Canad. Math. Bull. Vol. **18** (5), 1975

RECIPROQUE DU THEOREME DES BASES SUR UN ESPACE VECTORIEL

PAR
RAYMOND COUTURE ET MARIO LAVOIE

SOMMAIRE. Nous donnons, dans ce qui suit, la preuve de la proposition suivante.

THEOREME. *Si A est un anneau tel que tout A-pseudomodule soit libre, alors A est un corps, non nécessairement commutatif.*

NOTE. Un A-module M est un groupe abélien M et un homomorphisme unitaire $A \to \mathrm{End}(M)$, A étant un anneau unitaire. Si l'homomorphisme $A \to \mathrm{End}(M)$ n'est pas unitaire, on dira que l'on a un A-pseudomodule, A n'étant pas nécessairement unitaire. Remarquons qu'une grande partie de la théorie des pseudomodules se ramène à la théorie des modules, en considérant pour un A-pseudomodule, le A'-module associé, A' étant l'anneau unitaire associé à A. On obtient alors des propositions du type suivant:

N est un sous-A-pseudomodule de M ssi N est un sous-A'-module de M; il en est de même pour les quotient, somme directe, produit direct, limites inductive et projective, etc.... Bourbaki [1].

NOTATION. Dans ce qui suit, nous dirons qu'un anneau ou qu'un pseudomodule est simple (resp. semi-simple) si le groupe abélien sous-jacent est simple (resp. semi-simple).

Nous noterons de plus, A_s l'anneau A considéré comme A-pseudomodule à gauche.

PROPOSITION 1. *Soit A un anneau tel que tout A-pseudomodule est libre. Si M est un A-pseudomodule, alors tous ses sous-A-pseudomodules sont facteurs directs et $A \neq 0$.*

Preuve. Si N est un sous-A-pseudomodule de M, on a la suite exacte $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ et puisque M/N est libre, il est projectif et la suite exacte est scindée. Donc N est facteur direct de M. ∇

PROPOSITION 2. *Un A-pseudomodule M, tel que tous ses sous-A-pseudomodules soient facteurs directs, est semi-simple (et inversement).*

Preuve. Cette proposition résulte de la note ci-haut et de Bourbaki [2]. ∇

PROPOSITION 3. *Si M est un A-pseudomodule libre, simple et non nul tel que A_s soit simple, alors M est de dimension 1 et tout élément non nul de M est une base de M.*

https://doi.org/10.4153/CMB-1975-129-3 Published online by Cambridge University Press

Preuve. Soient B une base de M et a un élément non nul de M. On a que $Aa\neq 0$, car sinon

$$N = \{u \in M : xu = 0, \text{ pour tout } x \in A\}$$

serait un sous-A-pseudomodule non nul de M, i.e. $N=M$, puisque M est simple, ce qui entrainerait que $M=0$, puisque $B\subset N$. On a donc $Aa=M$, puisque M est simple, et a est un générateur. D'autre part, a est libre, car sinon

$$\mathscr{I} = \{x \in A : xa = 0\}$$

serait un idéal à gauche, non nul de A, i.e. $\mathscr{I}=A$, puisque A_s est simple, et $0=Aa=M$, ce qui est impossible. Donc a est une base de M. ∇

PROPOSITION 4. *Si A est un anneau semi-simple tel que tout idéal à gauche de A soit un A-pseudomodule libre, alors A_s est simple.*

Preuve. Par hypothèse, on a $A=\bigoplus_{i\in I}\mathscr{A}_i$, avec $\mathscr{A}_i$ des idéaux à gauche simples. Si $\mathscr{A}_i\neq 0$, $\mathscr{A}_i$ est de dimension 1 par la proposition 3. Supposons, pour obtenir une contradiction, que $\mathscr{A}_i$ et $\mathscr{A}_j$ sont non nuls pour $i\neq j$. Soient b_i et b_j leurs bases respectives. Considérons maintenant un k tel que $\mathscr{A}_k$ est non nul et possède une base b_k. On a alors, $b_kb_j\neq 0$, sinon $b_k=0$, puisque b_j est une base de $\mathscr{A}_j$. D'autre part $\mathscr{A}_kb_j\subset\mathscr{A}_j$, et est un idéal à gauche non nul de $\mathscr{A}_j$ contenant b_kb_j; donc $\mathscr{A}_kb_j=\mathscr{A}_j$, puisque $\mathscr{A}_j$ est simple, et $b_j=x_kb_j$, où $x_k\in\mathscr{A}_k$. Or k peut prendre, au moins, deux valeurs i.e. i et j, et puisque x_k est indépendant de k, b_j étant une base de $\mathscr{A}_j$, on a $x_k\in\mathscr{A}_j\cap\mathscr{A}_i=0$, et $b_j=0$, ce qui est impossible. On a donc, dans la décomposition de A, au plus un idéal à gauche, non nul et simple. ∇

COROLLAIRE 1. *Si A est un anneau semi-simple, non nul, tel que tout idéal à gauche de A soit un A-pseudomodule libre, alors A_s est libre de dimension* 1 *et a pour base un élément non nul quelconque.*

Preuve. Résulte des propostions 3 et 4. ∇

PROPOSITION 5. *Si A est un A-pseudomodule à gauche, libre de dimension* 1, *ayant pour base un élément non nul quelconque, alors A^* est un demi-groupe tel que l'équation*

$$b = xa, \qquad a, b \in A^*,$$

ait une unique solution $x\in A^*$, et tel que l'équation

$$b = ax, \qquad a, b \in A^*,$$

ait au plus une solution dans A^*.

Preuve. Disons d'abord que A est intègre i.e. A^* est un demi-groupe, puisque $a\neq 0$ et $ba=0$ entraîne $b=0$. De même, si $a, b\in A^*$, a est une base de A_s et l'équation

$$b = xa$$

possède exactement une solution dans A^*. D'autre part, pour a, $b \in A^*$, les équations

$$b = ax \quad \text{et} \quad b = ax', \qquad x, x' \in A^*,$$

donnent $0=a(x-x')$ et $x=x'$, puisque A est intègre. On obtient ainsi l'unicité de la solution de l'équation

$$b = ax, \qquad a, b \in A^* \cdot \quad \nabla$$

PROPOSITION 6. *Un demi-groupe G tel que l'équation*

$$b = xa, \qquad b, a \in G,$$

possède une unique solution dans G, et tel que l'équation

$$b = ax, \qquad a, b \in G,$$

ait au plus une solution dans G, est un groupe.

Preuve. Prenons un $a \in G$; par hypothèse il existe un seul e_a tel que $a=e_a a$. Or $xa=xe_a a$, et $x=xe_a$ pour tout $x \in G$ i.e. e_a est une unité à droite de G. Prenons maintenant un $b \in G$, avec e_b une unité à droite, i.e. $xe_b=x=xe_a$, d'où $e_a=e_b$ et e_a est une unité à gauche de G. e_a est donc l'unité de G, que l'on note e. D'autre part l'équation $e=ya$ possède une unique solution, noté a^{-1}. Alors $a^{-1}a=e$ et $(aa^{-1})a=a(a^{-1}a)=ae=a=ea$; d'où $aa^{-1}=e$ et G est un groupe. ∇

COROLLAIRE 2. *Si A est un A-pseudomodule à gauche, libre de dimension* 1 *ayant pour base un élément non nul quelconque, alors A est un corps.*

Preuve. Résulte des propositions 5 et 6. ∇

COROLLAIRE 3. *Si A est un anneau semi-simple, non nul tel que tout idéal à gauche de A soit un A-pseudomodule libre, alors A est un corps.*

Preuve. Résulte des corollaires 1 et 2. ∇

Preuve du Theoreme. Pour un anneau A satisfaisant l'hypothèse du théorème, on applique les propositions 1 et 2 avec $M=A_s$ et on obtient que A_s est non nul et semi-simple. Comme d'autre part tout idéal à gauche de A est libre, A est un corps, par le corollaire 3. ∇

BIBLIOGRAPHIE

1. N. Bourbaki, Eléments de mathématique, livre II, chapitre 2, troisième édition, appendice, A.S.I., Hermann, Paris.

2. N. Bourbaki, Eléments de mathématique, livre II, chapitre 8, §3, no. 1 et 3, A.S.I., Hermann, Paris.

UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

UNIVERSITÉ DU QUÉBEC À RIMOUSKI