CORRESPONDANCES ENTRE UNE THEORIE GENERALE PLANETAIRE EN VARIABLES ELLIPTIQUES ET LA THEORIE CLASSIQUE DE LE VERRIER

L. DURIEZ
Université des Sciences et Techniques de Lille (France)

ABSTRACT. In order to improve the determination of the mixed terms in classical theories, we show how these terms may be derived from a general theory developed with the same variables (of a keplerian nature). We find that the general theory of the first order in the masses already allows us to develop the mixed terms which appear at the second order in the classical theory. We also show that a part of the constant perturbation of the semi-major axis introduced in the classical theory is present in the general theory as very long-period terms; by developing these terms in powers of time, they would be equivalent to the appearance of very small secular terms (in t, t^2, ...) in the perturbation of the semi-major axes from the second order in the masses. The short period terms of the classical theory are found the same in the general theory, but without the numerical substitution of the values of the variables.

INTRODUCTION

Les résultats récents obtenus par Bretagnon et Simon (1976) lors de la comparaison de leur théorie planétaire de type classique (amélioration de celle de Le Verrier), avec une intégration numérique sur 1000 ans (type A.P.A.E.) montrent schématiquement que la précision atteinte sur les perturbations à courtes périodes des éléments elliptiques est très satisfaisante; par contre, il subsiste encore des écarts lentement variables avec le temps et importants vis à vis de la précision atteinte sur les termes à courtes périodes. Ces écarts peuvent être réduits notablement en ajoutant à la théorie certains termes séculaires et mixtes empiriques. D'ailleurs, les termes mixtes ainsi introduits ne sont relatifs qu'à certains termes à longues périodes (par exemple il s'agit du terme $2\lambda_J-5\lambda_S$ dans le cas de Jupiter ou de Saturne).

Dans le but d'améliorer la connaissance de ces quelques termes mixtes, nous avons cherché à les mettre en évidence à partir d'une théorie générale développée avec les mêmes variables que la théorie classique. En procédant ainsi, nous verrons que pour obtenir ces termes, la théorie générale a besoin d'être poussée à un ordre des masses moins élevé que la théorie classique. Nous avons également mis en évidence le

V. Szebehely (ed.), Dynamics of Planets and Satellites and Theories of Their Motion, 15-32.

https://doi.org/10.1017/S0252921100062072 Published online by Cambridge University Press

fait qu'une partie de la perturbation constante du demi-grand axe (celle qui dépend des excentricités et des inclinaisons) se retrouve dans la théorie générale sous forme de termes à très longues périodes; nous verrons que le développement de ces termes au voisinage d'un instany initial serait équivalent à l'apparition dans la théorie classique, d'un terme séculaire en t à l'ordre deux des masses dans la perturbation du demi-grand axe.

On utilise les notations suivantes:
k la constante de gravitation, $m_0 = 1$ la masse du Solei, m la masse d'une planète, puis les éléments osculateurs héliocentrique de cette planète à un instant τ, rapportés à un repère héliocentrique de direction fixe: a le demi-grand axe, e l'excentricité, i l'inclinaison, l la longitude moyenne de l'époque, $\bar{\omega}$ la longitude du périhélie, Ω celle du noeud.

On note encore:

$$n = \sqrt{k(1+m)}\ a^{-3/2} \qquad \text{le moyen mouvement}$$

$$\lambda = n(t-\tau) + l \qquad \text{la longitude moyenne à l'instant t}$$

$$z = e \exp \sqrt{-1}\ \bar{\omega} \qquad \text{et } \bar{z} \text{ son conjugué}$$

$$\zeta = \sin \frac{i}{2} \exp \sqrt{-1}\ \Omega \qquad \text{et } \bar{\zeta} \text{ son conjugué}$$

La théorie générale et la théorie classique partent l'une et l'autre des mêmes équations (de Lagrange), écrites ainsi pour une planète d'indice i perturbée par une planète d'indice j:

$$\frac{1}{a_i}\frac{da_i}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(1)} \qquad \frac{dl_i}{dt} = \frac{d\lambda_i}{dt} - n_i = \mu\mathcal{L}_{ij}^{(2)}$$

$$\frac{dz_i}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(3)} \qquad \frac{d\bar{z}_i}{dt} = \mu\overline{\mathcal{L}_{ij}^{(3)}} \tag{1}$$

avec:

$$\frac{d\zeta_i}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(4)} \qquad \frac{d\bar{\zeta}_i}{dt} = \mu\,\bar{\mathcal{L}}_{ij}^{(4)}$$

$$m_j = \mu\varepsilon_j$$

$$\mathcal{L}_{ij}^{(e)} = \sqrt{-1}\,\frac{n_i}{1+m_i}\,\varepsilon_j \sum_{k_i,k_j} L_{k_i,k_j}^{(e)}(a_i,a_j,z_i,z_j,\bar{z}_i,\bar{z}_j,\zeta_i,\zeta_j,\bar{\zeta}_i,\bar{\zeta}_j)\exp\sqrt{-1}(k_i\lambda_i + k_j\lambda_j) \tag{2}$$

où $L_{k_i,k_j}^{(e)}$ est une fonction de $\alpha = \dfrac{\min(a_i,a_j)}{\max(a_i,a_j)}$, développable en série entière de z_i, z_j, $\bar{z}_i$, $\bar{z}_j$, ζ_i, ζ_j, $\bar{\zeta}_i$, $\bar{\zeta}_j$; k_i et k_j sont des entiers realtifs. (cf. Duriez, 1976).

Chacune des théories représente une solution des équations (1), obtenue par approximations successives sous forme d'un développement ordonné suivant les puissances croissantes des masses, c'est à dire encore suivant les puissances de μ. Pour bien mettre en évidence les différences et aussi les relations existant entre les deux théories, et pour introduire les notations, rappelons d'abord brièvement les principales caractéristiques de la théorie classiques; nous verrons ensuite comment cette théorie peut être "généralisée".

LA THEORIE CLASSIQUE

Elle consiste principalement à développer les seconds membres des équations (1) en séries de Taylor par rapport aux 6 éléments osculateurs de chaque planète, au voisinage d'un instant initial fixé $\tau=\tau_0$. La première approximation (ordre zéro en μ) est alors le mouvement képlérien, avec les valeurs numériques des éléments osculateurs à cet instant: a_{i_0}, l_{i_0}, z_{i_0}, $\bar{z}_{i_0}$, ζ_{i_0}, $\bar{\zeta}_{i_0}$ et avec n_{i_0} calculé par la 3eme loi de Kepler:

$$n_{i_0}^2 \, a_{i_0}^3 = k\,(1+m_i).$$

On recherche ensuite une solution de la forme:

$$\begin{aligned}
a_i &= a_{i_0} + \mu\Delta_1 a_i + \mu^2\Delta_2 a_i + \ldots.\\
l_i &= l_{i_0} + \mu\Delta_1 l_i + \mu^2\Delta_2 l_i + \ldots.\\
z_i &= z_{i_0} + \mu\Delta_1 z_i + \mu^2\Delta_2 z_i + \ldots.\\
\zeta_i &= \zeta_{i_0} + \mu\Delta_1 \zeta_i + \mu^2\Delta_2 \;\, {}_i + \ldots.
\end{aligned} \tag{3}$$

Pour cela, on identifie les termes de même ordre en μ dans la dérivée des expressions (3), et dans le développement de Taylor de la relation (2):

$$\mu\mathcal{L}_{ij}^{(e)} = \mu[\mathcal{L}_{ij}^{(e)}]_0 + \mu^2 \sum_{k=i \text{ et } j} \{\Delta_1 a_k \left[\frac{\partial\mathcal{L}_{ij}^{(e)}}{\partial a_k}\right]_0 + \Delta_1 l_k \left[\frac{\partial\mathcal{L}_{ij}^{(e)}}{\partial l_k}\right]_0$$

$$+ \Delta_1 z_k \left[\frac{\partial\mathcal{L}_{ij}^{(e)}}{\partial z_k}\right]_0 + \Delta_1 \bar{z}_k \left[\frac{\partial\mathcal{L}_{ij}^{(e)}}{\partial \bar{z}_k}\right]_0 + \Delta_1 \zeta_k \left[\frac{\partial\mathcal{L}_{ij}^{(e)}}{\partial \zeta_k}\right]_0 + \Delta_1 \bar{\zeta}_k \left[\frac{\partial\mathcal{L}_{ij}^{(e)}}{\partial \bar{\zeta}_k}\right]_0\} + \ldots. \tag{4}$$

où la notation $[\ldots]_0$ signifie que $\mathcal{L}_{ij}^{(e)}$ et ses dérivées partielles sont calculées numériquement pour la valeur des éléments osculateurs à l'instant τ_0; ce sont ainsi des développements de la forme:

$$\mu \sum_{k_i, k_j} A_{k_i,k_j}^{(e)} \exp \sqrt{-1}\,(k_i n_{i_0} + k_j \lambda_{j_0}) \tag{5}$$

https://doi.org/10.1017/S0252921100062072 Published online by Cambridge University Press

où $A^{(e)}_{k_i k_j}$ est une constante numérique, et où λ_{i_0} et λ_{j_0} sont de la forme d'une fonction connue du temps:

$$\lambda_{i_0} = n_{i_0}(t - \tau_0) + l_{i_0}. \tag{6}$$

On sait qu'à l'ordre 1 en μ, $\mu[\mathcal{L}^{(e)}_{ij}]_0$ contient un terme constant: $\mu A^{(e)}_{00}$, nul pour e=1, qui par intégration donne un terme séculaire linéaire en t (noté suivant le cas $\mu\Delta_1^{(s)} l_i$, $\mu\Delta_1^{(s)} z_i$, $\mu\Delta_1^{(s)} \zeta_i$), tandis que les autres termes donnent des termes périodiques qu'on note: $\mu\Delta_1^{(p)} a_i$ $\mu\Delta_1^{(p)} l_i$, $\mu\Delta_1^{(p)} z_i$ et $\mu\Delta_1^{(p)} \zeta_i$.

On remarque l'absence de terme séculaire par les a_i et les n_i. D'un point de vue analytique, $\Delta_1^{(s)} l_i$ admet un développement pair par rapport aux excentricités et aux inclinaisons commençant au degré zéro, tandis que $\Delta_1^{(s)} z_i$ et $\Delta_1^{(s)} \zeta_i$ admettent des développements impairs de ces variables commençant au degré 1.

A l'ordre 2, on doit effectuer dans le développement (4), le produit de la solution du 1er ordre avec les dérivées partielles de $\mathcal{L}^{(e)}_{ij}$: le terme constant de ces dérivées partielles se combine à l'éventuel terme séculaire du 1er ordre pour donner par intégration un terme en t^2, et aux inégalités périodiques du 1er ordre pour donner de nouvelles inégalités périodiques de même période. Ensuite, chaque terme périodique des dérivées partielles se combine d'une part au terme séculaire du 1er ordre pour donner après intégration un terme mixte en t exp $\sqrt{-1}(k_i\lambda_{i_0} + k_j\lambda_{j_0})$ et une inégalité périodique de même période; il se combine d'autre part avec les inégalités périodiques du 1er ordre pour donner des inégalités périodiques avec de nouvelles périodes, dont éventuellement un terme constant qui donne par intégration un terme séculaire en t d'ordre 2 des masses.

A cet ordre, les éléments a_i et n_i ne possèdent toujours pas de terme séculaire en t et t^2, mais comportent des termes mixtes (théorème de Poisson).

Aux ordres supérieurs en μ, on obtient d'autres inégalités périodiques, ainsi que d'autres termes séculaires et mixtes, mais pour les a_i et n_i, le problème de la présence de termes séculaires est encore ouvert.

Ainsi, la théorie classique en variables elliptiques est surtout caractérisée par une certaine "stablité" des seuls éléments a_i et n_i (mis à part les termes mixtes). On peut cependant obtenir le même type de stabilité (absence de terme séculaire) pour les éléments l_i en utilisant dès l'ordre 1 en μ l'expression suivante à la place de (6):

$$\lambda_{i_0} = (n_{i_0} + \Delta^{(s)} l_i)\ (t - \tau_0) + l_{i_0} \tag{7}$$

où $\Delta^{(s)} l_i t$ représente le terme séculaire de la longitude moyenne de l'époque τ_0, qui ne doit alors plus figurer dans l'expression (3) de l_i. Pour cela, le terme constant de l'équation relative à l_i sert à former une perturbation constante dans le demi-grand axe. Dans ces conditions, $\Delta_1 a_k$ et $\Delta_1 l_k$ étant dépourvus de termes séculaires, les termes mixtes ne peuvent provenir à l'ordre 2 en μ que des termes séculaires de $\Delta_1 z_k$, $\Delta_1 \bar{z}_k$, $\Delta_1 \zeta_k$ et $\Delta_1 \bar{\zeta}_k$. En particulier, les termes mixtes qui apparaissent dans l'expression des a_i et des l_i sont uniquement introduits par les termes séculaires qui existent pour les autres éléments. Le but principal de la théorie générale est justement d'introduire à la place de ces termes séculaires, des termes à très longues périodes, avec comme conséquence la suppression des termes mixtes.

Remarque: En utilisant l'expression (7) de λ_{i_0}, la solution n'est plus exactement ordonnée suivant les puissances de μ, mais on a l'avantage de bien connaitre dès le départ la valeur de la somme $n_{i_0} + \Delta^{(s)} l_i$, sensiblement égale à la valeur moyenne du moyen mouvement, fournie par les observations sur une durée suffisamment longue. On verra plus loin la signification de ce moyen mouvement à propos de la théorie générale.

Par ailleurs, à chaque ordre en μ, on fait généralement une comparaison de la théorie obtenue avec les observations; ceci conduit à modifier progressivement les constantes d'intégration initiales, pour passer finalement des éléments osculateurs à l'instant τ_0 aux éléments moyens pour cet instant. Ces éléments moyens sont ainsi relatifs à la théorie qui les a produits.

LA THEORIE GENERALE.

1. Préliminaires

Contrairement à la théorie classique, on s'efforce d'obtenir maintenant une solution bornée aux équations (1), sous forme de fonctions quasi-périodiques de t. L'existence d'une telle solution a été démonstrée par Jefferys et Moser (1966) et par Krasinsky (1969); Brumberg (1970), puis Brumberg et Chapront (1973) ont donné un algorithme pratique pour obtenir une telle solution au problème planétaire; Sagnier (1973) l'a aussi appliqué au problème des satellites galiléens de Jupiter.

Dans ce type de méthode, on s'efforce d'obtenir la solution analytiquement sous la forme la plus générale possible. Les théories déjà construites montrent que moyennant l'introduction pour chaque planète d'une quantité qui a la nature d'un moyen mouvement moyen, on peut exprimer la solution sous forme quasi-périodique de t; ceci permet de supposer qu'il existe pour chaque planète un certain moyen mouvement moyen N_i, constant, indépendant de tout instant initial, et tel qu'on puisse écrire:

$$\eta_i = N_i(1 + p_i) \tag{8}$$

$$\lambda_i = N_i(t - \tau_0) + L_{i_0} + q_i \tag{9}$$

https://doi.org/10.1017/S0252921100062072 Published online by Cambridge University Press

où p_i et q_i sont des nouvelles variables (remplaçant n_i (ou a_i) et l_i) qu'on pourra exprimer sans termes séculaires ni mixtes, sous forme quasi-périodique de t. Dans (9), L_{i0} est une constante dépendant de τ_0, qu'on peut laisser indéterminée avec τ_0 jusqu'à la comparaison de la théorie avec les observations.

En définissant pour chaque planète une autre quantité constante A_i par la relation:

$$N_i^2 A_i^3 = k(1 + m_i) = n_i^2 a_i^3 \tag{10}$$

on tire encore:

$$a_i = A_i(1 + p_i)^{-2/3} \tag{11}$$

et on peut alors remplacer les équations (1) relatives à a_i et l_i par les suivantes:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{3}{2}(1 + p_i)\frac{1}{a_i}\frac{da_i}{dt} = \mu\mathcal{L}_{ij}^{*(1)} \tag{12}$$

$$\frac{dq_i}{dt} = N_i p_i + \frac{dl_i}{dt} = N_i p_i + \mu\mathcal{L}_{ij}^{(2)}\,. \tag{13}$$

Le fait d'avoir explicité la constante L_{i0} dans l'expression (9) de λ_i permet de prendre nulle la constante d'intégration relative à la variable q_i.

Le fait de rechercher pour p_i et q_i des expressions quasi-périodiques de t, entraine que le terme constant de $\mu\mathcal{L}_{ij}^{(2)}$ dans (13) devra être éliminé par un choix convenable de la constante d'intégration introduite dans (12) pour la variable p_i.

Il n'y a donc plus d'arbitraire pour les variables p_i et q_i et on constate que dans ce cas, ces variables vont forcément contenir μ en factuer: ce sont donc des quantités d'ordre 1 au moins en μ. L'absence d'arbitraire des p_i et q_i revient encore à considérer les constantes N_i et L_{i0} déjà introduites, comme constantes d'intégration pour ces variables. De ce fait, il suffira de rechercher pour les équations relatives à ces variables, une solution particulière sans constante d'intégration.

Inversement, si on permit l'introduction d'une constante d'intégration arbitraire pour p_i (même une constante de l'ordre de μ), on ne peut empêcher l'apparition d'un terme séculaire sur q_i et la solution n'est plus quasi-périodique de t. Il faut noter cependant qu'une telle constante d'intégration reviendrait à modifier N_i.

Toutefois, alors que les constantes L_{i0} peuvent rester arbitraires tout au long de la théorie, il est indispensable de fixer numériquement dès le début les constantes N_i, ainsi que les A_i, par l'intermédiaire des constantes m_i, car les développements complétement analytiques par rapport aux a_i ou aux A_i seraient beaucoup trop volumineux; par ailleurs,

https://doi.org/10.1017/S0252921100062072 Published online by Cambridge University Press

pour l'intégration, il est préférable d'avoir les valeurs numériques des N_i à cause des particularités de la solution pouvant se produire pour des combinaisons presque nulles des N_i, qui amènent des petits diviseurs lors de l'intégration.

Dès lors se pose le problème du choix de la valeur de chaque constante N_i par rapport au moyen mouvement moyen tel qu'il est actuellement connu pour chaque planète. Jusqu'à présent, c'est principalement par les theóries classiques de Le Verrier et de Newcomb qu'on connait des valeurs du moyen mouvement moyen. Celles-ci résultent de la comparaison de leur théorie avec les observations dont ils disposaient, et il est certain que ces moyens mouvements moyens dépendent de l'instant initial τ_0 qu'ils ont choisi. En effet, ils sont de la forme $n_{i_0} + \Delta^{(s)} l_i$ déjà mentionnée en (7), et dans cette expression, le terme $\Delta^{(s)} l_i$ dépend de τ_0 car la partie constante de $\mu[\mathcal{L}_{ij}^{(2)}]_0$ dont il provient, est un développement en puissances de z et ζ de ζ dans lequel ces variables ont été remplacées par leur valeur numérique à l'instant τ_0. De même n_{i_0}, dépend de τ_0 car il est obtenu en retranchant du moyen mouvement moyen observé la partie séculaire de l_i qu'on aura calculée au préalable avec ce moyen mouvement moyen observé; par ailleurs la période pendant laquelle on dispose d'observations étant limitée, et la théorie étant inévitablement imparfaite surtout en ce qui concerne les termes de petit diviseur (qui sont aussi à longues périodes), l'absence ou la mauvaise connaissance de ces termes contribuent globalement à former des termes séculaires empiriques lors de la comparaison de la théorie avec les observations. Cette contribution empirique dépend encore de la date moyenne des observations, donc en quelque sorte d'un certain τ_0, et on ne sait pas la séparer de la partie du moyen mouvement moyen qui est indépendante de τ_0.

On peut penser cependant que cette partie empirique est très faible, eu égard à la qualité des travaux de Le Verrier et de Newcomb. En la négligeant, et en supposant donc que la dépendance du moyen mouvement moyen vis à vis de τ_0 découle principalement de celle de $\Delta^{(s)} l_i$, on voit que le meilleur choix qu'on puisse faire pour N_i consiste à prendre le moyen mouvement moyen obtenu par Le Verrier ou par Newcomb, auquel on retranche la partie de $\Delta^{(s)} l_i$ qui dépend des variables z et ζ dans leur théorie. Cela revient encore à ne conserver de $\Delta^{(s)} l_i$ que la partie qui ne dépend que des demi-grands axes, eux-mêmes calculés avec ces N_i.

On peut noter cependant que cette correction des moyens mouvements est au moins d'ordre 2 en excentricités et inclinaisons, et d'ordre 1 en masses; elle est donc assez minime (inférieure en pratique à $10^{-5} N_i$).

Avec ce choix des N_i, par analogie avec la théorie classique, on peut encore prévoir que la perturbation constante du demi-grand axe (liée à l'utilisation d'un moyen mouvement moyen au lieu d'un moyen mouvement osculateur) sera elle aussi indépendante des excentricités et des inclinaisons.

On voit ainsi la nécessité de posséder au départ une théorie classique la meilleure possible afin de déterminer au mieux les N_i qui sont à la base de toute théorie générale. Cependant, si avec les N_i ainsi choisis la comparaison de la théorie générale avec les observations ne peut être satisfasante qu'en ajoutant un terme séculaire empirique, on saura que c'est la valeur dont il faut modifier N_i pour le rendre indépendant de τ_0 et on pourra reprendre la théorie avec cette nouvelle valeur. D'ailleurs il n'y a pas que les N_i qui puissent être sujets à modification: les masses m_i interviennent aussi numériquement dans toute la théorie et une modification de celles-ci entraine une modification des N_i. Ceci justifie encore la nécessité de rendre la méthode de développement de la théorie générale aussi souple et adaptable que possible.

2. Méthode d'intégration

Nous envisageons de ne donner ici que les principes de la méthode, en insistant surtout sur la façon dont s'opère la "généralisation" de la théorie classique.

Nous partons donc toujours des équations (1), sauf en ce qui concerne les variables a_i et l_i, pour lesquelles on utilise les équations (12) et (13). On a cependant, à la place du développement (2) un nouveau développement:

$$\mathcal{L}_{ij}^{(e)} = \sqrt{-1}\,\frac{N_i}{1+m_i}\,\varepsilon_j \sum_{k_i,k_j} L_{k_i k_j}^{(e)}\,(A_i,A_j,p_i,p_j,q_i,q_j,z_i,z_j,\bar{z}_i,\bar{z}_j,\zeta_i,\zeta_j,\bar{\zeta}_i,\bar{\zeta}_j)\ \exp\sqrt{-1}(k_iL_i + k_jL_j) \tag{14}$$

où $L_{k_i k_j}^{(e)}$ est une fonction de $\alpha_0 = \dfrac{\min(A_i,\ A_j)}{\max(A_i,\ A_j)}$ développable en série entière des variables p_i, p_j, q_i, ... $\bar{\zeta}_j$, et où L_i et L_j désignent des expressions de la forme:

$$L_i = N_i(t - \tau_0) + L_{i_0}$$

(on a donc $\lambda_i = L_i + q_i$). On peut noter qu'en prenant à la place de z_i et ζ_i les variables x_i et y_i ainsi définies:

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{z}_i \exp\sqrt{-1}\,L_i \\ y_i &= \bar{\zeta}_i \exp\sqrt{-1}\,L_i \end{aligned} \tag{15}$$

on obtient des équations formellement semblables à celles de Brumberg:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sqrt{-1}\,N_i x_i + \mu\mathcal{E}_{ij}^{(3)}$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \sqrt{-1}\,N_i y_i + \mu\mathcal{E}_{ij}^{(4)}$$

en précisant bien ici que, contrairement à celles de Brumberg, $\mu\varepsilon_{ij}^{(e)}$ est au moins de l'ordre de μ. Avec les variables (15), la structure des développements en z et ζ permet d'obtenir à la place de (14) un développement plus simple:

$$\mathcal{L}_{ij}^{(e)} = \sqrt{-1}\,\frac{N_i}{1+m_i}\,\varepsilon_j \sum_k \mathcal{L}_k^{(e)}\,(A_i, A_j, p_i, p_j, q_i, q_j, x_i, x_j, \bar{x}_i, \bar{x}_j, y_i, y_j, \bar{y}_i, \bar{y}_j)\,\exp\sqrt{-1}\,k(L_i - L_j) \tag{16}$$

et un développement du même type pour $\mathcal{E}_{ij}^{(e)}$.

Cependant pour mieux indiquer comment on passe de la théorie classique à la théorie générale, on va plutôt continuer à utiliser le développement (14) en z et ζ, et les équations (1) pour ces variables.

Remarquons encore qu'à la place de (9), on pourrait utiliser $\lambda_i = L_i - \sqrt{-1}q_i$ où q_i est alors imaginaire pure permettant un développement plus maniable des fonctions $\exp\sqrt{-1}\,k_i\lambda_i$.

Le développement (14) contient quatre variables supplémentaires par rapport à (2): p_i, p_j, q_i et q_j. En fait, le développement de $L_{k_ik_j}^{(e)}$ par rapport a ces variables représente un développement de Taylor de $L_{k_ik_j}^{(e)}$ dans (2), au voisinage des valeurs A_i et A_j, et au voisinage des fonctions L_i et L_j. D'ailleurs, comme les variables p_i, p_j, q_i et q_j sont de l'ordre de μ au moins, la partie des développement de $\mu\mathcal{L}_{ij}^{(e)}$ qui les contient intéresse seulement la solution générale à partir de l'ordre 2 des masses.

On peut distinguer dans le développement de $\mathcal{L}_{ij}^{(e)}$ deux sortes de termes: d'une part ceux qui ne dépendent que des A_i, A_j et du temps, et d'autre part les autres termes qui dépendent en plus des variables p_i, p_j, q_i, q_j, z_i, z_j, $\bar{z}_i$, $\bar{z}_j$, ζ_i, ζ_j, $\bar{\zeta}_i$, $\bar{\zeta}_j$, qu'on regroupe dans un vecteur noté V. On regroupe également ces deux sortes de termes dans les notations: $\mathcal{L}_{ij}^{(e)}(t)$ et $\mathcal{L}_{ij}^{(e)}(V,t)$. Les équations ont alors la forme suivante:

$$\frac{dp_i}{dt} - \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{*(1)}(V,t) = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{*(1)}(t) \tag{17}$$

$$\frac{dq_i}{dt} - N_i p_i - \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(2)}(V,t) = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(2)}(t) \tag{18}$$

$$\frac{dz_i}{dt} - \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(3)}(V,t) = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(3)}(t) \tag{19}$$

$$\frac{d\zeta_i}{dt} - \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(4)}(V,t) = 0 \tag{20}$$

On rappelle cependant que $\mathcal{L}_{ij}^{(2)}(t)$ contient un terme indépendant de t (constant), tandis que $\mathcal{L}_{ij}^{(1)}(t)$ et $\mathcal{L}_{ij}^{(3)}(t)$ en sont dépourvus.

Les seconds membres étant des fonctions connues du temps, on a ainsi

https://doi.org/10.1017/S0252921100062072 Published online by Cambridge University Press

un système différentiel dit "avec second membre". On sait que la solution générale du s tel système est la somme de la solution générale du système "sans second membre", et d'une solution particulière du système complet (appelée orbite intermédiaire dans la m'thode de Brumberg). En notant la solution particulière par le symbole δ, on aura ainsi:

$$\begin{aligned} p_i &= p_i^{(0)} + \delta p_i \\ q_i &= q_i^{(0)} + \delta q_i \\ z_i &= z_i^{(0)} + \delta z_i \\ \zeta_i &= \zeta_i^{(0)} \end{aligned} \tag{21}$$

La solution particulière de ζ_i peut être choisie nulle car le développement de $\mathcal{L}_{ij}^{(4)}(V,t)$ est impair en ζ_i, ζ_j, $\bar{\zeta}_i$ et $\bar{\zeta}_j$.

On recherche ces solutions par approximations successives suivant les puissances de μ, en faisant en sorte d'éviter l'introduction de termes séculaires. A la première approximation on aura ainsi:

$$\frac{d\delta p_i}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{*(1)}(t); \qquad \frac{d\delta q_i}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(2)}(t) + N_i\delta p_i$$

$$\frac{d\delta z_i}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(3)}(t) \tag{22}$$

et:

$$\frac{dp_i^{(0)}}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{*(1)}(V,t); \qquad \frac{dq_i^{(0)}}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(2)}(V,t) + N_i p_i^{(0)}$$

$$\frac{dz_i^{(0)}}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(3)}(V,t); \qquad \frac{d\zeta_i^{(0)}}{dt} = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{(4)}(V,t). \tag{23}$$

L'absence de terme constant dans $\mathcal{L}_{ij}^{*(1)}(t)$ et $\mathcal{L}_{ij}^{(3)}(t)$ entraine l'absence de terme séculaire dans δp_i et δz_i à l'ordre 1 en μ. La constante d'intégration de p_i est choisie pour annuler le terme constant de $\mathcal{L}_{ij}^{(2)}(t)$ ce qui permet de trouver δq_i sans terme séculaire. Cette constante d'intégration sur δp_i équivaut à la perturbation constante du demi-grand axe du 1^er^ ordre des masses. En annulant les constantes d'intégration de δq_i et δz_i, la solution particulière obtenue ainsi sans terme séculaire est d'ordre 1 en μ. Les approximations suivantes de la solution particulière peuvent alors s'obtanir en développant les équations (17) à (29) au voisinage des $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$ et $z_i^{(0)}$; en développant δp_i en puissance de μ: $\delta p_i = \mu\delta_1 p_i + \mu^2\delta_2 p_i + \ldots$ on aura par exemple pour l'équation (17):

$$\frac{dp_i^{(0)}}{dt} + \mu\frac{d}{dt}\delta_1 p_i + \mu^2\frac{d}{dt}\delta_2 p_i + \ldots = \mu\,\mathcal{L}_{ij}^{*(1)}(t) +$$

https://doi.org/10.1017/S0252921100062072 Published online by Cambridge University Press

$$\mu(\mathcal{L}^{*(1)}_{ij}(V,t))^{(0)} + \mu^2\left(\frac{\partial\mathcal{L}^{*(1)}_{ij}(V,t)}{\partial V}\right)^{(0)}.(\delta_1 V + \mu\delta_2 V + \ldots) \tag{24}$$

où $_kV$ (k=1,2) désigne le vecteur composé des $\delta_k p_i$, $\delta_k p_j$, $\delta_k q_i$, $\delta_k q_j$, $\delta_k z_i$, $\delta_k z_j$, $\delta_k \bar{z}_i$, $\delta_k \bar{z}_j$ déterminés à l'ordre k en μ, et où $\left(\frac{\partial\mathcal{L}_{ij}(V,t)}{\partial V}\right)^{(0)}$ désigne le vecteur des dérivées partielles de $\mathcal{L}_{ij}$ par rapport aux variables qui composent le vecteur V, dans lequel V doit être remplacé par:

$$V^{(0)} = \{p_i^{(0)},\ p_j^{(0)},\ q_i^{(0)},\ z_i^{(0)},\ z_j^{(0)},\ \bar{z}_i^{(0)},\ \bar{z}_j^{(0)},\ \zeta_i^{(0)},\ \zeta_j^{(0)},\ \bar{\zeta}_i^{(0)},\ \bar{\zeta}_j^{(0)}\}.$$

On identifie $\mu^2 \frac{d\delta_2 p_i}{dt}$ à la partie de $\mu^2(\partial\mathcal{L}^{*(1)}_{ij}(V,t))^{(0)}.\ \partial_1 V$ qui est fonction de t seulement (elle correspond à la partie de $\mathcal{L}^{*(1)}_{ij}(V,t)$ qui est de degré 1 par rapport à V). Les particularités qui avaient permis d'éviter les termes séculaires dans $\delta_1 V$, se retrouvent au deuxième ordre à condition d'avoir annulé les constantes d'intégration des $\mu\sigma_1 q_i$ et $\mu\sigma_1 z_i$, et d'avoir choisi celle de $\mu\sigma_1 p_i$ de façon à annuler le terme constante l'équation relative à $\mu\delta_1 q_i$. Aux ordres suivants, la possibilité d'obtenir une solution sans terme séculaire reste conditionnée à la non apparition de terme constant dans l'équation $\frac{dp}{dt}$. Il faut encore noter que des termes constants pourraient apparaitre dans des cas de résonnance stricte, lesquels sont ici exclus par hypothèse.

Il reste ensuite à identifier:

$$\frac{dp_i^{(0)}}{dt} = \mu\ (\mathcal{L}^{*(1)}_{ij}(V,t))^{(0)} + \mu^2(\frac{\partial\mathcal{L}^{*(1)}_{ij}(V,t)}{\partial V})^{(0)}.\delta_1 V \tag{25}$$

où le terme en μ^2 concerne la dérivée partielle des termes de degré au moins égal à 2 par rapport à V. Le second membre est ainsi déjà développé en puissances de μ; il est de degré 1 au moins par rapport aux variables qui constituent le vecteur V.

Avec des notations semblables, on obtient pour les autres variables:

$$\frac{dq_i^{(0)}}{dt} = N_i p_i^{(0)} + \mu(\mathcal{L}^{(2)}_{ij}(V,t))^{(0)} + \mu^2(\frac{\partial\mathcal{L}^{(2)}_{ij}(V,t)}{\partial\ V})^{(0)}.\partial_1 V+\ldots \tag{26}$$

$$\frac{dz_i^{(0)}}{dt} = \mu(\mathcal{L}^{(3)}_{ij}(V,t))^{(0)} + \mu^2(\frac{\partial\mathcal{L}^{(3)}_{ij}(V,t)}{\partial V})^{(0)}.\delta_1 V+\ldots \tag{27}$$

$$\frac{d\zeta_i^{(0)}}{dt} = \mu(\mathcal{L}^{(4)}_{ij}(V,t))^{(0)} + \mu^2(\frac{\partial\mathcal{L}^{(4)}_{ij}(V,t)}{\partial V})^{(0)}.\delta_1 V+\ldots \tag{28}$$

Finalement, la solution générale des équations sans second membre doit être tirée des équations (25) à (28). La méthode exposée par Brumberg (1970) dans sa théorie générale, revient à regrouper tout d'abord dans un système différentiel autonome une partie des équations, formée de termes ne dépendant pas explicitement de t; cette partie est exactement celle qui, dans la théorie classique, introduit les termes séculaires $\Delta^{(s)}z$ et $\Delta^{(s)}$, mais son intégration va maintenant être menée de façon à éviter les termes séculaires: la solution du système autonome sera une somme de termes à très longues périodes, et contiendra les constantes d'intégrations relatives aux variables z et ζ (on rappelle que les variables p et q doivent en être dépourvues.

En appelant V_s le vecteur solution du système autonome:

$$V_s = \{p_{s^i}^{(0)}, p_{s^j}^{(0)}, q_{s^i}^{(0)}, q_{s^j}^{(0)}, z_{s^i}^{(0)}, z_{s^j}^{(0)}, \bar{z}_{s^i}^{(0)}, \bar{z}_{s^j}^{(0)},$$

$$\zeta_{s^i}^{(0)}, \zeta_{s^j}^{(0)}, \bar{\zeta}_{s^i}^{(0)}, \bar{\zeta}_{s^j}^{(0)}\}$$

on recherchera ensuite une solution de la forme:

$$p_i^{(0)} = p_{s^i}^{(0)} + \mu\mathscr{P}_i(V_s,t) \tag{29}$$

$$q_i^{(0)} = q_{s^i}^{(0)} = \mu\mathscr{Q}_i(V_s,t) \tag{30}$$

$$z_i^{(0)} = z_{s^i}^{(0)} + \mu\mathscr{X}_i(V_s,t) \tag{31}$$

$$\zeta_i^{(0)} = \zeta_{s^i}^{(0)} + \mu\mathscr{Y}_i(V_s,t) \tag{32}$$

où les fonctions $\mathscr{P}_i$, $\mathscr{Q}_i$, $\mathscr{X}_i$ et $\mathscr{Y}_i$ seront des fonctions quasi-périodiques de t, à déterminer; la solution générale restera alors dans le voisinage de la solution du système autonome.

A l'ordre 1 en μ, il suffit de remplacer partout dans les équations (25) à (28) les éléments de $V^{(0)}$ par ceux de V_s; on isole le système autonome suivant:

$$\frac{d}{dt} p_{si}^{(0)} = 0 \tag{33}$$

$$\frac{d}{dt} q_{si}^{(0)} = N_i p_{s^i}^{(0)} + \mu[\mathscr{L}_{ij}^{(2)}]\ (p_i,p_j) \tag{34}$$

$$\frac{d}{dt} z_{si}^{(0)} = \mu[\mathscr{L}_{ij}^{(3)}] \tag{35}$$

https://doi.org/10.1017/S0252921100062072 Published online by Cambridge University Press

$$\frac{d\zeta_{i_s}^{(0)}}{dt} = \mu[\mathcal{L}(4)]_{ij} \tag{36}$$

où les notations signifient qu'on ne garde de $\mathcal{L}_{ij}^{(2)}$ que les termes explicitement indépendants de t et qui contiennent p_i ou p_j en facteur, tandis qu'on prend en plus dans $\mathcal{L}_{ij}^{(3)}$ et $\mathcal{L}_{ij}^{(4)}$ les termes qui ne dépendent que des variables z et ζ (les variables q ne peuvent pas apparaitre dans les termes explicitement indépendant de t).

De cette façon, les seconds membres de (33) et (34) s'annulaient avec les $p_{i_s}^{(0)}$, on a la solution particulière $p_{i_s}^{(0)} = 0$ et $q_{i_s}^{(0)} = 0$, qui convient parfaitement au fait que ces variables ne doivent pas contenir de constantes d'intégration, ni amener de terme séculaire dans les variables q.

Quant aux équations (35) à (36), avec la solution $p_{i_s}^{(0)} = 0$ il n'en reste qu'un système ne dépendant que des variables $z_{i_s}^{(0)}$ et $\zeta_{i_s}^{(0)}$ dont la partie linéaire par rapport à ces variables constitute exactement le système de Laplace-Lagrange. On sait que la solution générale de ce système est de la forme d'une some finie de termes à très longues périodes; on sait également que les termes de degré supérieur n'altèrent pas la forme de cette solution, qui reste à très longues périodes (méthode de Krilov-Bogolioubov, voir par exemple Bretagnon, 1173). Les constantes d'intégration sont à évaluer par comparaison avec les observations: les amplitudes de ces termes à très longues périodes sont de l'ordre des excentricités et des inclinaisons.

La détermination des fonctions $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{Q}_i$, $\mathcal{X}_i$ et $\mathcal{Y}_i$ s'opère maintenent en dérivant les expressions (29) à (32) et en les identifiant aux équatinso (25)`(28):

$$\frac{dp_{i_s}^{(0)}}{dt} + \mu\left(\frac{\partial\mathcal{P}_i(V_s,t)}{\partial V_s}\right)\cdot\frac{dV_s}{dt} + \mu\frac{\partial\mathcal{P}_i(V_s,t)}{\partial t} = \mu(\mathcal{L}^{*(1)}_{ij}(V,t))^{(0)} + \ldots \tag{37}$$

$$\frac{dq_{i_s}^{(0)}}{dt} + \mu\left(\frac{\partial\mathcal{Q}_i(V_s,t)}{\partial V_s}\right)\cdot\frac{dV_s}{dt} + \mu\frac{\partial Q_i(\mathcal{V}_s,t)}{\partial t} = N_i p_{i_s}^{0} + \mu N_i\mathcal{P}_i(V_s,t) + \mu(\mathcal{L}_{ij}^{(2)}(V,t))^{(0)} + \mu^2\ldots \tag{38}$$

$$\frac{dz_{i_s}^{(0)}}{dt} + \mu\left(\frac{\partial X_i(V_s,t)}{\partial V_s}\right)\cdot\frac{dV_s}{dt} + \mu\frac{\partial X_i(V_s,t)}{\partial t} = \mu(\mathcal{L}_{ij}^{(3)}(V,t))^{(0)} + \ldots \tag{39}$$

$$\frac{d\zeta_{s_i}^{(0)}}{dt} + \mu\left(\frac{\partial Y_i(V_s,t)}{\partial V_s}\right).\frac{dV_s}{dt} + \mu\frac{\partial Y_i(V_s,t)}{\partial t} = \mu(\mathcal{L}_{ij}^{(4)}(V,t))^{(0)}+\ldots \qquad (40)$$

Dans les seconds membres, il faut encore remplacer le vecteur V par le vecteur $V_s + \mu F(V_s,t)$, qui condense les notations (29) à (32). Comme $\frac{dV_s}{dt}$ est déjà d'ordre 1 en μ (éqs. (33) À 836)), il reste l'identification suivante, à l'ordre 1 en μ:

$$\mu\frac{\partial\mathcal{P}_i(V_s,t)}{\partial t} = \mu\,\tilde{\mathcal{L}}_{ij}^{(1)}(V_s,t) \qquad (41)$$

$$\mu\frac{\partial\mathcal{Q}_i(V_s,t)}{\partial t} = \mu\,N_i\mathcal{P}_i(V_s,t) + \mu\tilde{\mathcal{L}}_{ij}^{(2)}(V_s,t) \qquad (42)$$

$$\mu\frac{\partial X_i(V_s,t)}{\partial t} = \mu\tilde{\mathcal{L}}_{ij}^{(3)}(V_s,t) \qquad (43)$$

$$\mu\frac{\partial Y_i(V_s,t)}{\partial t} = \mu\tilde{\mathcal{L}}_{ij}^{(4)}(V_s,t) \qquad (44)$$

où les expressions $\tilde{\mathcal{L}}_{ij}(V_s,t)$ représentant ce qui reste des seconds membres de (25) à (28), (avec V_s mis à la place de $V^{(0)}$) lorsqu'on leur enlève les seconds membres du système autonome (33) à (36); ce sont donc des expressions dépendant explicitement de t. Seul $\tilde{\mathcal{L}}_{ij}^{(2)}(V_s,t)$ contient encore des termes indépendants de t, ceux qui ne dépendent que des variables $z_{s_i}^{(0)}$ et $\zeta_{s_i}^{(0)}$. On peut les éliminer en les identifiant à des termes de la méme forme dans l'expression de $\mathcal{P}_i(V_s,t)$; ainsi, ces termes qui contribuaient à la perturbation constante du demi-grand axe se retrouvent, dans la théorie générale, exprimés en fonction des variables V_s, c'est à dire qu'ils sont maintenant à très longues périodes.

A chacun des autres termes des $\tilde{\mathcal{L}}_{ij}(V_s,t)$ (qui sont quasi-périodiques de t), on associe un terme des fonctions $\mathcal{P}_i$, $\mathcal{Q}_i$, $\mathcal{X}_i$, ou $\mathcal{Y}_i$, qui a la même forme par rapport aux variables V_s et qui a la même pêriode. L'intégration de ces termes par les équations (41) à (44) est l'équivalent de la détermination des inégalités à courtes périodes du 1er ordre en dans la théorie classique, mise à part la substitution numérique de la valeur des variables z et ζ. Cependant, ces termes à courtes périodes sont ici en facteur d'éléments de V_s: ils doivent ainsi être composés à des termes à très longues périodes; si on développe ces derniers en séries entières de t au voisinage d'un instant initial τ_0, ces termes fourniront alors le terme à courte période de la théorie classique au 1er ordre en μ, puis les termes mixtes relatifs à cette même période.

Ainsi, les termes mixtes qui n'apparaissent qu'à l'ordre 2 en μ au moins dans la théorie classique, sont déjà présents dans la théorie générale à l'ordre 1 en μ. Ceci vient du fait que les basses fréquences de la solution à très longues périodes sont de l'ordre de μ; le développement en série entière de t de ces termes est donc aussi un développement en puissances de μ, et on obtient par la théorie générale du 1er ordre les termes mixtes en $\mu^2 t \exp \sqrt{-1}(k_i L_i + k_j L_j)$, puis en $\mu^3 t^3 \exp \sqrt{-1}(k_i L_i + k_j L_j)$, ...; les termes mixtes en $\mu^3 t \exp \sqrt{-1}(k_i L_i + k_j L_j)$, $\mu^4 t^2 \exp \sqrt{-1}(k_i L_i + k_j L_j)$ ... ne seraient fournis qu'à l'ordre 2 en de la théorie générale.

La solution générale des équations (25) à(28), à l'ordre 2 et aux ordres supérieurs en μ s'obtiendrait de façon analogue par les équations (37) à(40), en y considérant que les $\mathscr{P}_i$, $\mathscr{Q}_i$, $\mathscr{X}_i$ et $\mathscr{Y}_i$ se développent en puissances de μ (par exemple):

$$\mu\mathscr{P}_i = \mu\mathscr{P}_{1i} + \mu^2\mathscr{P}_{2i} + \ldots, \quad \mu\mathscr{F} = \mu\mathscr{F}_1 + \mu^2\mathscr{F}_2 + \ldots$$

on sépare alors à chaque ordre en μ, un système autonome du même ordre, selon les mêmes principes qu'à l'ordre 1: termes indépendants de t pour les équations (39) à (40) et seulement ceux qui s'annulent avec les $p_s^{(0)}$ et $q_s^{(0)}$ pour les équations (37) et (38); la solution du système autonome conserve alors la même forme qu'à l'ordre 1. Les termes rsstant déterminent ensuite forcément, pour chaque ordre en μ, le vecteur F sous forme quasi-périodique de t.

On a également à chaque ordre en μ un équivalent de la perturbation constante du demi-grand axe qui se développe en termes à longues périodes par l'intermédiaire des variables.

Remarquons encore que l'intégration du système autonome peut se faire indépendemment de la recherche de la solution quasi-périodique (d'où son nom); la détermination des constantes d'intégration de la solution générale peut ainsi intervenir seulement quand on estime avoir déterminé avec suffisamment de précision la solution quasi-périodique.

APPLICATIONS ET CONCLUSION

D'après ce qui précède, on peut constater que le développement en μ n'a pas la même signification dans la théorie générale et dans la théorie classique, notamment en ce qui concerne les termes séculaires et mixtes: ainsi, la théorie générale semble devoir être poussée à un ordre moins élevé en μ que la théorie classique en ce qui concerne ces termes; c'est un résultat intéressant car c'est presque uniquement pour ces termes séculaires et mixtes que la théorie classique nécessite un développement d'ordre élevé en μ, les termes mixtes étant alors toujours relatifs à des longues périodes. Nous allons montrer plus précisement sur un exemple comment peut s'effectuer ce calcul des termes séculaires et mixtes à partir de la théorie générale d'ordre 1 en μ

Ainsi par exemple, pour calculer les termes mixtes dans le demi-grand axe de Saturne, relatifs à la grande inégalite, on devra d'abord déterminer le développement analytique de cette inégalité dans $\mathcal{L}^{*(1)}_{65}$; on trouve (cf. Duriez, 1976) qu ce développement comporte en facteur de exp $\sqrt{-1}(2L_5 - 5L_6)$, 10 termes de degré 3:

$$- \frac{3}{2} N_6 (0{,}01208\ z_6\zeta_6^2 - 0{,}02417\ z_6\zeta_5\zeta_6 + 0{,}01208\ z_6\zeta_5^2$$

$$- 0{,}00672\ z_5\zeta_6^2 + 0.01255\ z_5\zeta_5\zeta_6 - 0{,}00627\ z_5\zeta_5^2 \qquad (45)$$

$$+ 0{,}02492\ z_6^3 - 0{,}04560\ z_5 z_6^2 + 0{,}02752\ z_5^2 z_6 - 0{,}00550\ z_5^3)$$

puis 70 termes de degré 5, dont la contribution globale dans une théorie classique est environ 100 fois moindre que celle du degré 3 (on compte encore 10+70 termes conjugués changés de signe des précédents, car $\sqrt{-1}\mathcal{L}_{ij}^{(1)}$ est imaginaire pur, en facteur de exp $-\sqrt{-1}(2L_5 - 5L_6)$). La solution quasi-périodique $\mathscr{P}_6$ relative à cette inégalité s'obtient en intégrant l'équation (41): cela revient à diviser chaque terme de (45) par $\sqrt{-1}(2N_5 - 5N_6)$, et c'est donc exactement la même intégration que dans la théorie classique, dans la substitution numérique des z et ζ. C'est en fait la substitution de la solution du système autonome qui donne des termes mixtes cette dernière solution est de la forme, pour z ou pour ζ:

$$z = \sum_i A_i \exp \sqrt{-1}(c_i t + \phi_i)$$

où A_i, c_i et ϕ_i sont constants, c_i de l'ordre de μ, et A_i de l'ordre des excentricités (cf. Bretagnon, 1974).

Let termes mixtes s'obtiennent en substituant à z et ζ dans l'expression intégrée de (45), des expressions développées en puissances de t, de la forme:

$$z = \sum_i A_i \exp \sqrt{-1}\ \phi_i [1 + \sqrt{-1}\ c_i t - \frac{c_i^2}{2} t^2 + \ldots] \qquad (46)$$

On pourrait aussi utiliser une solution du système autonome exprimée sous forme polynomiale de t (Brumberg, 1975). Ce schéma de calcul est d'ailleurs valable pour toutes les inégalités périodiques.

La partie indépendante de t dans les expressions de la forme (46), substituée aux variables z et ζ dans la solution générale (45), donne la grande inégalité du demi-grand axe de Saturne tel qu'on l'aurait dans la théorie classique au 1er ordre en μ. Les termes suivants dans le développement (46) donneraient les termes mixtes en t exp $\sqrt{-1}(2L_5 - 5L_6)$, t^2 exp $\sqrt{-1}(2L_5 - 5L_6)$ d'ordre 2,3,... en μ.

Les termes mixtes associés à d'autres inégalités périodiques s'obtiendraient de la même façon, mais sont en général négligeables sauf dans le cas de petits diviseurs (comme la grande inégalité).

Une substitution de la forme (46) dans certains termes de la solution générale peut également conduire à des termes séculaires au lieu de termes mixtes, si les termes à très longues périodes qu'on développe ainsi ne sont en facteur d'aucune fonction de t. C'est notamment le cas des termes de $\mathcal{L}_{ij}^{(2)}$ introduits dans P_i pour éviter les termes séculaires dans (42), et qui correspondent à la partie de la perturbation constante du demi-grand axe, qui dépend des excentricités et des inclinaisons. Il nous a paru intéressant de calculer le terme séculaire qui serait ainsi introduit dans la perturbation du demi-grand axe de Saturne perturbé par Jupiter: le développement de la partie de $\mu\mathcal{L}_{65}^{(2)}$ indépendante de t, et de degré 2 par rapport aux z et ζ, comprend 8 termes:

$$N_6(-848\ \zeta_6\bar{\zeta}_6 - 765\ \zeta_5\zeta_5 + 806(\zeta_5\bar{\zeta}_6 + \zeta_6\bar{\zeta}_5)$$

$$+ 212\ z_6\bar{z}_6 + 191\ z_5\bar{z}_5 - 156(_5\bar{z}_6 + z_6\bar{z}_5)) \times 10^{-6}$$

En y substituant les développements de z_5, z_6, ζ_5 et ζ_6 de la forme (46), calculés à apartir des plus gros termes de la solution de Lagrange donnée par Bretagnon (1974), nous avons trouvé que le terme séculaire en t, d'ordre 2 des masses, qui en résulte pour la variable p_6, vaut 7,66 10^{-6} (1l/an)t, ce qui donnerait sur le demi-grand axe de Saturne 2,37 10^{-10} (u.a./an)t . Ces valeurs sont du même ordre de grandeur que les très petits termes séculaires qu'on trouve numêriquement dans la theorie classique en variables elliptiques héliocentriques dans le demi-grand axe, au deuxième ordre des masses.

Finalement, on ne peut que constater l'intérêt de la théorie générale pour déterminer les termes séculaires et mixtes de la théorie classique. Cependant, comme les résultats qu'on attend de la théorie générale dépendent de la qualité de la théorie classique qui fournit la valeur des N_i, on constate aussi la nécessité de développer en même temps ces deux types de théories. Actuellement, la théorie générale est acquise à l'ordre 1 en μ, pour tous les termes de degré inférieurs à 5 en z et ζ, ainsi que la solution intermédiaire à l'ordre 3 en μ. L'ordre 2 en μ de la solution générale est en cours d'élaboration.

REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement Monsieur J. Chapront pour les nombreux conseils qu'il m'a donnés, et les discussions fructueuses qu'il m'a permis d'avoir avec lui. Je remercie éaglement Messieurs Bretagnon et Simon pour les résultats de leurs travaux qu'ils ont eu l'amabilité de me communiquer.

BIBLIOGRAPHIE

Bretagnon, P.: 1974, *Astron. & astrophys.* 30, 141
Bretagnon, P. 1976:, communication au colloque n°41 de l'UAI à Cambridge
Brumberg, V.A.: 1970, dans *Periodic Orbits, Stability and Resonances*, G.E.O. Giacaglia (ed.), Reidel, Dordrecht, p. 409
Brumberg, V.A. et Chapront, J.: 1973, *Celes. Mech.* 8, 335

Brumberg, V.A.: 1975, *Celes. Mech.* 11, 131

Chapront, J., Bretagnon, P. et Mehl, M. 1975, *Astron. & Astrophys.* 38, 57

Duriez, L. 1977, *Astron. & Astrophys.* 54, 93

Jefferys, W.H., Moser, J.: 1966, *Astron. J.* 71, 568

Krasinsky, G.A. 1969, *Trans. Inst. Theor. Astron.* (Leningrad) 13, 105

Sagnier, J.L.: 1973, *Astron. & Astrophys.* 25, 113

Simon, J.L. et Bretagnon, P.: 1975, *Astron. & Astrophys.* 42, 259

Simon, J.L., et Bretagnon, P.: 1975, *Astron. & Astrophys. Suppl.* 22, 107