq 0.$$

Le théorème de la moyenne combiné avec le principe du maximum montre que

$$(4) \qquad \begin{cases} u_t \leq w, & \text{dans } M \\ \partial_\nu(u_t - w) = \epsilon(t-1)\partial_\nu r, & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

D'après le choix du réel ϵ, la fonction $v = w - 2\epsilon r$ est admissible et, tenons compte de (4), il est clair que

$$\begin{cases} v \geq w \geq u_t, & \text{dans } M \\ \partial_\nu(v - u_t) \geq -\epsilon \partial_\nu r \geq a > 0, & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Les hypothèses de la proposition 3 étant satisfaites. D'où le résultat.

Théorème 3 *Soient $\varphi \in C^\infty(M \times \mathbb{R})$ une fonction telle que $\varphi'_t(x,t) > 0$ pour tout $(x,t) \in \partial M \times \mathbb{R}$ et $F \in C^\infty(M)$ une fonction partout strictement positive. Sous l'hypothèse d'existence d'une sur solution $w \in C^\infty(M)$ admissible telle que*

$$(1) \qquad \frac{\partial w}{\partial \nu} = \varphi(x, w) \quad \textit{partout sur } \partial M.$$

Le problème

$$(2) \qquad \begin{cases} \det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u) = F(x) & \textit{dans } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x, u) & \textit{sur } \partial M \end{cases}$$

admet une et une seule solution $u \in C^\infty(M)$ admissible.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Démonstration L'unicité de la solution de (2) est une simple conséquence du principe du maximum. En vu d'en établir l'existence, on utilise la méthode de continuité. On désigne par $\tilde{u}_0$ une fonction C^∞ admissible telle que

$$\begin{cases} \det(-\tilde{u}_0\delta^i_j + \nabla^i_j\tilde{u}_0) \geq F(x) & \text{dans } M \\ \frac{\partial\tilde{u}_0}{\partial\nu} = \varphi(x,w) & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Une telle fonction existe en vertu du théorème 1. Dans tout ce qui suit, on notera ϵ un réel strictement positif fixé assez petit de sorte que la fonction $w - 2\epsilon r$ soit admissible. On pose $u_0 = \tilde{u}_0 - \epsilon r - k$ où le réel strictement positif k est fixé assez grand de sorte que u_0 soit admissible et vérifie

$$\det(-u_0\delta^i_j + \nabla^i_j u_0) \geq F(x) \quad \text{partout dans } M. \tag{3}$$

Posons $F_0(x) = \det(-u_0\delta^i_j + \nabla^i_j u_0)$, considérons, pour $t \in [0,1]$, le problème de continuité suivant:

$$(E_t) \qquad \begin{cases} N(u_t) = F_0(x)[\frac{F(x)}{F_0(x)}]^t & \text{dans } M \\ \frac{\partial u_t}{\partial\nu} = t\varphi(x,u_t) + (1-t)[\varphi(x,w) - \epsilon\partial_\nu r] & \text{sur } \partial M \end{cases}$$

et notons par T l'ensemble des réels $t \in [0,1]$ tels que pour tout $s \leq t$, le problème (E_s) admet une seule solution $u_s \in C^\infty(M)$ admissible. L'ensemble T est non vide car pour $t = 0$ la fonction u_0 est une solution. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un réel $a > 0$ tel que $[0,a[\ \subset T$. Supposons $a \leq 1$, sinon c'est fini, et notons $t_1 = \sup T$. Si $t_1 > 1$, on aura une solution de (E_t) pour $t = 1$ qui sera la solution désirée du problème (2). Supposons que $t_1 \leq 1$. Il s'agit de montrer que (E_t) admet une solution C^∞ admissible pour $t = t_1$ ensuite appliquer le théorème des fonctions implicites en $t = t_1$, comme on l'a fait en $t = 0$ pour conclure à l'existence d'un réel $t_2 > t_1$ telle que $[0,t_2[\ \subset T$ ce qui contredit la définition de t_1 et donc celui-ci ne peut être ≤ 1.

Pour montrer que (E_t) admet une solution C^∞ admissible pour $t = t_1$, l'établissement d'une estimée a priori dans $C^{2,\alpha}(M)$ sur les solutions u_t de (E_t) est nécessaire.

Établissons d'abord l'estimée C^0. D'après (1), (3) et (E_t), il vient

$$N(u_t) \geq F(x) \geq N(w) \quad \text{partout dans } M. \tag{4}$$

Notons par $x_0 \in M$ un point où la fonction $u_t - w$ atteint son maximum. Si $x_0 \in M \backslash \partial M$, on déduit de (4), à l'aide du théorème de la moyenne, l'existence d'une fonction $h \in C^\infty(M)$ admissible telle qu'on ait en x_0

$$g'^{ij}_h \nabla_{ij}(u_t - w) - g'^{ij}_h g_{ij}(u_t - w) \geq 0. \tag{5}$$

Du fait que h est admissible on voit que $g'^{ij}_h \nabla_{ij}(u_t - w)(x_0) \leq 0$ et $g'^{ij}_h g_{ij} > 0$. Ainsi, (5) montre que, partout dans M,

$$u_t - w \leq (u_t - w)(x_0) \leq 0.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Si x_0 est sur le bord, alors

$$\partial_\nu(u_t - w)(x_0) = -\epsilon(1-t)\partial_\nu r + t\big[\varphi\big(x_0, u_t(x_0)\big) - \varphi\big(x_0, w(x_0)\big)\big] \leq 0.$$

On en déduit, d'après le théorème de la moyenne et puisque $\partial_\nu r < 0$ partout sur le bord, qu'il existe une fonction $\tilde{h} \in C^\infty(M)$ telle que

$$t\varphi'_z\big(x_0, \tilde{h}(x_0)\big)(u_t - w)(x_0) \leq 0.$$

Il en découle, puisque $\varphi'_z > 0$ et $t \geq a > 0$, que $(u_t - w)(x_0) \leq 0$. Dans les deux cas on aboutit au fait que $(u_t - w)(x_0) \leq 0$ et donc

$$u_t \leq w \quad \text{partout dans } M. \tag{6}$$

D'autre part, d'après (3) et (E_t), on obtient

$$N(u_t) \leq F_0(x) = N(u_0) \quad \text{partout dans } M.$$

Si on note par $x_1 \in M$ un point où la fonction $u_0 - u_t$ atteint son maximum, il est clair que si $x_1 \in M \backslash \partial M$, le théorème de la moyenne implique l'existence d'une fonction $k \in C^\infty(M)$ admissible telle qu'on ait

$$g_k'^{ij} \nabla_{ij}(u_0 - u_t) - g_k'^{ij} g_{ij}(u_0 - u_t) \geq 0. \tag{7}$$

Du fait que k est admissible on voit que

$$g_k'^{ij} \nabla_{ij}(u_0 - u_t)(x_0) \leq 0 \quad \text{et} \quad g_k'^{ij} g_{ij} > 0.$$

Ainsi, (7) montre que, partout dans M,

$$u_0 - u_t \leq (u_0 - u_t)(x_1) \leq 0.$$

Si $x_1 \in \partial M$, alors

$$\partial_\nu(u_0 - u_t)(x_1) = -t\epsilon\partial_\nu r(x_1) + t\big[\varphi\big(x_1, w(x_1)\big) - \varphi\big(x_1, u(x_1)\big)\big] \leq 0.$$

Le théorème de la moyenne montre qu'il existe une fonction $\tilde{k} \in C^\infty(M)$ telle que

$$-t\epsilon\partial_\nu r(x_1) + t\varphi'_z\big(x_1, \tilde{k}(x_1)\big)(w - u_t)(x_1) \leq 0.$$

Cette inégalité implique, puisque le premier membre de gauche est strictement positif et $\varphi'_z > 0$, que $(w - u_t)(x_1) < 0$. Ceci ne peut avoir lieu d'après (6) et donc le point x_1 ne peut être sur le bord. D'où

$$u_0 \leq u_t \quad \text{partout dans } M. \tag{8}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Tenons compte de (6) et (8), l'estimée a priori $C^0(M)$, $-C_0 \leq u_t \leq C_0$, est donc acquise et la proposition 1 donne une estimation uniforme dans $C^1(M)$. D'après le choix du réel ϵ, la fonction $v = w - 2\epsilon r$ est admissible. Or d'après (6), on voit que pour tout $t \in [a, 1]$, si u_t est une solution admissible de (E_t), alors

$$u_t \leq w \leq v.$$

On en déduit que, partout sur le bord, $\varphi(x, w) \geq \varphi(x, u_t)$ et par suite

$$\partial_\nu(v - u_t) \geq -(1 + t)\epsilon\partial_\nu r \geq -\epsilon\partial_\nu r \geq C > 0.$$

La fonction v vérifie l'hypothèse (3) de la proposition 3 ce qui nous permet d'affirmer que toute solution de (E_t) est borné dans $C^2(M)$ indépendamment de t. D'où le résultat.

Théorème 4 *Soient $\varphi \in C^\infty(\partial M \times \mathbb{R})$ une fonction telle que $\varphi_t'(x, t) > 0$ pour tout $(x, t) \in \partial M \times \mathbb{R}$ et $F \in C^\infty(TM \times \mathbb{R})$ une fonction partout strictement positive telle que $F_t' \geq 0$ sur $TM \times \mathbb{R}$. Sous l'hypothèse d'existence d'une sur solution $w \in C^\infty(M)$ admissible telle que*

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = \varphi(x, w) \quad \textit{partout sur } \partial M.$$

Le problème

$$(1) \qquad \begin{cases} \det(-u\delta^i_j + \nabla^i_j u) = F(x, \nabla u; u) & \textit{dans } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi\big(x, u(x)\big) & \textit{sur } \partial M \end{cases}$$

admet une et une seule solution $u \in C^\infty(M)$ admissible.

Démonstration L'unicité découle du principe de comparaison. En vu d'établir l'existence d'une solution C^∞ admissible de (1), on opère par continuité. Désignons par C_0 une constante telle que $\|w\|_{C^{2,\alpha}} \leq C_0$, notons par C_1 le maximum de F sur le compact de $TM \times [-C_0, C_0]$ décrit par les $(x, p; t)$ tels que $x \in M$ et $|p| \leq C_0$ et remarquons que, si a est un réel strictement positif, on aura, partout dans M,

$$N(w - a) > a^n \geq C_1 \geq F(x, \nabla w; w)$$

et ceci dès qu'on fixe $a \geq (C_1)^{\frac{1}{n}}$. On pose $u_0 = w - a$. Or $\nabla u_0 = \nabla w$ et $w > u_0$, l'hypothèse de croissance faite sur le second membre implique que

$$(2) \qquad \begin{cases} N(u_0) \geq F(x, \nabla u_0; u_0) & \text{dans } M \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \varphi(x, w) & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on considère le problème

$$(E_t) \qquad \begin{cases} N(u_t) = [F(x, \nabla u_t; u_t)]^t [N(u_0)]^{1-t} & \text{dans } M \\ \frac{\partial u_t}{\partial \nu} = t\varphi(x, u_t) + (1 - t)\varphi(x, w) & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

On note T l'ensemble des réels $t \in [0,1]$ tels que pour tout $s \leq t$, le problème (E_s) admet une seule solution $u_s \in C^\infty(M)$ admissible. Cet ensemble est non vide car u_0 est une solution de (E_t) pour $t = 0$. Le théorème d'inversion lacale montre qu'il est ouvert et donc il existe un réel t_0 tel qu'il est possible de résoudre (E_t) pour tout $t < t_0$. Supposons que $t_0 \leq 1$, l'établissement d'une estimée a priori uniforme dans $C^2(M)$ sur les solutions u_t de (E_t) pour tout $t \geq t_0$ permet de conclure. Pour montrer que u_t est minorée uniformément, on se place au point $x_0 \in M$ où la fonction $u_t - u_0$ atteint son minimum. Si $x_0 \in M \setminus \partial M$, on utilise (2) pour montrer à l'aide du théorème de la moyenne que

$$(u_t - u_0)(x_0) \geq 0. \tag{3}$$

Si $x_0 \in \partial M$, on écrit que $\partial_\nu(u_t - u_0)(x_0) \geq 0$; la condition au bord, combinée avec le théorème de la moyenne, implique l'existence d'une fonction $h \in C^\infty$ telle que

$$t\varphi'_u\big(x_0, h(x_0)\big)(u_t - w)(x_0) \geq 0.$$

Or, $w = u_0 + a$, il en découle que

$$t\varphi'_u\big(x_0, h(x_0)\big)(u_t - u_0)(x_0) - ta\varphi'_u\big(x_0, h(x_0)\big) \geq 0.$$

L'hypothèse de croissance faite sur φ, et puisque $t \geq t_0 > 0$, montre que l'inégalité (3) est satisfaite dans les deux cas, on en déduit que

$$u_0 \leq u_t \quad \text{partout dans } M.$$

En vu d'établir une majoration *a priori*, on considère la fonction $u_t - w$ et on note par $x_1 \in M$ un point où elle atteint son maximum. Si $x_1 \in \partial M$, on a $\partial_\nu(u_t - w)(x_1) \leq 0$. La condition au bord et le théorème de la moyenne, compte tenu de l'hypothèse de croissance faite sur φ, et puisque $t \geq t_0 > 0$, impliquent que $(u_t - w)(x_1) \leq 0$. Supposons que $x_1 \in M \setminus \partial M$, un raisonnement analogue à celui du théorème 3 montre là encore que $(u_t - w)(x_1) \leq 0$. Ainsi

$$u_t \leq w \quad \text{partout dans } M. \tag{4}$$

L'estimée C^0 est donc acquise et la proposition 1 donne une estimation uniforme dans C^1. D'autre part, d'après (4), on voit que

$$\varphi(x, w) \geq \varphi(x, u_t) \quad \text{partout sur } \partial M.$$

La fonction $v = w - \epsilon r$, où ϵ est un réel strictement positif fixé assez petit de sorte que v soit admissible, vérifie les conditions suivantes:

$$\begin{cases} v \geq w \geq u_t, & \text{partout dans } M \\ \partial_\nu(v - u_t) \geq -\epsilon\partial_\nu r \geq a > 0, & \text{sur } \partial M. \end{cases}$$

Les hypothèses de la proposition 3 étant satisfaites, on en déduit que toute solution de (E_t) est estimée a priori dans $C^2(M)$. D'où le résultat.

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

4 Appendice

Sur l'estimée $C^{2,\alpha}$ à l'intérieur

Proposition 4 *Soient $\varphi \in C^\infty(\partial M \times \mathbb{R})$, $F \in C^\infty(TM \times \mathbb{R})$, C_0 une constante positive et $\mathbb{B} \subset C^5(M)$ un ensemble de solutions admissibles du problème*

$$\begin{cases} \mathrm{Log}[N(u)] = F(x, \nabla u; u) & \text{dans } M \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi(x, u) & \text{sur } \partial M \end{cases} \tag{1}$$

tel que

$$\sup_{u \in \mathbb{B}} (\|u\|_\infty + \|\nabla u\|_\infty) \leq C_0. \tag{2}$$

Pour $u \in \mathbb{B}$, on pose

$$\Omega^2 = g'^{ij} g'^{ab} g'^{cd} (\nabla_{iac} u - g_{ac} \nabla_i u)(\nabla_{jbd} u - g_{bd} \nabla_j u).$$

Sous les hypothèses de la proposition 3:

1- il existe deux constantes positives k_1 et k_2 telles que, pour tout $u \in \mathbb{B}$, on ait:

$$\begin{aligned} &\triangle' \Omega^2 - 2g'^{ij} g'^{ab} g'^{cd} (\nabla_{iac} u - g_{ac} \nabla_i u) \nabla_{jbd} F \\ &\qquad + H^{iajbkcld} (\nabla_{iac} u - g_{ac} \nabla_i u)(\nabla_{jbd} u - g_{bd} \nabla_j u) \nabla_{kl} F \\ &\geq -k_1 (1 + \Omega^3) \end{aligned} \tag{3}$$

et

$$\triangle' \Omega^2 \geq -k_2 (1 + \Omega^3) + \left(\frac{\partial F}{\partial p^l} \nabla_l \Omega^2 \right). \tag{4}$$

Les composantes du tenseur H sont définies par

$$H^{iajbkcld} = g'^{ik} g'^{lj} g'^{ab} g'^{cd} + g'^{ij} g'^{ak} g'^{lb} g'^{cd} + g'^{ij} g'^{ab} g'^{ck} g'^{ld}.$$

Notons par K_1 le compact $\partial M \times [-C_0, C_0]$ et K_2 le compact constitué des $(x, p; t) \in TM \times [-C_0, C_0]$ tels que $\|p\| \leq C_0$, la constante k_1 est fonction de C_0, la géométrie de (M, g), un majorant sur K_1 des dérivées partielles d'ordre ≤ 3 de φ ainsi que d'un majorant sur K_2 des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de F; k_2 dépend en outre de $\|F\|_{C^3(K_2)}$.

2- Pour tout compact $K \subset M$, $\mathbb{B}$ est borné dans $C^{2,\alpha}(K)$ pour tout $\alpha \in]0, 1[$.

Démonstration Soit $u \in \mathbb{B}$. Tenons compte des propositions 2 et 3, les hypothèses de la proposition impliquent l'existence de constantes positives C_1, C_1' et b telles que

$$0 < C_1 \leq -nu + \triangle u \leq C_1' \quad \text{et} \quad b^{-1} g \leq g'(u) \leq bg. \tag{5}$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

L'inégalité (3) se démontre par l'apport d'une modification convenable des calculs de Calabi [2, p. 113], voir aussi Pogorelov [5, p. 39]. Le développement des termes en F dans (3) permet d'établir (4).

Pour prouver l'autre partie de la proposition, on va établir, par récurrence, l'existence d'une constante positive C_2 telle que pour tout entier p, on ait

$$\left[\int r^{2p}\Omega^p \, dV\right]^{1/p} \leq C_2, \tag{6}$$

où r est la fonction définissante de M et dV est l'élément de volume associé à la métrique g. En conséquence, pour tout compact $K \subset M$ et tout entier p; $\|u\|_{H_3^p(K)} \leq C_3$. Ainsi, pour tout $\alpha \in\,]0,1[$, si on choisit $p \geq \frac{3n}{1-\alpha}$, l'inclusion continue $H_3^p(K) \subset C^{2,\alpha}(K)$ montre alors que $\mathbb{B}$ est borné dans $C^{2,\alpha}(K)$.

Montrons donc (6) quand $p = 1$. Par dérivations covariantes successives de l'équation (1) satisfaite par u et permutations de l'ordre des dérivées, compte tenu de la relation (6) de la preuve du lemme 1, on montre que

$$\begin{aligned} g^{ij}g'^{ka}g'^{bl}\nabla_i(\nabla_{kb}u - ug_{kb})\nabla_j(\nabla_{al}u - ug_{al}) \\ = g'^{kl}g^{ij}\nabla_{kl}(-ug_{ij} + \nabla_{ij}u) - \triangle F + E, \end{aligned} \tag{7}$$

où E est un terme déjà estimé et est donné par l'expression suivante:

$$\begin{aligned} E = g'^{kl}g^{ij}[R^a_{lkj}\nabla_{ia}u + R^a_{jki}\nabla_{la}u + R^a_{lki}\nabla_{ja}u + R^a_{jli}\nabla_{ka}u + (\nabla_i R^a_{lkj} + \nabla_k R^a_{jli})\nabla_a u] \\ - (-nu + \triangle u)g'^{kl}g_{kl} + n^2. \end{aligned}$$

D'autre part, un simple calcul montre que

$$\nabla_k[g'^{kl}N(u)] = N(u)g'^{ka}g'^{bl}(g_{ab}\nabla_k u - g_{ka}\nabla_b u - R^c_{abk}\nabla_c u).$$

Multiplions, donc, (7) par $r^2N(u)$ et intégrons par parties sur M, il vient

$$\begin{aligned} \int r^2 g^{ij}g'^{ka}g'^{bl}(\nabla_{ikb}u - g_{kb}\nabla_i u)(\nabla_{jal}u - g_{al}\nabla_j u)N(u)\, dV \\ = \int [(E - \triangle F) + g'^{kl}S_k\nabla_l(-nu + \triangle u)]r^2 N(u)\, dV \\ - 2\int g'^{kl}\nabla_k r\nabla_l(-nu + \triangle u)rN(u)\, dV, \end{aligned} \tag{8}$$

où l'on a noté par S le tenseur covariant dont les composantes sont définies par

$$S_k = g'^{ab}(g_{ab}\nabla_k u - g_{kb}\nabla_a u + R^c_{bka}\nabla_c u).$$

Du développement de $\triangle F$ et l'équivalence des métriques g et g', (5), l'inégalité de Cauchy implique, pour tout $\epsilon > 0$ assez grand,

$$|(E - \triangle F) + g'^{kl}S_k\nabla_l(-nu + \triangle u)]r^2| \leq C_3[\epsilon + \epsilon^{-1}r^2|\nabla'(-nu + \triangle u)|^2]$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

et

$$|rg'^{kl}\nabla^k r\nabla_l(-nu+\triangle u)| \le C_4[\epsilon+\epsilon^{-1}r^2|\nabla'(-nu+\triangle u)|^2],$$

où C_4 n'est fonction que de $\|\nabla r\|_\infty$, la constante C_3 dépend de $\|\mathcal{R}\|_\infty$, $\|\nabla\mathcal{R}\|_\infty$, $\|r\|_\infty$, $\|\nabla r\|_\infty$, un majorant des dérivées partielles d'ordre ≤ 2 de F sur K_2 ainsi que d'une estimée C^2 de u.

Reportons ces deux dernières inégalités dans (8), compte tenu de (5) et en notant $C_5 = C_3 + C_4$, il vient

$$(9) \qquad b^{-1}\int r^2\Omega^2 N(u)\,dV \le C_5\int[\epsilon+\epsilon^{-1}r^2|\nabla'(-nu+\triangle u)|^2]N(u)\,dV.$$

À présent remarquons que d'une part, en développant le carré positif suivant:

$$g'^{ij}g^{ab}g^{cd}\left[\nabla_{iac}u - g_{ac}\nabla_i u - \frac{1}{n}g_{ac}\nabla_i(-nu+\triangle u)\right] \times\left[\nabla_{jbd}u - g_{bd}\nabla_j u - \frac{1}{n}g_{bd}\nabla_j(-nu+\triangle u)\right]$$

on voit que

$$(10) \qquad |\nabla'(-nu+\triangle u)|^2 \le nb^3\Omega^2.$$

D'autre part l'estimée (5) implique que

$$(11) \qquad 0 < \delta^{-1} \le N(u) \le \delta.$$

Ainsi, en fixant $\epsilon \ge 2nC_5\delta^2 b^4$ et compte tenu de (10) et (11), l'inégalité (9) implique que

$$\int r^2\Omega^2\,dV \le 2C_5\delta^2 bV\epsilon.$$

L'inégalité (6) quand $p=1$ ou $p=2$ s'en déduit en remarquant, dans le premier cas, que

$$\int r^2\Omega\,dV \le \int r^2(1+\Omega^2)\,dV$$

et dans l'autre, on écrit que

$$\int r^4\Omega^2\,dV \le (\max_M r^2)\int r^2\Omega^2\,dV.$$

Soit $p \ge 3$ un entier tel que la relation (6) soit satisfaite pour tout entier $q \le p$. Montrons qu'elle l'est encore pour $p+1$.

Notons $\Gamma = \Omega + k(-nu+\triangle u)$, où k un réel strictement positif précisé ultérieurement. La relation $\triangle'\Omega^2 = 2\Omega\triangle'\Omega - 2|\nabla'\Omega|^2$, jointe aux relations (4) et (7) implique l'existence de constantes positives C_6 et C_7 telles que

$$(12) \qquad 2\Omega\triangle'\Gamma \ge -C_6 + C_7(k-1)\Omega^3 + 2|\nabla'\Omega|^2 + 2\Omega\frac{\partial F}{\partial p^a}\nabla_a\Gamma.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

De la définition de Γ, l'équivalence des métriques donnée par (5) et l'inégalité (10), on vérifie que

$$2\Omega\left|\frac{\partial F}{\partial p^a}\nabla_a\Gamma\right| \leq \frac{1}{2}|\nabla'\Omega|^2 + C_8 k\Omega^2.$$

Reportons dans (12), il vient

$$2\Omega \triangle' \Gamma \geq -C_6 + C_7(k-1)\Omega^3 + \frac{3}{2}|\nabla'\Omega|^2 - C_8 k\Omega^2.$$

D'autre part, d'après Cauchy,

$$\frac{3}{2}|\nabla'\Omega|^2 \geq |\nabla'\Gamma|^2 - 3k^2|\nabla'(-nu + \triangle u)|^2.$$

Fixons $k = 4 + (C_7)^{-1}(1 + 3nb^2 + C_8)$ et utilisons à nouveau (10), il vient

$$2\Omega \triangle' \Gamma \geq -C_9 + \Gamma^3 + |\nabla'\Gamma|^2.$$

Multiplions cette inégalité par $r^{2p+2}\Gamma^{p-2}N(u)$ et intégrons par parties sur M, compte tenu de la définition de Γ, on obtient

$$\begin{aligned}\int r^{2p+2}\Gamma^{p+1}N(u)\,dV &\leq C_9\int r^{2p+2}\Gamma^{p-2}N(u)\,dV \\ &\quad - 3\int r^{2p+2}\Gamma^{p-2}|\nabla'\Gamma|^2N(u)\,dV + 2\sum_{i=1}^{4} I_i,\end{aligned} \tag{13}$$

où

$$I_1 = -(p-2)\int r^{2p+2}\Omega\Gamma^{p-3}|\nabla'\Gamma|^2N(u)\,dV$$

$$I_2 = \int r^{2p+2}\Gamma^{p-2}g'^{ij}\nabla_i\Gamma[\Omega S_j + k\nabla_j(-nu + \triangle u)]N(u)\,dV$$

$$I_3 = (2p+2)k\int r^{2p+1}\Gamma^{p-2}(-nu + \triangle u)g'^{ij}\nabla_i\Gamma\nabla_j rN(u)\,dV$$

et

$$I_4 = -(2p+2)\int r^{2p+1}\Gamma^{p-1}g'^{ij}\nabla_i\Gamma\nabla_j rN(u)\,dV.$$

D'après (10) et l'inégalité de Cauchy, on peut écrire:

$$|g'^{ij}\nabla_i\Gamma[\Omega S_j + k\nabla_j(-nu + \triangle u)]| \leq |\nabla'\Gamma|^2 + C_{10}\Omega^2$$

et

$$|(2p+2)kr(-nu + \triangle u)g'^{ij}\nabla_i\Gamma\nabla_j r| \leq r^2|\nabla'\Gamma|^2 + C_{11}(p).$$

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press

Reportons ces deux inégalités dans (13), compte tenu des faits que $I_1 \leq 0$ et $0 \leq \Omega \leq \Gamma$, il vient

$$\int r^{2p+2}\Gamma^{p+1}N(u)\,dV \leq C_{12}\int(1+\Gamma^2)r^{2p}\Gamma^{p-2}N(u)\,dV + 2I_4. \tag{14}$$

Pour étudier le terme I_4, on intègre à nouveau par parties sur M, on obtient

$$pI_4 = (2p+2)\int r^{2p}\Gamma^p[(2p+1)|\nabla' r|^2 + rg'^{ij}\nabla_i rS_j]N(u)\,dV$$
$$+ (2p+2)\int r^{2p+1}\Gamma^p \triangle' rN(u)\,dV.$$

Le second terme du membre de droite de cette égalité est négatif et le premier est majoré par $Cste\int r^{2p}\Gamma^p N(u)\,dV$. Le résultat découle de (14) en tenant compte de l'éstimée (11) et l'hypothèse de récurrence.

Nous venons d'apprendre par le rapporteur qu'une autre approche du problème de Neumann a été développée par J. Urbas dans [7].

Références

[1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions.* Comm. Pure Appl. Math. **12**(1959), 623–727.

[2] E. Calabi, *Improper affine hyperspheres and a generalisation of a theorem of K. Jörgens.* Michigan Math. J. **5**(1958), 105–126.

[3] N. V. Krylov, *Boundedly unhomogenous elliptic and parabolic equations in a domain.* Math. USSR-Izv. (1) **22**(1984), 67–97.

[4] P. L. Lions, N. S. Trudinger and J. I. E. Urbas, *The Neumann problem for equations of Monge-Ampère type.* Comm. Pure Appl. Math. **39**(1986), 539–563.

[5] A. V. Pogorelov, *The Minkowski multidimensional Problem.* Translated by V. Oliker. Winston and Sons, 1978.

[6] W. P. Ziemer, *Mean values of subsolutions of elliptic and parabolic equations.* Trans. Amer. Math. Soc. **279**(1983), 555–568.

[7] J. Urbas, *Oblique boundary value problems for equations of Monge-Ampère type.* Calc. Var. Partial Differential Equations **7**(1998), 19–39.

Université de Lille 1
UFR de Mathématiques
59655 Villeneuve d'Ascq
FRANCE
email: hanani@agat.univ-lille1.fr

https://doi.org/10.4153/CJM-2000-032-1 Published online by Cambridge University Press