*Compositio Mathematica* **130:** 89–117, 2002.



# Cohomologie non ramifiée sur une courbe $p$-adique lisse

(*Unramified Cohomology on a Smooth* p-*Adic Curve*)

ANTOINE DUCROS
*IRMAR, Université de Rennes 1, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France.*
*e-mail: ducros@maths.univ.rennesl.fr*

(Received: 24 May 2000; accepted in final form: 30 January 2001)

**Abstract.** Let $k$ be a local field with residue characteristic $p$. Let $n$ be a prime-to-$p$ integer. Consider a smooth, irreducible $k$-curve $X$. In this article, we study the subgroup of $H^3(k(X), \mu_n^{\otimes 2})$ consisting of classes which are unramified on $X$. It is known to be isomorphic to $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$, where $\pi$: $X_{\acute{e}t} \to X_{Zar}$ is the canonical map. A purely topological description of this group is given, using the Berkovich analytification $X^{an}$ of $X$. More precisely, denote by $Y$ a smooth and irreducible Berkovich-analytic $k$-curve, by $Y_{top}$ the underlying topological space, by $Y_{\acute{e}t}$ the étale-analytic site and by $\pi^{an}$ the canonical map $Y_{\acute{e}t} \to Y_{top}$. Let $\Delta$ be the skeleton of $Y$ (it is a closed subset defined by Berkovich which is locally a finite graph). Then we show (th. 4.2) that $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$ is naturally isomorphic (through sort of a pointwise evaluation of cohomology classes) to the group of harmonic cochains defined on $\Delta$ with values in $\mathbb{Z}/n$. Now, if $X$ is a smooth *algebraic* $k$-curve the natural map

$$H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$$

is shown to be an isomorphism (th. 5.2). It is a new formulation (for the case where $X$ is proper) and a generalization (to open curves) of a result which was due to Kato. Moreover we use here some steps of Kato's proof, but not his whole result. So our method gives, for projective curves, a (partially) new proof of Kato's theorem.

**Mathematics Subject Classifications (2000).** 14F20, 14G20, 14G22.

**Key words.** unramified cohomology, Berkovich analytic spaces, $p$-adic curves.

## 0. Introduction

On sait depuis Witt ([12], Satz III′) que si $R$ est un corps réel clos et $X$ une $R$-courbe irréductible et lisse le sous-groupe de $H^2(R(X), \mathbb{Z}/2)$ formé des classes non ramifiées sur $X$ (qui se trouve être égal au groupe de Brauer de $X$) admet une description topologique très simple: il est isomorphe *via* l'évaluation point par point au groupe des applications semi-algébriques continues de $X(R)$ dans $\mathbb{Z}/2$. On se propose dans cet article de donner un résultat analogue lorsque $R$ est remplacé par un corps local $k$ dont on note $p$ la caractéristique résiduelle, qui dans le cas où $X$ est projective sera une réinterprétation d'un théorème de Kato ([8], Cor. 2.9) reposant sur des travaux de Saito ([10]). On étudiera la cohomologie non ramifiée sur $X$ en degré 3 (le dernier pour lequel elle soit non triviale en général) et à coefficients dans $\mu_n^{\otimes 2}$ pour un certain entier $n$ premier à $p$. L'espace topologique appelé à jouer un rôle similaire à celui de $X(R)$ ne peut être $X(k)$, ni même l'ensemble des points fermés de $X$: en effet l'évaluation d'une classe en n'importe lequel de ces points est nulle, le corps résiduel étant de dimension cohomologique 2. Ce sera en fait l'espace de Berkovich $X^{an}$ associé à $X$ (cette théorie est développée par son auteur dans [1] et [2]).

La démarche adoptée ici est la suivante: soit $Y$ une $k$-courbe analytique séparée, irréductible et lisse. On peut lui associer deux sites, celui correspondant à l'espace topologique sous-jacent, noté $Y_{top}$, et le site étale analytique $Y_{ét}$ ([2], 4.1). On dispose d'un morphisme naturel $\pi^{an} : Y_{ét} \to Y_{top}$. On cherche tout d'abord à décrire $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$. Son étude va être fondée, par analogie avec le cas réel, sur l'évaluation point par point. On a besoin à cette fin de donner, pour tout point $P$ de $Y$ de corps résiduel $k(P)$, une description de $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$ qui soit autant que possible indépendante de la nature du point $P$. On y arrive (prop. 3.4) après avoir établi certains résultats de continuité partielle sur la manière dont $k(P)$ varie avec $P$ (prop. 2.3 et 2.6). La majeure partie de l'article est en fait consacrée à ces questions. Ceci permet de déboucher sur une description purement topologique du groupe $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$:

THÉORÈME 4.2. *Orientons le "squelette" $\Delta$ de $Y$ (*[1], Prop. 4.1.3 et 4.1.4*) d'une manière arbitraire. Soit $S$ l'ensemble de ses sommets. Alors le groupe $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$ est isomorphe à celui des applications continues de $\Delta - S$ dans $\mathbb{Z}/n$ dont la somme algébrique des valeurs en chaque sommet est nulle.*

Soit maintenant $X$ une $k$-courbe *algébrique* et $X^{an}$ la courbe analytique associée ([1], Th. 3.4.1). On note $X_{Zar}$ le site Zariski, $X_{ét}$ le site étale sur le schéma $X$ et $\pi : X_{ét} \to X_{Zar}$ la flèche naturelle. Le sous-groupe de $H^3(k(X), \mu_n^{\otimes 2})$ formé des classes non ramifiées sur $X$ s'identifie, par les résultats de Bloch et Ogus ([3]) à $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n)$. Le théorème principal de cet article (5.2) affirme alors:

THÉORÈME 5.2. *La flèche naturelle $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$ est un isomorphisme.*

La surjectivité est formelle. Pour l'injectivité, on traite d'abord le cas où $X$ est projective. Dans ce cas le groupe $H^0(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$ décrit ci-dessus est exactement $H_1(\Delta, \mathbb{Z}/n)$ (où $\Delta$ est le squelette de $X^{an}$). On pourrait alors utiliser directement le résultat de Kato évoqué plus haut: en effet, il décrit $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ en termes de la combinatoire de la fibre spéciale d'un modèle convenable de $X$ au-dessus de l'anneau de $k$; or cette combinatoire se lit justement dans le squelette de $X^{an}$, et ce qu'a établi Kato peut précisément être interprété (au moins lorsque $X^{an}$ possède

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

un revêtement formel distingué à réduction semi-stable, [1], Th. 4.3.1; on doit pouvoir traiter la situation générale à partir de ce cas en faisant agir le groupe de Galois d'une extension finie appropriée) comme l'existence d'un isomorphisme, qui n'est pas *a priori* celui construit ici, mais donne l'égalité des cardinaux, entre $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ et $H_1(\Delta, \mathbb{Z}/n)$.

On a en fait opté pour une méthode différente qui utilise une partie seulement des résultats de Kato et de ceux de Saito dont ils découlent. On *retrouve* donc, par une démonstration qui diffère en partie de l'originale, le théorème de Kato. On établit au passage (proposition 5.2.5) que les deux suites exactes naturelles

$$0 \to H^1(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^2\pi^{an}_*\mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(X^{an}_{\acute{e}t}, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^3\pi^{an}_*\mu_n^{\otimes 2}) \to 0 \tag{1}$$

$$0 \to H^1(X^{an}_{top}, \mathbb{Z}/n) \to H^1(X^{an}_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/n) \to H^0(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^1\pi^{an}_*\mathbb{Z}/n) \to 0 \tag{2}$$

sont duales l'une de l'autre.

Le cas où $X$ n'est pas forcément propre s'obtient ensuite facilement, modulo une caractérisation, à l'aide de la fonction continue à valeurs dans $\mathbb{Z}/n$ qui lui est associée, des résidus d'une classe en les points fermés de la compactification lisse $\overline{X}$ de $X$ (lemme 5.2.8). Notons que si $S$ désigne l'ensemble $\overline{X} - X$ la théorie de la localisation en cohomologie étale donne en particulier, en tenant compte des théorèmes de pureté et du corps de classes local, l'existence d'une suite exacte

$$0 \to H^0(\overline{X}_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to \bigoplus_S \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n \to 0$$

Ceci permet de montrer directement l'existence d'un isomorphisme

$$H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \simeq H^0(\overline{X}_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \bigoplus (\mathbb{Z}/n)^{s-1}$$

où $s$ est le cardinal de $S$ ; mais cette description, au contraire de celle obtenue ici, n'est ni explicite ni canonique puisqu'elle repose sur le choix d'une section de

$$H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to \mathrm{Ker}\left(\bigoplus_S \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n\right).$$

C'est Jean-Louis Colliot-Thélène qui m'a appris l'existence de la théorie de Berkovich, et m'a suggéré de l'étudier en détail. Je tiens à l'en remercier vivement.

## 1. Variation des fonctions sur une courbe analytique

### 1.1. RAPPELS ET NOTATIONS

**(1.1)** Les valuations et les groupes ordonnés seront systématiquement notés de manière multiplicative. Deux valuations sur un corps seront dites *équivalentes* si elles ont même anneau. Une *valeur absolue* $|\ |$ sur un corps $k$ sera une application $|\ | : k \to \mathbb{R}^+$ unitaire, compatible avec le produit et vérifiant l'inégalité triangulaire. Elle sera dite

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

*triviale* si $|k^*| = \{1\}$. Elle sera dite *non archimédienne* si $|a + b| \leqslant \max(|a|, |b|)$ pour tout couple $(a, b)$ d'éléments de $k$. Dans ce cas $|\ |$ induit une valuation sur $k$ d'anneau $\{x \in k,\ |x| \leqslant 1\}$. Le *corps résiduel* de $|\ |$ (on dira parfois aussi "de $k$" s'il n'y a pas d'ambiguïté) sera celui de cet anneau. On le notera $\tilde{k}$. Si $k$ est complet, et si $L$ est une extension finie de $k$, on notera encore $|\ |$ l'unique prolongement de $|\ |$ à $L$, et $\tilde{L}$ le corps résiduel de $L$.

**(1.2)** Dans toute la suite le terme *espace analytique* sera à prendre au sens de Berkovich (et plus précisément de [1], 3.1, ce qui correspond aussi aux *bons* espaces de [2]). Sa théorie sera constamment utilisée. Un certain nombre de définitions et résultats de base s'y rapportant seront supposés connus. Le lecteur pourra se référer aux deux textes fondateurs [1] et [2], et plus précisément à [1], 4.1, 4.2 et 4.3 et [2], 3.6 en ce qui concerne les courbes analytiques (*cf. infra*). Si $k$ est un corps complet pour une valeur absolue non-archimédienne et $A$ une algèbre $k$-affinoïde (au sens de [2] def. 2.1.1) on peut lui associer un $k$-espace analytique $\mathcal{M}(A)$ ([2], 1.2 et 2.3). Si $X$ est une $k$-variété *algébrique* on peut lui associer de manière naturelle un $k$-espace analytique $X^{an}$ ([1], Th. 3.4.1).

**(1.3)** Soit $k$ un corps complet pour une valeur absolue $|\ |$ non triviale et non archimédienne, soit $L$ une extension valuée complète de $k$, soit $Y$ un $k$-espace analytique et $Q$ un point de $Y$. On utilisera systématiquement les notations suivantes:

- $\mathcal{O}_Y$ désignera le faisceau structural de $Y$.
- $k(Q)$ désignera le corps résiduel de $Q$. Il est muni d'une valeur absolue prolongeant $|\ |$ que l'on notera encore $|\ |$. Pour toute fonction $f$ appartenant à $\mathcal{O}_Y$ l'expression $|f(Q)|$ a donc un sens.
- $Y_L$ désignera le transformé de $Y$ par le changement de base de $k$ à $L$ (*cf.* [1], 3.1).

**(1.4)** On appellera *$k$-courbe analytique* tout $k$-espace analytique strict, séparé, purement de dimension 1 et dont chaque ouvert est dénombrable à l'infini. Cette dernière condition est par exemple vérifiée par toute réunion dénombrable d'ouverts de courbes affinoïdes, et en particulier par les analytifications de courbes algébriques. Elle assure que toute courbe analytique est (comme espace topologique) un *quasi-polyèdre* au sens de [1], 4.1. Le terme de *fonction*, dans ce contexte, désignera toujours une fonction analytique. Un sous-ensemble $I$ d'une courbe analytique sera appelé *intervalle* s'il est homéomorphe à un intervalle réel et s'il en va de même de son adhérence $\bar{I}$ (ceci pour éviter de qualifier d'intervalle un cercle privé d'un point). Si $P$ et $Q$ sont deux points d'un domaine simplement connexe (au sens de [1], 4.1) d'une courbe analytique on désignera par $[P; Q]$ l'unique intervalle compact de ce domaine d'extrémités $P$ et $Q$.

**(1.5)** Dans toute la suite du texte, $k$ désigne un corps complet pour une valeur absolue non triviale $|\ |$. On suppose que $|\ |$ est non archimédienne. On rappelle que $\tilde{k}$ désigne son corps résiduel. On se donne une $k$-courbe analytique lisse $Y$. Soit $P$ un point de $Y$. Il est, d'après Berkovich ([1] 1.4.4 et [2] 3.6), de l'un des quatre types suivants (qui ne change pas après extension finie du corps de base).

- Type (1): il existe un voisinage affinoïde $V$ de $P$ d'algèbre associée $A_V$ tel que $P$ corresponde à un morphisme de $A_V$ dans le complété d'une clôture algébrique de $k$. Si ce morphisme se factorise par une extension *finie* de $k$ on dira que $P$ est *algébrique*. Pour tout voisinage connexe $V$ de $P$ l'ouvert $V - \{P\}$ est connexe.
- Type (2): l'anneau local de $Y$ en $P$ est égal au corps $k(P)$. Le groupe $|k(P)^*|/|k^*|$ est de torsion et le corps résiduel de $k(P)$ est le corps des fonctions d'une courbe projective, lisse et géométriquement intègre $\mathcal{C}$ définie sur une extension finie de $\tilde{k}$. Pour tout voisinage $V$ de $P$ connexe suffisamment petit l'ensemble des composantes connexes de $V - \{P\}$ est en bijection avec l'ensemble des points fermés de $\mathcal{C}$ : on le voit en se ramenant, après une extension galoisienne convenable de $k$, au cas où $P$ possède un voisinage élémentaire (*cf.* 1.10 *infra*), et on applique les résultats de [1], 4.2 et Th. 4.3.1. Le fait que l'action de Galois sur les points de la courbe résiduelle corresponde bien à celle sur les composantes connexes découle du 1.18.1 ci-dessous.
- Type (3): l'anneau local de $Y$ en $P$ est égal au corps $k(P)$. Le groupe $|k(P)^*|/|k^*|$ est, modulo sa torsion, libre de rang 1. Le corps résiduel de $k(P)$ est une extension finie de $\tilde{k}$. Pour tout voisinage $V$ de $P$ connexe suffisamment petit l'ouvert $V - \{P\}$ a exactement deux composantes connexes: on le voit comme ci-dessus en se ramenant au cas où $P$ possède un voisinage élémentaire. Si $f$ est une fonction inversible sur $V$ telle que $|f(P)|$ ne soit pas de torsion dans $|k(P)^*|/|k^*|$ alors les deux composantes sont
$$\{Q \in V,\ |f(Q)| > |f(P)|\} \text{ et } \{Q \in V,\ |f(Q)| < |f(P)|\}$$
- Type (4): l'anneau local de $Y$ en $P$ est égal au corps $k(P)$. Il existe un voisinage affinoïde $V$ de $P$ d'algèbre associée $A_V$ tel que $P$ corresponde à un morphisme de $A_V$ dans une extension immédiate stricte (*cf.* [1] 1.4.4) du complété d'une clôture algébrique de $k$. Pour tout voisinage connexe $V$ de $P$ l'ouvert $V - \{P\}$ est connexe.

### 1.2. LES COCHAÎNES HARMONIQUES SUR UN POLYÈDRE ORIENTÉ

**(1.6)** Suivant en cela Berkovich ([1], 4.1) on appellera *polyèdre* tout espace topologique séparé $\mathcal{P}$ possédant les propriétés suivantes:

(i) Les ouverts connexes de $\mathcal{P}$ sont dénombrables l'infini
(ii) Pour tout point $P$ de $\mathcal{P}$ il existe un entier non nul $n$ tel que $P$ possède un voisinage ouvert homéomorphe à la réunion de $n$ copies de l'intervalle semi-ouvert $[0; 1[$ plongées de sorte que 0 s'envoie sur $P$ et que deux quelconques de ces copies distinctes ne se coupent qu' en $P$.

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

**(1.7)** Il est clair que pour un point $P$ donné l'entier $n$ défini ci-dessus est unique. Il est égal à 1 si et seulement si $P$ possède un voisinage ouvert homéomorphe à $[0; 1[$ ; on dit alors que $P$ est *extrémal*. Il est égal à 2 si et seulement si $P$ possède un voisinage ouvert homéomorphe à $]0; 1[$. On appellera *sommet* de $\mathcal{P}$ tout point pour lequel cet entier $n$ est différent de 2. L'ensemble des sommets de $\mathcal{P}$ situés sur une composante connexe donnée est au plus dénombrable.

**(1.8)** Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre et $S$ l'ensemble de ses sommets. Les composantes connexes de $\mathcal{P} - S$ sont soit des intervalles ouverts, soit des cercles. On dit que l'on a *orienté* $\mathcal{P}$ lorsque l'on a choisi une orientation sur chacune de ces composantes. Supposons $\mathcal{P}$ orienté. Soit $A$ un groupe abélien discret et $\phi$ une application continue (donc localement constante) de $\mathcal{P} - S$ à valeurs dans $A$. Soit $Q$ un point de $\mathcal{P}$. Considérons un voisinage ouvert de $Q$ réunion de $n$ copies $I_1, I_2, \ldots, I_n$ de $[0; 1[$; l'intérieur de chaque $I_i$ est inclus dans $\mathcal{P} - S$ et est donc orienté. Pour chaque entier $i$ posons $\varepsilon_i = 1$ si $I_i$ est orienté vers $Q$ et $\varepsilon_i = -1$ sinon. Notons $\phi_i$ la valeur constante de $\phi$ sur l'intérieur de $I_i$. On appellera *somme algébrique* des valeurs de $\phi$ en $Q$ l'élément $\sum_i \varepsilon_i \phi_i$ de $A$.

DÉFINITION 1.9. Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre orienté, soit $S$ l'ensemble de ses sommets et soit $A$ un groupe abélien discret. On appelle *cochaîne harmonique* sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $A$ toute application localement constante de $\mathcal{P} - S$ dans $A$ dont la somme algébrique des valeurs en chaque sommet de $\mathcal{P}$ est nulle.

*Remarque* 1.9.1. Si $Q$ est un point de $\mathcal{P}$ qui n'est pas un sommet alors pour toute fonction $\phi$ localement constante de $\mathcal{P} - S$ dans $A$ la somme algébrique des valeurs de $\phi$ en $Q$ est nulle: en effet $Q$ est situé sur un intervalle ouvert orienté $I$ sur lequel $\phi$ est constante; l'une des composantes de $I - \{Q\}$ est dirigée vers $Q$ et l'autre non, d'où l'assertion.

*Remarque* 1.9.2. Si $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ sont deux orientations sur $\mathcal{P}$ les groupes correspondants de cochaînes harmoniques à valeurs dans $A$ sont isomorphes: on passe de l'un à l'autre par multiplication par $(-1)$ sur chaque composante de $\mathcal{P}$ pour laquelle $\mathcal{O}_1$ et $\mathcal{O}_2$ diffèrent.

*Remarque* 1.9.3. Si $Q$ est un point extrémal de $\mathcal{P}$ alors toute cochaîne harmonique est nulle au voisinage de $Q$ (cela résulte immédiatement des définitions).

### 1.3. LA VARIATION DES FONCTIONS

**(1.10)** Soit $k$ un corps complet pour une valeur absolue $|\,|$ non triviale et non archimédienne, et soit $Y$ une $k$-courbe analytique lisse. On utilisera constamment dans la suite la notion de *voisinage élémentaire* d'un point de $Y$. Cette notion a été introduite dans [2], 3.6. Tout point $P$ de $Y$ possède un voisinage élémentaire

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

après une extension finie séparable convenable. La proposition 1.11 ci-dessous est certainement bien connue.

PROPOSITION 1.11. *Soit $P$ un point de $Y$, soit $f$ une fonction définie et inversible sur un voisinage ouvert $V$ de $P$. On pose $\lambda = |f(P)|$. Il existe un voisinage ouvert $W$ de $P$ inclus dans $V$ tel que pour toute composante connexe $U$ de $W - \{P\}$ l'une des trois propriétés suivantes soit vérifiée:*

(i) *Pour tout point $Q$ de $U$ on a $|f(Q)| = \lambda$*
(ii) *Pour tout point $Q$ de $U$ on a $|f(Q)| < \lambda$*
(iii) *Pour tout point $Q$ de $U$ on a $|f(Q)| > \lambda$*

*De plus pour presque toutes les composantes de $W - \{P\}$ (i.e. toutes sauf un nombre fini) c'est la propriété (i) qui est vérifiée.*

*Démonstration (proposée par le rapporteur, et notablement plus simple que celle de l'auteur !).* Si $f$ est algébrique sur $k$ alors $|f|$ est constante sur $V$. Dans le cas contraire le morphisme $V \longmapsto \mathbb{A}_k^{1,an}$ induit par $f$ est plat et quasi-fini au sens de [2], 3.2. Il est donc (d'après *loc. cit.*) ouvert, compact et à fibres finies. Ceci permet de se ramener au cas où $V$ est un ouvert de $\mathbb{A}_k^{1,an}$ et où $f = t$ (avec $\mathbb{A}_k^1 = \operatorname{Spec} k[t]$); quitte à remplacer $k$ par une extension finie séparable convenable et à restreindre $V$ on peut supposer que ce dernier est un voisinage élémentaire de $P$ dans $\mathbb{A}_k^{1,an}$.

**(1.11.1)** *Le cas où $P$ est de type (1) ou (4).* Le voisinage $V$ est alors un disque ouvert de la forme $0 \leqslant |t - a| < R$ pour un certain élément $a$ de $k$. On déduit du fait que $t$ est inversible sur $V$ l'inégalité $|a| \geqslant R$, d'où il découle que $|t(Q)| = |a|$ pour tout point $Q$ de $V$: la propriété ($i$) est donc vérifiée sur toute composante $U$ de $V - \{P\}$.

**(1.11.2)** *Le cas où $P$ est de type (2).* Dans ce cas $V$ est un disque ouvert $|t - a| < R$ privé d'un nombre fini de disques fermés $|t - a_j| \leqslant R_j$, et le point $P$ est défini par la semi-norme $\sum \alpha_i (t-a)^i \longmapsto \max\ |\alpha_i| r^i$ pour un certain réel $r$ strictement plus petit que $R$ et appartenant à $|k^*|$ ; on a $|a_j - a| \leqslant r$ pour tout $j$ et $|a_{j_1} - a_{j_2}| = r$ pour tout couple $(j_1, j_2)$ avec $j_1 \neq j_2$. Soit $x$ un élément de $k$ tel que $|x| = r$. Le corps résiduel de $k(P)$ est égal à $\tilde{k}(\tau)$ où $\tau$ est l'image de $(t - a)/x$. L'ensemble des composantes connexes de $V - \{P\}$ est donc en bijection avec celui des points fermés de $\mathbb{P}^1_{\tilde{k}}$. La composante qui correspond au point à l'infini est celle sur laquelle $|t - a| > r$. Soit $\alpha$ un élément de $k$ tel que $|\alpha| \leqslant 1$. La composante correspondant à l'image de $\alpha$ dans $\tilde{k}$ est celle sur laquelle $|(t - a)/x - \alpha| < 1$. On en déduit immédiatement que :

- si $|a| > r$ la fonction $|t|$ est constante égale à $|a|$ sur un voisinage $W$ de $P$ dans $V$.
- si $|a| \leqslant r$ la fonction $|t|$ est strictement plus grande que $r$ sur la composante de $V - \{P\}$ définie par l'inégalité $|t - a| > r$, strictement inférieure à $r$ sur la com-

posante correspondant à l'image de $-(a/x)$ dans $\tilde{k}$ et constante égale à $r$ sur les autres composantes de $V - \{P\}$.

**(1.11.3)** *Le cas d'un point de type (3).* Dans ce cas $V$ est une couronne $r' < |t-a| < r''$ et $P$ est défini par la semi-norme $\sum a_i(t-a)^i \mapsto \max |a_i| r^i$ pour un certain $r$ *dont aucune puissance non nulle n'appartient à* $|k^*|$. L'ouvert $V - \{P\}$ possède deux composantes, l'une sur laquelle $|t-a| < r$, et l'autre sur laquelle $|t-a| > r$.

- si $|a| > r$ la fonction $|t|$ est constante égale à $|a|$ sur un voisinage $W$ de $P$ dans $V$.
- si $|a| < r$ la fonction $|t|$ est strictement plus grande que $r$ sur la composante de $V - \{P\}$ définie par l'inégalité $|t-a| > r$ et strictement inférieure à $r$ sur l'autre composante.

La démonstration est terminée. □

## 1.4. LES GÉNÉRISATIONS

**(1.12)** *Les systèmes de composantes.* On désigne toujours par $k$ un corps complet pour une valeur absolue $|\ |$ non triviale et non archimédienne, par $\tilde{k}$ son corps résiduel et par $Y$ une $k$-courbe analytique irréductible et lisse. Soit $P$ un point de $Y$. Pour tout ouvert $V$ contenant $P$ on note $\mathcal{E}_V$ l'ensemble des composantes connexes de $V - \{P\}$. On appellera *système de composantes adhérent à* $P$ un élément de $\varprojlim \mathcal{E}_V$. Soit $E = (E_V)$ un tel système. Soit $f$ une fonction définie et inversible au voisinage de $P$. Posons $\lambda = |f(P)|$. De la proposition 1.11 on déduit l'existence d'un ouvert $V$ contenant $P$ tel que l'une des trois propriétés suivantes soit vérifiée:

(i) *Pour tout voisinage ouvert $W$ de $P$ contenu dans $V$ et tout point $Q$ de $E_W$ on a* $|f(Q)| = \lambda$

(ii) *Pour tout voisinage ouvert $W$ de $P$ contenu dans $V$ et tout point $Q$ de $E_W$ on a* $|f(Q)| < \lambda$

(iii) *Pour tout voisinage ouvert $W$ de $P$ contenu dans $V$ et tout point $Q$ de $E_W$ on a* $|f(Q)| > \lambda$

Selon que (i), (ii) ou (iii) est vérifiée on dit que $|f|$ est égale, strictement inférieure ou strictement supérieure à $\lambda$ *le long de* $E$. Le but de ce qui suit est de donner une description algébrique de ces systèmes de composantes, un peu analogue à celle des demi-branches de courbes algébriques réels en termes d'ordre sur le corps des fonctions.

DÉFINITION 1.13. Soit $P$ un point de $Y$. On désigne par $k(P)$ son corps résiduel et on note encore $|\ |$ le prolongement naturel à $k(P)$ de $|\ |$. On appelle *générisation* de $P$ un triplet $(\Gamma, p, \|\ \|)$ où:

- $\Gamma$ est un groupe ordonné commutatif noté multiplicativement.

- $p$ est un morphisme de groupes ordonnés de $\Gamma$ dans $\mathbb{R}_+^*$
- $|| \ ||$ est un morphisme de groupes surjectif de $k(P)^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\Gamma$ vérifiant:
  - La restriction de $p \circ || \ ||$ à $k(P)^*$ (identifié à $k(P)^* \times \{1\}$) est égale à $| \ |$.
  - La restriction de $p \circ || \ ||$ à $\mathbb{R}_+^*$ (identifié à $\{1\} \times \mathbb{R}_+^*$) est l'identité.
  - Si $a, b$ et $a+b$ sont éléments de $k(P)^*$ alors $||a+b|| \leqslant \max(||a||, ||b||)$
  - Si $x$ est un élément de $k^*$ alors $||(x, |x|^{-1})|| = 1$

*Remarques* 1.14. Si $(\Gamma, p, || \ ||)$ est une générisation de $P$ alors la restriction de $|| \ ||$ à $k(P)^*$ sera notée $|| \ ||_P$. C'est une valuation dont l'anneau est contenu dans celui de $| \ |$ et dont la restriction à $k^*$ est équivalente par le biais du morphisme $p$ à $| \ |$. Le groupe $\mathbb{R}_+^*$ sera identifié, *via* $|| \ ||$, à un sous-groupe de $\Gamma$. Pour $x$ appartenant à $k^*$ l'égalité $||(x, |x|^{-1})|| = 1$ peut alors être écrite $||x|| = |x|$. Le plus souvent, lorsque cela ne prêtera pas à confusion, une générisation $(\Gamma, p, || \ ||)$ sera simplement désignée par $|| \ ||$. On parlera alors de $\Gamma$ comme du *groupe de* $|| \ ||$.

*Exemple* 1.15. Le triplet $(\mathbb{R}_+^*, Id, | \ | \times Id)$ est une générisation qui est dite *triviale*.

*Exemple* 1.16. Soit $E = (E_V)$ un système de composantes adhérent à $P$. Soit $H$ le sous-groupe de $k(P)^* \times \mathbb{R}_+^*$ formé des couples $(f, \lambda)$ où $|f|$ est égal à $\lambda^{-1}$ le long de $E$, soit $\Gamma$ le quotient et $|| \ ||$ la surjection canonique associée. Le groupe $\Gamma$ est ordonné par la relation suivante: soit $\gamma$ un de ses éléments et $(f, \lambda)$ un antécédent de $\gamma$ par $|| \ ||$. On dit que $\gamma$ est supérieur ou égal à 1 si et seulement si $|f|$ est supérieure ou égale à $\lambda^{-1}$ le long de $E$. La définition de $H$ montre que cette condition ne dépend pas du couple $(f, \lambda)$ choisi. Le morphisme $(f, \lambda) \mapsto |f|\lambda$ de $k(P)^* \times \mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ passe au quotient par $H$ et induit donc un morphisme $p$ de groupes ordonnés de $\Gamma$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Le triplet $(\Gamma, p, || \ ||)$ est une générisation de $P$. Une telle générisation est appelée *générisation topologique associée à* $E$. A deux systèmes $E$ et $E'$ distincts sont associées deux générisations non isomorphes. Si $P$ est de type (1) ou (4) l'unique générisation topologique qui lui est associée est (isomorphe à) la générisation trivale.

**(1.17)** Soit $P$ un point de type (3). Soit $f$ une fonction inversible au voisinage de $P$ telle que $|f(P)|$ ne soit pas de torsion dans $|k(P)^*|/|k^*|$. Il y a exactement deux systèmes de composantes adhérents à $P$, l'un le long duquel $|f| > |f(P)|$, l'autre le long duquel $|f| < |f(P)|$. Soit $E$ l'un d'eux, par exemple celui donné par $|f| < |f(P)|$. Si $L$ est une extension finie de $k$ et $Q$ un point de $Y_L$ au-dessus de $P$ alors il y a un et un seul système de composantes adhérent à $Q$ au-dessus de $E$, le long duquel $|f| < |f(Q)|$ (notons que $|f(Q)|$ n'est pas de torsion dans $|L(Q)^*|/|L^*|$). Soit $|| \ ||$ la générisation topologique associée à $E$. Comme le corps résiduel de $k(P)$ est une extension finie de $\tilde{k}$ la valuation $|| \ ||_P$ est nécessairement équivalente à $| \ |$. L'élément $||f(P)||$ est infiniment proche inférieurement de $|f(P)|$ dans le groupe de $|| \ ||$.

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

**(1.18)** Soit $P$ un point de type (2). Le corps résiduel de $k(P)$ est de la forme $F(\mathcal{C})$ où $F$ est une extension finie de $\tilde{k}$ et $\mathcal{C}$ une $F$-courbe projective, lisse et géométriquement intègre. L'ensemble des systèmes de composantes adhérent à $P$ est en bijection avec celui des points fermés de $\mathcal{C}$. Soit $\mathcal{Q}$ un tel point et $E$ le système de composantes correspondant.

**(1.18.1)** Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $P$ telle que $|f(P)| = 1$. Dans ce cas l'image de $f(P)$ dans le corps $F(\mathcal{C})$ est non nulle. Si elle est inversible (resp. possède un zéro, resp. possède un pôle) en $\mathcal{Q}$ alors $|f|$ est égale (resp. strictement inférieure, resp. strictement supérieure) à $|f(P)|$ le long de $E$. Pour le voir on se ramène au cas où $P$ possède un voisinage élémentaire $V$. Si $V$ est une couronne l'assertion se vérifie directement. Si c'est un ouvert d'une courbe de genre $\geqslant 1$ à bonne réduction dont $P$ est le point ''générique'' elle découle des résultats de Bosch et Lütkebohmert établis dans [4] 2.2.

**(1.18.2)** Soit $|| \; ||$ la générisation topologique associée à $E$. La valuation $|| \; ||_P$ ayant un anneau inclus dans celui de $| \; |$, et étant équivalente à $| \; |$ sur $k^*$, correspond à la composée de $| \; |$ avec une $\tilde{k}$-valuation du corps $F(\mathcal{C})$, dont on déduit du 1.18.1 ci-dessus qu'elle est précisément celle associée à $\mathcal{Q}$. Si $L$ est une extension finie de $k$ et $Q$ un point de $Y_L$ au-dessus de $P$ alors l'ensemble des systèmes de composantes adhérents à $Q$ au-dessus de $E$ est en bijection avec l'ensemble des valuations discrètes du corps résiduel de $L(Q)$ dominant celle induite par $\mathcal{Q}$ sur $F(\mathcal{C})$, donc aussi avec celui des prolongements de $|| \; ||_P$ à $L(Q)$.

**(1.19)** On garde les notations du 1.18 ci-dessus, en supposant de plus que $P$ possède un voisinage élémentaire $U$ et que $E_U$ est une couronne. Alors $||k(P)^*|| \simeq (1-\varepsilon)^{\mathbb{Z}}|k^*|$, la notation purement formelle $1-\varepsilon$ désignant un élément infiniment proche inférieurement de 1. Soit $\tau$ une fonction définie sur un voisinage de $P$ telle que $|\tau(P)| = 1$ et telle que l'image de $\tau(P)$ dans $\tilde{k}(\mathcal{C})$ soit une uniformisante de l'anneau local en $\mathcal{Q}$. Alors $||\tau(P)|| = 1-\varepsilon$. Supposons que $\tau$ est définie et inversible sur $U$ (ce qui est toujours possible quitte à restreindre ce dernier). L'ouvert $E_U$ est isomorphe à une couronne $r < |t| < R$. On peut choisir cet isomorphisme (*cf.* [4], 2.2) de sorte qu'il envoie $\tau$ sur $t$. Soit $f$ une fonction inversible sur $U$. Ecrivons $||f(P)|| = (1-\varepsilon)^i|a|$ où $i$ appartient à $\mathbb{Z}$ et $a$ à $k^*$. Par la définition même de la générisation associée à $P$ il existe un voisinage ouvert $W$ de $P$ inclus dans $U$ tel que $|f(Q)| = |a||\tau(Q)|^i$ pour tout point $Q$ de $E_W$.

**(1.20)** Si $P$ est un point de type (3) possédant un voisinage élémentaire, on dispose d'un résultat analogue. On se restreint en effet à une couronne $r' < |t| < r''$ sur laquelle $f$ est définie et s'écrit donc $\sum_{\mathbb{Z}} a_i t^i$, où $|a_i|s^i$ tend vers zéro lorsque $|i|$ tend vers $+\infty$ pour tout $s$ strictement compris entre $r'$ et $r''$. Le point $P$ correspond à une semi-norme de la forme $\sum a_i t^i \mapsto \max |a_i| r^i$. On déduit de ce qui précède l'existence d'un réel $R$ et d'un entier $i_0$ tel que pour tout $s$ de $]-R; r[$ le réel

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

$\max|a_i|s^i$ soit atteint en $i_0$ et uniquement en $i_0$. Dès lors pour tout point $Q$ de la couronne $R < |t| < r$ on a $|f(Q)| = |a_{i_0}||t(Q)|^{i_0}$. La proposition suivante est certainement bien connue (*cf.* [1], 4.2.4 (iv)).

PROPOSITION 1.21. *Soit k un corps muni d'une valeur absolue non archimédienne et non triviale pour laquelle il est complet et soit Y une k-courbe analytique lisse. Soit f une fonction inversible sur Y. Il existe alors un polyèdre $\mathcal{P}$ (*cf. 1.6*) inclus dans Y possédant la propriété suivante:* sur toute composante connexe de $Y - \mathcal{P}$ la fonction $|f|$ est constante. *Ce polyèdre sera appelé* polyèdre de variation *de f.*

*Démonstration.* La question est purement locale. Soit $P$ un point de $Y$. On utilise les propriétés des morphismes finis et plats établies dans [2], 3.1 ainsi que la proposition 1.11 pour se ramener au cas où $P$ possède un voisinage élémentaire $W$ satisfaisant les conclusions de la proposition 1.11. Soit $E$ l'ensemble fini des composantes connexes $U$ de $W - \{P\}$ pour lesquelles il existe un voisinage ouvert $W$ de $P$ tel que sur $U \cap W$ la fonction $|f|$ soit partout strictement supérieure ou partout strictement inférieure à $\lambda$. On peut supposer, en utilisant notamment 1.19 et 1.20 que tout ouvert $U$ élément de $E$ est isomorphe à une couronne $R_U < |t| < r_U$ en tout point $Q$ de laquelle on a $|f(Q)| = |a_U||t(Q)|^{i_U}$ pour un certain entier $i_U$ (non nul) et un scalaire $a_U$. Pour un tel $U$ définissons $I_U$ comme l'intervalle $\{|\ |_s\}_{R_U<s\leqslant r_U}$ (inclus dans $U$) où pour tout $s$ on a désigné par $|\ |_s$ la norme $\sum a_i t^i \mapsto \max|a_i|s^i$ (le cas $s = r_U$ correspond au point $P$). Le polyèdre $\mathcal{P}$ est alors localement la réunion des $I_U$. □

**(1.22)** On garde les notations $k$ et $Y$ de la proposition ci-dessus. Soit $P$ un point de $Y$ de type (2) ou (3). Soit $E = (E_V)$ un système de composantes adhérent à $P$ et $\|\ \|$ la générisation topologique de $P$ associée. Notons $\mathcal{O}_Y(E)$ la limite inductive des $\mathcal{O}_Y(E_V)$ où $V$ parcourt l'ensemble des voisinages de $P$ et $k(E)$ la clôture intégrale de $k(P)$ dans $\mathcal{O}_Y(E)$.

PROPOSITION 1.23. *Le corps $k(E)$ est muni d'une valuation prolongeant $\|\ \|_P$ pour laquelle il est hensélien.*

*Démonstration.* Soient $x$ et $y$ deux éléments de $\mathcal{O}_Y(E)$ algébriques sur $k(P)$, soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ leurs polynômes minimaux respectifs et soit $L$ une extension finie de $k(P)$ dans laquelle $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont scindés. Il existe un voisinage affinoïde $V$ de $P$ tel que $x$ et $y$ soient définis sur $E_V$, tel que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ soient à coefficients dans $\mathcal{O}_Y(V)$ et tel que $\mathcal{M}(L)/\mathcal{M}(k(P))$ soit la fibre en $P$ d'un revêtement fini $\mathcal{L}$ de $V$. On peut supposer quitte à restreindre $V$ que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ s'écrivent respectivement $\prod(X - r_i)$ et $\prod(X - s_j)$ où les $r_i$ et les $s_j$ sont des fonctions sur $\mathcal{L}$. Soit $Q$ l'unique point de $\mathcal{L}$ au-dessus de $P$ et $W$ une composante connexe de $\mathcal{L} - \{Q\}$ au-dessus de $E_V$. Par hypothèse $\prod(x - r_i)$ et $\prod(y - s_j)$ sont nuls. L'intégrité de l'anneau des fonctions de $W$ assure alors que $x$ est égal à l'un des $r_i$ et $y$ à l'un des $s_j$. De la proposition 1.11 appliquée aux fonctions $r_i$ et $s_j$ sur $\mathcal{L}$ et des propriétés topologiques des morphismes finis ([2], 3.1) on déduit l'existence d'un voisinage $U$ de $P$ tel que sur

$E_U$ la fonction $|x|$ soit ou bien partout égale, ou bien partout strictement supérieure, ou bien partout strictement inférieure à la fonction $|y|$. Ceci permet de définir une valuation $|| \, ||_E$ sur $k(E)$ qui par construction prolonge $|| \, ||_P$. Il reste à montrer que $k(E)$ est hensélien pour $|| \, ||_E$. Considérons pour ce faire un polynôme unitaire $\mathcal{R}$ à coefficients dans l'anneau de $|| \, ||_E$ et une racine simple $\alpha$ de $\mathcal{R}$ modulo l'idéal maximal de cet anneau. Il existe alors un voisinage $V$ de $P$ tels que $\alpha$ et $\mathcal{R}$ proviennent respectivement d'un élément et d'un polynôme de $\mathcal{O}_Y(E_V)$ (notés encore $\alpha$ et $\mathcal{R}$) qui vérifient:

- $|\mathcal{R}(\alpha)| < 1$ sur $E_V$
- $|\mathcal{R}'(\alpha)| = 1$ sur $E_V$

Les anneaux locaux d'un espace analytique ainsi que leurs corps résiduels étant henséliens il en résulte l'existence et l'unicité locales, puis globales par recollement, d'une racine $\beta$ de $\mathcal{R}$ définie sur $E_V$ telle que $|\beta - \alpha| < 1$ sur $E_V$, ce qui achève la démonstration. □

## 2. Continuité partielle du corps résiduel et du groupe des valeurs

**(2.1)** On désigne toujours par $k$ un corps complet pour une valeur absolue non triviale et non archimédienne, et par $Y$ une $k$-courbe analytique lisse. Soit $P$ un point de $Y$. On suppose que $P$ est de type (2) ou (3). Soit $E = (E_V)$ un système de composantes adhérent à $P$ et soit $|| \, ||$ la générisation topologique associée. On note $k(P)_h$ le hensélisé de $k(P)$ pour $|| \, ||_P$. Soit $L$ la clôture séparable de $k$ dans $k(P)_h$. Le corps $L$ se plonge dans $k(E)$ (la notation $k(E)$ a été définie au 1.22). Soit $\chi$ appartenant à $k(E)$ engendrant l'image de $L$ au-dessus de $k$ (son existence est assurée par la séparabilité de $L/k$) et soit $\mathcal{R}$ son polynôme minimal. Il existe un ouvert $V$ contenant $P$ tel que $\chi$ soit défini sur $E_V$.

**(2.2)** Soit $M$ une extension galoisienne de $k$ de groupe $G$ possédant les deux propriétés suivantes (son existence est assurée quitte à restreindre $V$):

- Il existe un plongement de $L$ dans $M$.
- Il existe un voisinage ouvert $V$ de $P$ dans $Y$ tel que toute composante connexe de $V_M$ contienne un et un seul point au-dessus de $P$ dont elle constitue un voisinage élémentaire, et telle que l'image réciproque de $E_V$ dans $V_M$ soit somme disjointe de disques ouverts et de couronnes.

Soit $\pi$ la projection de $V_M$ sur $V$. Les composantes de $\pi^{-1}(E_V)$ constituent un $G$-ensemble en bijection, d'après 1.18 et 1.17, avec celui des extensions de $|| \, ||_P$ à chacun des composés de $k(P)$ et $M$, c'est-à-dire encore avec celui des composés de $k(P)_h$ et $M$. Ce $G$-ensemble correspond précisément à la $k$-algèbre étale $L$. Soit $W$ l'une des composantes de $\pi^{-1}(E_V)$. Elle possède un point terminal (au sens de [1] Prop. 4.1.3)) qui correspond à un point $Q_W$ de $Y_M$ au-dessus de $P$. Notons que $M$ est algébriquement clos dans le hensélisé de $M(Q_W)$ pour la valuation associée à la générisation que définit $W$ (en effet ce dernier se plonge par la proposition 1.23 dans un anneau de séries formelles sur $M$); ceci montre au passage que $L$ est en fait la clôture *algébrique* de $k$ dans $k(P)_h$. Si $W$ est stable sous l'action d'un élément $g$ de $G$ alors $g(Q_W) = Q_W$. Des propriétés topologiques de l'action d'un groupe fini sur un quasi-polyèdre ([1], 4.1.7), et du fait que si $I$ et $I'$ sont deux intervalles ouverts non vides de $W$ aboutissant à $Q_W$ alors $I \cap I'$ est un intervalle ouvert non vide aboutissant à $Q_W$, on déduit l'existence d'une famille $(I_W)$ d'intervalles ouverts non vides indexée par l'ensemble des composantes $W$ de $\pi^1(E_V)$ et tels que:

- Pour toute composante $W$ l'intervalle $I_W$ est inclus dans $W$ et aboutit à $Q_W$
- Pour toute composante $W$ et tout élément $g$ de $G$ on a $g(I_W) = I_{g(W)}$ et si $g(W) = W$ alors la restriction de $g$ à $I_W$ est l'identité.

Il en résulte que l'image $\pi(I_W)$ ne dépend pas de $W$. C'est un intervalle ouvert $I$ de $E_V$ aboutissant à $P$. Si $Q$ est un point de $I$ la fibre $\pi^{-1}(Q)$ est un $G$-ensemble qui par construction de $I$ est isomorphe à l'ensemble des composantes de $\pi^{-1}(E_V)$. D'autre part les composantes de $\pi^{-1}(V)$ sont des voisinages élémentaires des antécédents de $P$ qu'elles contiennent. On peut donc supposer, quitte à restreindre les intervalles $I_W$, que chacun d'eux est de la forme $\{|\ |_s\}_{R<s<r}$ (avec les notations de la démonstration de 1.21). En particulier $M$ est algébriquement clos dans le corps résiduel de tout point de chacun des $I_W$. Tout ceci montre que la clôture séparable (et en fait même algébrique) de $k$ dans $k(P)$ est isomorphe à $L$ pour tout point $P$ de $I$. Un élément primitif de cette clôture est visiblement donné par $\chi(P)$.

Soit $Q$ un point de $I$. Les deux composantes de $I - \{Q\}$ définissent deux systèmes de composantes adhérents à $Q$, et donc deux générisations de $Q$ que l'on dira *induites par* $I$. Considérons l'une de ces générisations et notons $k(Q)_h$ le hensélisé de $k(Q)$ pour la valuation associée. Ce qui précède montre que la clôture algébrique de $k$ dans $k(Q')$ pour tout point $Q'$ de $I$ suffisamment proche de $Q$ du côté qui définit la générisation en question est égale à celle de $k$ dans $k(Q)_h$. On en déduit que la clôture algébrique de $k$ dans $k(Q)_h$ est égale à celle de $k$ dans $k(Q)$ c'est-à-dire encore à l'extension de $k$ engendrée par $\chi(Q)$. On a finalement montré la

PROPOSITION 2.3 (continuité partielle du corps résiduel). *Soit $P$ un point de $Y$ de type (2) ou (3) et soit $||\ ||$ une générisation topologique de $P$ associée à un système $E = (E_V)$ de composantes. Soit $L$ la clôture algébrique de $k$ dans le hensélisé $k(P)_h$ de $k(P)$ pour $||\ ||_P$. Alors $L$ est séparable sur $k$. Il existe un ouvert $V$ contenant $P$, une fonction $\chi$ définie sur $E_V$ et un intervalle ouvert $I$ de $E_V$ aboutissant à $P$ tels que pour tout point $Q$ de $I$ la clôture algébrique de $k$ dans $k(Q)$ soit engendrée par $\chi(Q)$ et isomorphe à $L$. C'est aussi la clôture algébrique de $k$ dans chacun des deux hensélisés de $k(Q)$ correspondant aux deux générisations de $Q$ induites par $I$.* □

*Remarque 2.4.* De la proposition ci-dessus il découle aussitôt que la clôture algébrique de $k$ dans $k(E)$ est engendrée par $\chi$ et isomorphe à $L$. Si le corps $\tilde{k}$

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

est *parfait* on en déduit que la clôture algébrique de $\tilde{k}$ dans le corps résiduel de $k(E)$ est égale à $\tilde{L}$, qui est aussi dans ce cas le corps résiduel de $k(P)_h$.

**(2.5)** On considère toujours un corps $k$ complet pour une valeur absolue non triviale et non archimédienne. *On suppose de plus que* $|k^*|$ *est libre de rang 1 et que le corps résiduel* $\tilde{k}$ *est* parfait. Soit $Y$ une $k$-courbe analytique irréductible et lisse. Dans ce cas pour tout point $Q$ de $Y$ de type (2) ou (3) et toute générisation topologique $|| \; ||$ de $Q$ le groupe $||k(Q)^*||$ est libre de rang 2.

PROPOSITION 2.6 (continuité partielle du groupe des valeurs). *Soit $P$ un point de type (2) ou (3) de $Y$ et soit $|| \; ||$ une générisation topologique de $P$ associée à un système $E = (E_V)$ de composantes adhérent à $P$. Soient $b$ et $c$ deux fonctions définies et inversibles au voisinage de $P$ telles que la famille* $(||b(P)||, ||c(P)||)$ *soit libre dans* $||k(P)^*||$ *et y engendre un sous-groupe d'indice $d$. Il existe un ouvert $V$ contenant $P$ sur lequel $b$ et $c$ sont inversibles, et un intervalle ouvert $I$ inclus dans $E_V$ aboutissant à $P$, tels que pour toute générisation $|| \; ||'$ d'un point $Q$ de $I$ induite par $I$ la famille* $(||b(Q)||', ||c(Q)||')$ *soit libre dans* $||k(Q)^*||'$ *et y engendre un sous-groupe d'indice $d$.*

*Démonstration.* On procède en deux étapes.

**(2.6.1)** Considérons d'abord le cas où $P$ possède un voisinage élémentaire $V$ tel que $E_V$ soit une couronne $R < |t| < r$. Soit $f$ une fonction inversible au voisinage de $P$. D'après les résultats de 1.19 et 1.20 il existe un entier relatif $i$, un élément $a$ de $k^*$ et un réel $R' \geqslant R$ tels que pour tout point $Q$ de la couronne $R' < |t| < r$ on ait $|f(Q)| = |a||t(Q)|^i$. L'application $f \mapsto (|a|, i)$ induit un isomorphisme entre $||k(P)^*||$ et $|k^*| \times \mathbb{Z}$. Soit $I$ l'intervalle $\{| \; |_s\}_{R'<s<r}$ et soit $Q_0$ un point appartenant à $I$. On pose $s_0 = |t(Q_0)|$. Une fonction $f$ inversible au voisinage de $Q_0$ vérifie de même $|f(Q)| = |\alpha||t(Q)|^{j_1}$ (resp. $|f(Q)| = |\beta||t(Q)|^{j_2}$) pour des entiers $j_1$ et $j_2$ et des éléments $\alpha$ et $\beta$ de $k^*$ convenables sur une couronne du type $s_0 < |t| < s_1$ (resp. $s_2 < |t| < s_0$). Si $|| \; ||'$ désigne la générisation de $Q_0$ induite par la composante de droite (resp. de gauche) de $I - \{Q_0\}$, alors l'application $f \mapsto (\alpha, j_1)$ (resp. $f \mapsto (\beta, j_2)$) induit un isomorphisme entre $||k(Q_0)^*||'$ et $|k^*| \times \mathbb{Z}$. La conclusion de la proposition s'ensuit aussitôt.

**(2.6.2)** Il reste à traiter le cas général. Considérons une extension $M$ galoisienne de $k$ vérifiant les propriétés énoncées au 1.2. On reprend les notations alors introduites. Quitte à restreindre les intervalles $I_W$ on peut supposer que pour toute composante $W$ et pour toute générisation $|| \; ||'$ d'un point $Q$ de $I_W$ induite par $I_W$ la famille $(||b(Q)||', ||c(Q)||')$ est libre. Il est clair que cette propriété est encore vérifiée si l'on remplace $I_W$ par $I$. Notons que d'après la remarque 2.4 le corps résiduel de $|| \; ||'_Q$ est égal à $\tilde{L}$ pour toute générisation $|| \; ||'$ d'un point $Q$ de $I$ induite par $I$. Pour établir l'assertion relative à l'indice du sous-groupe engendré, il suffit de montrer le lemme suivant:

LEMME 2.6.3. *Soit $Q$ un point de $I$ et soit $\hat{Q}$ l'un de ses antécédants par $\pi$. Soit $W$ la composante de $\pi^{-1}(E_V)$ contenant $\hat{Q}$ et soit $Q_W$ son unique point terminal. Notons encore $|| \, ||$ la générisation de $Q_W$ associée à $W$. Soit $|| \, ||'$ l'une des deux générisations de $\hat{Q}$ induites par $I_W$, notons encore $|| \, ||'$ la générisation de $Q$ qu'elle domine. Alors* $||M(\hat{Q})^*||'/||k(Q)^*||' = ||M(Q_W)^*||/||k(P)^*||$.

*Démonstration.* Posons

$$e = ||M(Q_W)^*||/||k(P)^*|| \text{ et } e' = ||M(\hat{Q})^*||'/||k(Q)^*||'$$

Il y a $[L:k]$ choix possibles pour $\hat{Q}$, mais les indices $e'$ et $e$ ne dépendent pas de celui qui a été fait (l'extension $M/k$ étant galoisienne). Du 2.6.1 et du 2.6.2 ci-dessus on déduit que $e' \leqslant e$. La théorie générale des valuations permet d'affirmer ([5], Chap. 5 §8 Th. 1) que $e'[L:k][\tilde{M}:\tilde{L}] \leqslant [M:k]$, avec égalité si $Q$ est de type (2), car alors $|| \, ||'_Q$ est composée de deux valuations discrètes de rang 1. On a aussi $e[L:k][\tilde{M}:\tilde{L}] \leqslant [M:k]$. Si $Q$ est de type (2) le lemme est donc démontré. S'il est de type (3) il existe un point $Q_1$ de type (2) situé sur $I$ à sa gauche. D'après ce qui précède l'indice $e'_1$ correspondant à l'une quelconque des deux générisations de $Q_1$ induites par $I$ est inférieur ou égal à $e'$ et vérifie $e'_1[L:k][\tilde{M}:\tilde{L}] = [M:k]$. On en déduit que $e'[L:k][\tilde{M}:\tilde{L}] = [M:k]$, puis que $e = e'$ ce qui achève la démonstration du lemme, et donc celle de la proposition. □

## 2.1. LE CAS D'UN POINT ALGÉBRIQUE

**(2.7)** *Le cas purement inséparable.* On suppose toujours que $k$ est un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne $| \, |$, que $|k^*|$ est libre de rang 1 et que $\tilde{k}$ est parfait. Soit $Y$ une $k$-courbe analytique irréductible et lisse et soit $P$ un point algébrique de $Y$. On suppose que $P$ possède un voisinage élémentaire $V$, que $k$ est de caractéristique $p > 0$ et que $k(P)/k$ est une extension purement inséparable. Comme $V$ est isomorphe à un disque ouvert l'extension $k(P)/k$ est monogène. Soit $a$ un élément de $k$ et $n$ un entier tels que $k(P)$ soit engendré par une racine $\alpha$ du polynôme irréductible $t^{p^n} - a$. Soit $\xi$ une fonction définie au voisinage de $P$ telle que $\xi(P)$ soit une uniformisante de $k(P)$. Soit $\pi$ la projection $V_{k(\alpha)} \to V$. C'est un homéomorphisme ([1], Prop. 1.3.5). Le point $\pi^{-1}(P)$ correspond à $t = \alpha$. Soit $I$ l'intervalle $\{| \, |_s\}_{s<R}$ où pour tout $s$ on note $| \, |_s$ la norme $f = \sum a_i(t-\alpha)^i \mapsto \max |a_i| s^i$, et où $R$ est un réel strictement positif choisi de sorte que le disque $0 \leqslant |t-\alpha| < R$ soit inclus dans $V_{k(\alpha)}$, et que $|\xi|$ y soit constante. L'image $\pi(I)$ est un intervalle ouvert $J$ de $V$ aboutissant à $P$. Soit $Q$ un point de $I$ et soit $|| \, ||$ l'une de ses deux générisations induites par $I$. Alors $k(\alpha)$ est algébriquement clos dans le hensélisé correspondant de $k(\alpha)(Q)$. On en déduit que $k$ est algébriquement clos dans le hensélisé correspondant de $k(\pi(Q))$ (le fait qu'il n' y admette pas d'extension purement inséparable est déjà acquis par la prop. 2.3). D'après le 2.6.1 la famille $(||\xi(Q)||, ||(t-\alpha)(Q)||)$ est une base du groupe $||k(\alpha)(Q)^*||$. On en déduit que $(||\xi(\pi(Q))||, ||(t^{p^n} - a)(\pi(Q))||)$ engendre un sous-groupe de $||k(\pi(Q))^*||$ qui est d'indice $p^n$ dans $||k(\alpha)(Q)^*||$. Or $\widetilde{k(\alpha)} = \tilde{k}$ puisque

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

$\tilde{k}$ est parfait, donc $p^n$ est exactement l'indice de ramification de $k(\alpha)$ par rapport à $k$. On en déduit (par un raisonnement analogue à celui tenu lors de la démonstration du lemme 2.6.3) que l'indice $(||k(\alpha)(Q)^*|| : ||k(\pi(Q))^*||)$ est égal à $p^n$ pour tout point $Q$ de $I$. On en conclut que la famille $(||\xi(\pi(Q))||, ||(t^{p^n} - a)(\pi(Q))||)$ est une base de $||k(\pi(Q))^*||$.

**(2.8)** Soit maintenant un point algébrique *quelconque* $P$. On note $L$ la clôture séparable de $k$ dans $k(P)$. L'entier $[k(P) : L]$ est de la forme $p^n$ pour un certain nombre premier $p$. Soit $\tau$ et $\xi$ deux fonctions définies au voisinage de $P$, telles que $\tau$ soit une uniformisante de l'anneau local de $Y$ en $P$, et que $\xi(P)$ soit une uniformisante de $k(P)$. En combinant le résultat établi ci-dessus dans le cas purement inséparable avec une méthode analogue à celle suivie pour démontrer les propositions 2.3 et 2.6 on obtient la proposition suivante:

PROPOSITION 2.9. *Avec les notations ci-dessus, il existe un voisinage $V$ de $P$, une fonction $\chi$ définie sur $V$ et un intervalle $J$ de $V - \{P\}$ aboutissant à $P$ tels que:*

- *$\tau$ est définie sur $V$ et inversible sur $V - \{P\}$.*
- *$\xi$ est définie sur $V$ et $|\xi|$ y est constante.*
- *Pour tout point $Q$ de $J$ la clôture algébrique de $k$ dans chacun des deux hensélisés de $Q$ correspondant aux générisations induites par $J$ est séparable, isomorphe à $L$ et engendrée par $\chi(Q)$.*
- *Soit $Q$ un point de $J$ et $||\ ||$ une générisation de $Q$ induite par $J$. Alors $(||\xi(Q)||, ||\tau(Q)||)$ est une base de $||k(Q)^*||$.* □

## 3. La cohomologie des corps résiduels de $Y$

**(3.1)** Soit $k$ un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne $|\ |$. On suppose que $|k^*|$ est libre de rang 1 et que le corps résiduel $\tilde{k}$ est fini ; autrement dit $k$ est un *corps local*. On note $p$ la caractéristique de $\tilde{k}$. Soit $Y$ une $k$-courbe analytique irréductible et lisse. Pour tout entier $n$, et pour tout site sur lequel cela a un sens, on notera $\mu_n$ le faisceau des racines $n$-ièmes de l'unité.

### 3.1. ETUDE CAS PAR CAS

**(3.2)** Soit $P$ un point de $Y$ et soit $n$ un entier premier à $p$. On se propose de décrire le groupe de cohomologie étale (au sens classique) $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$. L'étude se fait tout d'abord en distinguant les différents types de points.

**(3.2.1)** *Le cas où $P$ est de type (1) ou (4).* Le corps $k(P)$ est alors hensélien pour une valuation dont le groupe des valeurs est inclus dans la clôture divisble de $|k^*|$ dans $\mathbb{R}^*$ (laquelle est isomorphe à $(\mathbb{Q}, +)$) et dont le corps résiduel est une extension

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

algébrique de $\tilde{k}$. La dimension cohomologique d'un tel corps (au moins en dehors de $p$) est inférieure ou égale à 2 et donc $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$ est trivial.

**(3.2.2)** *Le cas où $P$ est de type (2).* Le corps $k(P)$ est hensélien pour une valuation discrète $|\ |$ dont le corps résiduel est du type $F(\mathcal{C})$ où $F$ est une extension finie de $\tilde{k}$ et $\mathcal{C}$ une $F$-courbe projective, lisse et géométriquement connexe. Dans ce cas (et compte tenu du fait que la dimension cohomologique de $F(\mathcal{C})$ est 2) le groupe $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$ s'identifie, *via* l'application résidu ([6], §3.6 et [11], §2) au groupe $H^2(F(\mathcal{C}), \mu_n)$; et ce dernier groupe est isomorphe par la théorie du corps de classes global au noyau de

$$\bigoplus_P \mathbb{Z}/n \xrightarrow{\Sigma} \mathbb{Z}/n$$

où $P$ parcourt l'ensemble des points fermés de $\mathcal{C}$. Indiquons brièvement comment calculer certaines classes (c'est classique, *cf.* par exemple [7], prop. 1.3): soit $Q$ un point fermé de $C$. Soit $d$ le PGCD de $n$ et de $[F(Q) : F]$. Soit $\varpi$ une uniformisante de $k(P)$, et $\tau$ un élément de $k(P)$ tel que $|\tau| = 1$ et tel que l'image de $\tau$ dans $F(\mathcal{C})$ soit d'ordre exactement 1 en $Q$. Soit enfin $\alpha$ la classe dans $H^1(k(P), \mathbb{Z}/n)$ de l'extension non ramifiée provenant de l'unique extension de degré $n$ de $F$ (munie du Frobenius). Notons $(\tau)$ et $(\varpi)$ les classes respectives de $\tau$ et $\varpi$ dans $k(P)^*/(k(P)^*)^n \simeq H^1(k(P), \mu_n)$. Alors le résidu correspondant à $Q$ de la classe $\alpha \cup (\tau) \cup (\varpi)$ est l'élément $d$ de $\mathbb{Z}/n$. Notons que si $m$ est un multiple de $n$ la flèche $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(k(P), \mu_m^{\otimes 2})$ correspond, au niveau de chaque point fermé de $\mathcal{C}$, à l'injection $1 \mapsto m/n$ de $\mathbb{Z}/n$ dans $\mathbb{Z}/m$

**(3.2.3)** *Le cas où $P$ est un point de type (3).* Traitons plus généralement le cas d'un corps $K$ hensélien pour une valuation $|\ |$ dont le groupe $|K^*|$ est libre de rang 2 et le corps résiduel fini de caractéristique $p$ (ces propriétés sont, bien entendues, vérifiées en particulier par $k(P)$ ). Soit $L$ une clôture séparable de $K$ et soit $G$ le groupe de Galois de $L/K$. Notons $H$ le sous-groupe de ramification de $G$. C'est un pro-$p$-groupe distingué et donc $H^3(G, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq H^3(G/H, \mu_n^{\otimes 2})$. On dispose d'autre part d'une suite exacte

$$1 \to I/H \to G/H \to \hat{\mathbb{Z}} \to 1$$

où $I$ est le sous-groupe d'inertie de $G$. Choisissons une base de $|K^*|$ comme $\mathbb{Z}$-module. On en déduit un isomorphisme entre $I/H$ et $\mathrm{Hom}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2, \overline{F}^*)$ (c'est bien connu, voir par exemple la démonstration de [2], prop. 2.4.4), c'est-à-dire entre $I/H$ et $(\hat{\mathbb{Z}}(1)_{\neq p})^2$ où $\hat{\mathbb{Z}}(1)_{\neq p}$ désigne la limite projective des $\mu_m$ pour $m$ premier à $p$.

La dimension cohomologique de $I/H$ est donc 2, et la suite spectrale de Hochschild–Serre donne de ce fait un isomorphisme entre $H^3(G/H, \mu_n^{\otimes 2})$ et $H^1(\hat{\mathbb{Z}}, H^2(I/H, \mu_n^{\otimes 2}))$. Le terme $H^2(I/H, \mu_n^{\otimes 2})$ (l'action de $I/H$ est triviale) se calcule lui-même à l'aide d'une suite spectrale: il est isomorphe à

$$H^1(\hat{\mathbb{Z}}(1)_{\neq p}, H^1(\hat{\mathbb{Z}}(1)_{\neq p}, \mu_n^{\otimes 2}))$$

donc à $H^1(\hat{\mathbb{Z}}(1)_{\neq p}, \mu_n)$ et finalement à $\mathbb{Z}/n$. On en déduit un isomorphisme entre $H^3(G, \mu_n^{\otimes 2})$ et $\mathbb{Z}/n$ *qui dépend du choix de la base de* $|K^*|$. Un changement de base de déterminant $\varepsilon$ (avec $\varepsilon$ égal à 1 ou $-1$) multiplie cet isomorphisme par $\varepsilon$. L'isomorphisme $H^3(G, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{Z}/n$ est donc en fait bien déterminé après le choix d'une "orientation" sur $|K^*|$. Notons que si $m$ est un multiple de $n$ la flèche $H^3(G, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(G, \mu_m^{\otimes 2})$ correspond à l'injection $1 \mapsto m/n$ de $\mathbb{Z}/n$ dans $\mathbb{Z}/m$. Indiquons brièvement, là encore, comment se calculent certaines classes de cohomologie: soit $h$ de la forme $\alpha \cup (b) \cup (c)$ où $\alpha$ désigne la classe de l'unique extension non ramifiée de groupe $\mathbb{Z}/n$ (engendré par le Frobenius) du corps $K$ dans $H^1(K, \mathbb{Z}/n)$, et $(b)$ et $(c)$ les classes respectives de deux éléments $b$ et $c$ de $K^*$ dans $K^*/(K^*)^n = H^1(K, \mu_n)$. Si $(|b|, |c|)$ est de rang strictement inférieur à 2 alors $h$ est nulle. Si $(|b|, |c|)$ est une base directe de $|K^*|$ alors $h = 1$ dans $\mathbb{Z}/n$. Les autres cas se déduisent de celui-ci par multilinéarité et antisymétrie du cup-produit.

*Remarque 3.2.4.* Pour justifier le calcul de la classe $h$, on peut remarquer la chose suivante: si le groupe de $|K^*|$ possède un sous-groupe convexe non trivial le résultat énoncé est vrai (en décomposant $|\ |$ en deux valuations discrètes de rang 1 et en appliquant à chacune d'elles les résultats classiques déjà évoqués, *cf.* [7] prop. 1.3). Or il peut se traduire uniquement en termes de cohomologie des groupes, une fois que l'on dispose de l'isomorphisme entre $I/H$ et $\mathrm{Hom}((\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^2, \overline{F}^*)$, lequel est construit sans faire référence à l'ordre dont est muni $|K^*|$. Il est donc valable aussi dans notre cas, où $|k(P)^*|$ n'a pas de sous-groupe convexe non trivial.

### 3.2. PRÉSENTATION UNIFIÉE

**(3.3)** La notion de générisation topologique associée à un système de composantes va permettre de donner une description de la cohomologie de $k(P)$ indépendante de la nature du point $P$.

PROPOSITION 3.4. *A tout système de composantes E adhérent à P peut être associée une flèche* $H^3(k(P),\ \mu_n^{\otimes 2}) \to \mathbb{Z}/n$ *, que l'on appellera* résidu selon *E, de sorte que la suite*

$$0 \to H^3(k(P),\ \mu_n^{\otimes 2}) \to \bigoplus_{\text{syst. comp.}} \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$$

*soit exacte.*

*Démonstration.* Soit $E$ un tel système de composantes et soit $(\Gamma, p, \|\ \|)$ la générisation topologique associée. Si $P$ est de type (1) ou (4) alors le groupe $H^3(k(P),\ \mu_n^{\otimes 2})$ est trivial, et on l'envoie dans $\mathbb{Z}/n$ par l'application nulle (la seule possible ! ). Si $P$ est de type (2) ou (3) alors $(\Gamma, p, \|\ \|)$ est non triviale, le groupe

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

$||k(P)^*||$ est libre de rang 2 et le corps résiduel de $||\ ||$ est fini. On a vu en 3.2.3 qu'il existait dans ce cas un isomorphisme naturel entre $H^3(k(P)_h, \mu_n^{\otimes 2})$ et $\mathbb{Z}/n$, où $k(P)_h$ désigne un hensélisé de $k(P)$ pour $||\ ||_P$, *à condition d'avoir choisi une orientation sur* $||k(P)^*||$. Or la donnée de $(\Gamma, p, ||\ ||)$ induit une telle orientation. Soit en effet $(||x||, ||y||)$ une base de $||k(P)^*||$. On se ramène d'abord par un changement de base direct, au cas où $||x||/||y||$ n'appartient pas à $\mathbb{R}_+^*$ (identifié à un sous-groupe de $\Gamma$, *cf.* 1.14): si $||y|| = \lambda||x||$ alors $(||x||, \lambda)$ a même orientation que $(||x||, ||y||)$ et $||x||$ n'appartient pas à $\mathbb{R}_+^*$ puisque $(\Gamma, p, ||\ ||)$ n'est pas triviale. On note ensuite $\lambda = |x|$ et $\mu = |y|$. Par construction, $||x||\lambda^{-1}$ et $||y||\mu^{-1}$ sont deux éléments infiniment proches de 1 et distincts. On décrète que la base $(||x||, ||y||)$ est directe si et seulement si $||x||\lambda^{-1} < ||y||\mu^{-1}$; par cette méthode on peut en fait plus généralement définir l'orientation d'une famille libre de $||k(P)^*||$. Ceci étant posé on envoie $H^3(k(P),\ \mu_n^{\otimes 2})$ dans $\mathbb{Z}/n$ par la flèche composée

$$H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(k(P)_h, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{Z}/n$$

L'exactitude de la suite se démontre en distinguant trois cas: celui où $P$ est de type (1) ou (4) est immédiat car il y a alors un seul système de composantes adhérent à $P$, et $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2}) = 0$. Si $P$ est de type (2), l'exactitude provient de la description du groupe $H^2(F(\mathcal{C}), \mu_n)$ donnée plus haut et de la compatibilité entre les calculs du 3.2.2, ceux du 3.2.3 et la convention d'orientation adoptée ci-dessus. Si $P$ est de type (3) alors il y a exactement deux systèmes de composantes adhérents à $P$, dont les générisations induisent la même valuation sur $k(P)^*$, équivalente à $|\ |$. Les orientations de $|k(P)^*|$ induites par ces générisations sont opposées, et de ce fait les deux isomorphismes que l'on en tire entre $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$ et $\mathbb{Z}/n$ sont de somme nulle, ce qui achève la démonstration. □

## 4. Le groupe $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$

**(4.1)** On suppose toujours que $k$ est un corps local de caractéristique résiduelle $p$. Soit $Y$ une $k$-courbe analytique irréductible et lisse. Soit $V$ un sous-espace analytique de $Y$. Deux sites peuvent lui être associés: le site $V_{top}$ qui correspond à l'espace topologique sous-jacent, et le site étale (analytique) $V_{ét}$ ([2], 4.1). Le morphisme de sites $Y_{ét} \to Y_{top}$ est noté $\pi^{an}$. Soit $n$ un entier premier à $p$ et soit $P$ un point de $Y$. La fibre du faisceau $\mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}$ en $P$ s'identifie à $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$ ([2], prop. 4.2.4). Ceci permet de définir pour toute section $h$ appartenant à $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$ un élément $h(P)$ de $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$. Cette application d'évaluation $P \mapsto h(P)$ va être utilisée pour donner une description topologique de $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$ (théorème 4.2 ci-dessous). Rappelons que les notions de *polyèdre* et de *cochaîne harmonique* ont été définies au 1.6 et au 1.9; le *squelette* $\Delta$ de $Y$ est un polyèdre fermé dans $Y$ défini par Berkovich ([1], prop. 4.1.3 et 4.1.4).

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 4.2. *Soit $h$ appartenant à $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$. L'ensemble $\mathcal{P}_h$ des points $P$ de $Y$ tels que $h(P)$ soit non nulle est un polyèdre fermé dans $Y$ et appelé* polyèdre de *$h$. Il est inclus dans le squelette $\Delta$ de $Y$. Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre de $Y$; munissons-le d'une orientation arbitraire. Le sous-groupe de $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$ formé des sections dont le polyèdre est contenu dans $\mathcal{P}$ est alors naturellement isomorphe au groupe des cochaînes harmoniques sur $\mathcal{P}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/n$.*

*Démonstration.* Comme $h(P)$ est la fibre de $h$ au point $P$ l'ensemble des $P$ tels que $h(P) = 0$ est un ouvert de $Y$. Soit $P$ un point de $Y$. Le groupe $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$ est isomorphe d'après la proposition 3.4 au noyau de

$$\bigoplus_{\text{syst. comp.}} \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n$$

Soit $E = (E_V)$ un système de composantes adhérent à $P$ et $\| \ \|$ la générisation topologique associée. Soit $\delta$ appartenant à $\mathbb{Z}/n$ le résidu de $h$ selon $E$.

**(4.2.1)** *Le cas où $\delta$ est nul.* Supposons que $\delta = 0$. Cela signifie que la restriction de $h$ au hensélisé $k(P)_h$ de $k(P)$ pour $\| \ \|_P$ est nulle. Il existe donc une extension galoisienne $L$ de $k(P)$ de groupe $G$ telle que:

- $h$ est définie par un $G$-cocycle (c'est-à-dire un 3-cocycle de Čech associé au revêtement Spec $L \to$ Spec $k(P)$).
- Si $H$ désigne l'un des groupes de décomposition de $\| \ \|_P$ dans $G$ alors la restriction de $h$ à $H$ est triviale.

Il existe un voisinage affinoïde $U$ de $P$ et un revêtement étale galoisien $\mathcal{L}$ de $U$ de groupe $G$ dont la fibre en $P$ est $\mathcal{M}(L)/\mathcal{M}(k(P))$. Quitte à restreindre $U$, on peut toujours supposer que $h$ provient d'une classe de $H^3(U_{ét}, \mu_n^{\otimes 2})$ donnée par un 3-cocycle du revêtement $\mathcal{L} \to U$, et que la restriction de ce 3-cocycle à $H$ est un cobord. On peut aussi supposer que le revêtement quotient $\mathcal{L}/H$ de $U$ est donné par un polynôme $R$ à coefficients dans l'anneau des fonctions de $U$. Par définition de $H$ ce polynôme est entièrement décomposé dans le hensélisé de $k(P)$ pour $\| \ \|_P$. Il l'est donc *a fortiori* dans le corps $k(E)$ défini en 1.22. On peut par conséquent, quitte à restreindre encore $U$, supposer que $R$ s'écrit $\prod(x - \alpha_i)$ où les $\alpha_i$ sont des éléments de l'algèbre des fonctions sur $E_V$, l'ouvert $V$ étant l'intérieur de $U$. En tout point de $E_V$ les $\alpha_i$ prennent des valeurs distinctes. Il en résulte que le revêtement $\mathcal{L}/H$ est trivial au-dessus de $E_V$. Or comme la classe $h$ se trivialise sur $\mathcal{L}/H$ (l'un des cocycles qui la définit y devenant un cobord) elle est finalement trivale sur $E_V$.

**(4.2.2)** *Le cas général.* Revenons au cas général où le résidu de $h$ est un certain élément $\delta$ de $\mathbb{Z}/n$. Si $\delta$ est non nul alors $P$ est de type (2) ou (3) et donc $\|k(P)^*\|$ est libre de rang 2. Le corps résiduel de $\| \ \|$ est un corps fini $\mathcal{F}$ contenant $\tilde{k}$. Soit $m$ le degré de $\mathcal{F}$ au-dessus de $\tilde{k}$ et soit $d_1$ le PGCD de $m$ et $n$. Ecrivons $m = m_0 d_2 d_1$ où $m_0$ est premier avec $d_1$, et où tous les facteurs premiers de $d_2$ divisent $d_1$. Posons $d = d_2 d_1$. Alors le PGCD de $m$ et $nd$ est $d$. L'élément 1 de

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

$H^1(\tilde{k}, \mathbb{Z}/nd) \simeq \mathbb{Z}/nd$ est envoyé sur $d$ dans $H^1(\mathcal{F}, \mathbb{Z}/nd) \simeq \mathbb{Z}/nd$. Soit $\alpha$ la classe de l'extension non ramifiée de $k$ de degré $nd$. Soient $B$ et $C$ deux fonctions définies et inversibles sur un voisinage $V$ de $P$ telles que $(||B(P)||, ||C(P)||)$ soit une base *directe* de $||k(P)^*||$ (pour l'orientation définie lors de la démonstration de la proposition 3.4). On peut toujours supposer que $||B(P)||/||C(P)||$ n'appartient pas à $\mathbb{R}_+^*$, et que $h$ provient d'une classe (notée encore $h$) de $H^3(V_{\acute{e}t}, \mu_n^{\otimes 2})$. Soit $r$ un entier quelconque dont la classe modulo $n$ est $\delta$. Posons $h' = \alpha \cup (B^r) \cup (C) \in H^3(V_{\acute{e}t}, \mu_{nd}^{\otimes 2})$. Cette notation a bien un sens: $\alpha$ définit (par restriction de $k$ à $V$) un élément de $H^1(V_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/nd)$. Les fonctions inversibles $B^r$ et $C$ s'envoient dans $H^1(V_{\acute{e}t}, \mu_{nd})$ par la suite exacte de Kummer. La restriction de $h'(P)$ à $H^3(k(P)_h, \mu_{nd}^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{Z}/nd$ est égale à $d\delta$ (on utilise les résultats du 3.2.3), c'est-à-dire à l'image de $h(P)$ dans $H^3(k(P)_h, \mu_{nd}^{\otimes 2})$. Des propositions 2.3 et 2.6 on déduit l'existence d'un ouvert $V$ contenant $P$ et d'un intervalle ouvert $I$ de $E_V$ aboutissant à $P$ tels que:

- Les fonctions $B$ et $C$ sont définies et inversibles sur $V$.
- Soit $Q$ un point de $I$ et soit $||\ ||'$ l'une des deux générisations de $Q$ induites par $I$. Le corps résiduel de $||\ ||'_Q$ est isomorphe à $\mathcal{F}$, et $(||B(Q)||', ||C(Q)||')$ est une base de $||k(Q)^*||'$.

Quitte à restreindre $V$ et $I$ on peut de plus supposer que $I$ est inclus dans le polyèdre de variation (voir la proposition 1.21) des fonctions $B$ et $C$ sur $E_V$. Dans ce cas la classe de $\alpha \cup (B^r) \cup (C)$ est nulle sur $E_V - I$: en effet si $Q$ est un point de $E_V - I$ les fonctions $|B^r|$ et $|C|$ sont constantes au voisinage de $Q$, et la famille $(||B^r||', ||C||')$ est donc de rang au plus 1 pour toute générisation topologique $||\ ||'$ de $Q$. Soit $Q_0$ un point de $I$ et soit $||\ ||_0$ l'une des deux générisations de $Q_0$ induites par $I$, correspondant à la composante $I_0$ de $I - \{Q_0\}$. On cherche à déterminer l'orientation de $(||B(Q_0)||_0, ||C(Q_0)||_0)$ dans $||k(Q_0^*)||_0$. D'après la définition de l'orientation sur le groupe d'une générisation (définition donnée au 3. 4), elle peut être déterminée après une extension séparable convenable. On se ramène ainsi au cas où $I$ est de la forme $\{|\ |_s\}_{R<s<r}$, l'ouvert $E_V$ étant la couronne $R < |t| < r$. On peut alors écrire pour tout point $Q$ de $E_V$ les égalités $|B(Q)| = |\beta||t(Q)|^i$ et $C(Q) = |\gamma||t(Q)|^j$, où $\beta$ et $\gamma$ sont deux éléments de $|k^*|$ et $i$ et $j$ deux entiers relatifs. L'hypothèse que $||B(P)||/||C(P)||$ n'appartient pas à $\mathbb{R}_+^*$ signifie exactement que $i \neq j$. Posons $s_0 = |t(Q_0)|$. Pour déterminer l'orientation de $(||B(Q_0)||_0, ||C(Q_0)||_0)$ dans $||k(Q_0)^*||_0$ (resp. de $(||B(P)||, ||C(P)||)$ dans $||k(P)^*||$) il faut comparer les valeurs de $|B(Q)|/|\beta|s_0^i$ et de $|C(Q)|/|\gamma|s_0^j$ sur $I_0$ (resp. de $|B(Q)|/|\beta|r^i$ et $|C(Q)|/|\gamma|r^j$ sur $I$). La base $(||B(P)||, ||C(P)||)$ étant directe par hypothèse on en déduit que $i > j$. La base $(||B(Q_0)||_0, ||C(Q_0||_0)$ est donc indirecte si $I_0$ est l'intervalle $]Q_0, P[$ et est directe dans le cas contraire.

Des résultats de 3.2.3 on déduit que le résidu de $h'(Q_0)$ selon le système de composantes défini par $]Q_0P[$ (resp. par l'autre composante de $I_0 - \{Q_0\}$) est égal à $-d\delta$ (resp. à $d\delta$), ses autres résidus étant nuls. Considérons $h$ (*via* la flèche évidente) comme un élément de $H^3(V_{ét}, \mu_{nd}^{\otimes 2})$. La restriction de $h - h'$ à $H^3((k(P)_h, \mu_{nd}^{\otimes 2})$ étant nulle, on peut supposer d'après le 3.2.1, quitte à restreindre $V$, que $h = h'$ sur $E_V$. Si $Q$ est un point de $E_V$, les résidus de $h(Q)$ sont donc égaux à ceux de $h'$ calculés ci-dessus. Soit $k(Q)_h$ le hensélisé de $k(Q)$ associé à une générisation topologique de $Q$ ; la flèche $H^3(k(Q)_h, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(k(Q)_h, \mu_{nd})$ est simplement, modulo les isomorphismes habituels, l'injection $a \mapsto da$ de $\mathbb{Z}/n$ dans $\mathbb{Z}/nd$ (*cf.* 3.2.3). On en déduit que la classe $h$, vue à nouveau comme élément de $H^3(V_{ét}, \mu_n^{\otimes 2})$, est nulle sur $E_V - I$, et que pour tout point $Q$ de $I$ le résidu de $h(Q)$ selon la générisation induite par $]QP[$ (resp. par l'autre composante de $I - \{Q\}$) est égal à $-\delta$ (resp. à $\delta$), ses autres résidus étant nuls.

**(4.2.3)** *Nullité de h en dehors du squelette.* Ce qui vient d'être établi montre déjà que l'ensemble $\mathcal{P}_h$ des points de $Y$ en lesquels $h$ est non nulle est un *quasi-polyèdre* (au sens de [1], 4.1). On note $\Delta$ le squelette de $Y$ ([1], Prop. 4.1.3 et 4.1.4). On va montrer que $h$ est nulle en dehors de $\Delta$, ce qui prouvera du même coup que $\mathcal{P}_h$ est en fait un *polyèdre*. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe un point $Q$ de $Y$ situé en dehors de $\Delta$ tel que $h(Q)$ soit non nulle. Soit $U$ la composante connexe de $Y - \Delta$ contenant $Q$. L'espace $U$ peut se plonger (topologiquement) dans un quasi-polyèdre compact simplement connexe $\overline{U}$ tel que $\overline{U} - U$ soit ou bien vide ou bien un singleton. Si l'on est dans ce dernier cas, on appelle $P$ l'unique élément de ce singleton ; sinon on prend pour $P$ un point quelconque de $U - \{Q\}$. Si $Q'$ est un point de $U$ alors l'intervalle $]P, Q']$ est bien défini, et inclus dans $U$. On dispose ainsi d'une relation d'ordre sur $U$: *on dira que $Q' \leqslant Q''$ si $Q'$ appartient à* $]P, Q'']$. Soit $\Omega$ le sous-ensemble de $U$ formé des points $Q'$ tels que $Q'$ soit supérieur ou égal à $Q$ et tels que $[QQ'] \subset \mathcal{P}_h$. Alors $\Omega$ est non vide (il contient $Q$) et inductif : soit en effet $(Q_i)$ une famille totalement ordonnée de points de $\Omega$. La réunion des $]PQ_i]$ est un intervalle $I$ de $U$ contenant $Q$. Comme $\overline{U}$ est compact, et comme $I$ ne peut aboutir à $P$ pour des raisons de simple connexité, $I$ aboutit nécessairement à un point $Q'$ de $U$. Montrons que $Q'$ appartient à $\Omega$. Si $Q' = Q$ c'est clair. Sinon, l'intervalle $[QQ'[$ aboutit à $Q'$ et par hypothèse la classe $h$ est non nulle en chacun de ses points. Comme le lieu de nullité de $h$ est un ouvert on en déduit que $h(Q') \neq 0$ et donc que $Q'$ appartient à $\Omega$. Ce dernier est donc inductif, et possède par le lemme de Zorn un élément maximal $Q_m$. Comme $Q_m$ appartient à $\Omega$ la classe $h(Q_m)$ est non nulle. Le point $Q_m$ possède donc *au moins deux* systèmes de composantes distincts tels que les résidus correspondant de $h(Q)$ soient non nuls. Parmi ceux-ci il en existe donc un, notons-le $(E_V)$, qui ne rencontre pas l'intervalle $]PQ_m[$. Soit $V$ un voisinage de $Q_m$ inclus dans $U$ et $I$ un intervalle de $E_V$ aboutissant à $Q_m$. Le résidu de $h(Q_m)$ associé à $E_V$ étant non nul il existe, d'après 4.2.2, un point $Q'$ sur $I$ tel que $[Q_mQ']$ soit inclus dans $\mathcal{P}_h$. Le point $Q'$ appartient donc à $\Omega$, est différent de $Q_m$ et en est un majorant (puisque $E_V$ ne rencontre pas $]PQ_m]$), ce qui est absurde. La classe $h$ est donc bien nulle en dehors de $\Delta$.

**(4.2.4)** *Construction de $\phi$ à partir de $h$.* L'ensemble $\mathcal{P}_h$ des points en lesquels la classe $h$ est non nulle est bien un polyèdre; orientons-le. On définit une cochaîne $\phi$ sur $\mathcal{P}_h$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/n$ de la manière suivante: soit $S$ l'ensemble des sommets de $\mathcal{P}_h$ et $U$ une composante de $\mathcal{P} - S$. Soit $P$ un point de $U$, soit $I$ un intervalle ouvert de $U$ contenant $P$ et soit $J$ l'une des deux composantes de $I - \{P\}$. Notons $\delta$ le résidu de $h$ selon le système de composantes adhérent à $P$ induit par $J$. Si $J$ est orienté vers $P$ (resp dans la direction opposée à $P$) on prend pour valeur constante de $\phi$ sur $U$ l'élément $\delta$ (resp. $-\delta$) de $\mathbb{Z}/n$. L'étude réalisée au 4.2.2 et la proposition 3.4 montrent que cette valeur est bien indépendante des choix de $P, I$ et $J$ et que l'application $\phi$ ainsi construite est effectivement une cochaîne harmonique. Si $P$ est un point quelconque appartenant à $\mathcal{P}_h$ et $I$ un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{P}_h$, n'en rencontrant aucun sommet, aboutissant à $P$ et orienté vers $P$ (resp. dans la direction opposée à $P$) alors la valeur constante de $\phi$ sur $I$ est le résidu de $h$ (resp. l'oposé du résidu de $h$) selon le système de composantes adhérent à $P$ induit par $I$. On en déduit que la cochaîne $\phi$ caractérise $h$ : en effet $h$, section globale d'un faisceau, est uniquement déterminée par ses fibres, et la donnée d'un élément de $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$ est équivalente à la donnée d'une famille finie de résidus dans $\mathbb{Z}/n$ de somme nulle.

**(4.2.5)** *Construction de $h$ à partir de $\phi$.* Il reste à expliquer comment construire $h$ à partir d'un polyèdre orienté $\mathcal{P}$ et d'une cochaîne harmonique $\phi$ sur $\mathcal{P}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/n$. Il suffit de définir $h$ localement. En tout point $P$ de $\mathcal{P}$ on définit d'abord un élément de $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$ par la liste suivante de résidus : si $I$ est un intervalle de $\mathcal{P}$ aboutissant à $P$ et orienté vers $P$ (resp. dans la direction opposée à $P$) on assigne la valeur constante de $\phi$ sur $I$ (resp. l'opposé de cette valeur) au résidu correspondant au système de composantes défini par $I$. Les autres résidus sont décrétés nuls. Comme la somme algébrique des valeurs de $\phi$ en $P$ est nulle on définit effectivement ainsi une classe de $H^3(k(P), \mu_n^{\otimes 2})$. Elle provient d'une classe $h$ définie sur un voisinage $V$ de $P$. Les résultats du 4.2.2, du 4.2.3 et du 4.2.4 montrent que le polyèdre et la cochaîne qui lui sont associés sont, quitte à restreindre $V$, précisément $\mathcal{P} \cap V$ et $\phi_{|V}$. On en déduit, en utilisant 4.2.4, que les classes ainsi construites se recollent en une section globale de $\mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}$. La démonstration est terminée. □

*Remarque* 4.3. Soit $S$ un sous-ensemble fermé de $Y$ constitué de points de type (1) ou (4). Posons $Y' = Y - S$. La restriction

$$H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(Y'_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$$

est injective.

*Démonstration.* C'est immédiat, compte-tenu du fait que l'évaluation de toute classe en un point de type (1) ou (4) est triviale. □

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

*Remarque 4.4.* Soit $f : Z \to Y$ un morphisme quasi-fini de courbes algébriques irréductibles et lisses. Soit $h$ un élément de $H^0(Y_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$. Munissons son polyèdre $\mathcal{P}_h$ d'une orientation quelconque et notons $\phi$ la cochaîne associée. On peut décrire $f^*(h)$ ainsi : son polyèdre est inclus dans l'image réciproque $\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}_h$. Orientons $\mathcal{P}$ et décrivons la cochaîne $\psi$ alors associée à $f^*(h)$. Soit $I$ un intervalle ouvert inclus dans $\mathcal{P}$, n'en contenant aucun sommet, tel que la restriction de $f$ à l'adhérence de $I$ soit injective et tel que $f(I)$ ne contienne aucun sommet de $\mathcal{P}_h$. Soit $P$ un point auquel $I$ aboutit. Posons $Q = f(P)$. Notons $k(P)_h$ (resp. $k(Q)_h$) le hensélisé de $k(P)$ (resp. de $k(Q)$) associé au système de composantes défini par $I$ (resp. par $f(I)$). Soit $\psi_0$ (resp. $\phi_0$) la valeur constante de $\psi$ (resp. $\phi$) sur $I$ (resp. $f(I)$). Posons $\varepsilon = 1$ (resp. $-1$) si la restriction de $f$ à $I$ préserve (resp. change) l'orientation. Alors $\psi_0 = \varepsilon[k(P)_h : k(Q)_h]\phi_0$.

## 5. Le cas d'une courbe algébrique

**(5.1)** Soit $X$ une courbe algébrique intègre et lisse sur le corps $k$. On peut lui associer de manière naturelle une $k$-courbe analytique $X^{an}$ ([1], Th. 3.4.1). Le site topologique (resp. étale analytique) associé à $X^{an}$ est noté $X_{top}^{an}$ (resp. $X_{ét}^{an}$). On désigne par $X_{Zar}$ le site Zariski sur $X$ et par $X_{ét}$ le site étale (classique) sur le schéma $X$. Le morphisme de sites $X_{ét} \to X_{Zar}$ est noté $\pi$. Le théorème principal de cet article est le suivant:

THÉORÈME 5.2. *La flèche naturelle*

$$H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$$

*est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ sur $X_{ét}^{an}$ on dispose d'une suite spectrale $H^p(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^q\pi_*^{an}\mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X_{ét}^{an}, \mathcal{F})$. En tenant compte du fait que la dimension cohomologique de $X_{top}^{an}$ est 1, et que celle du site étale de chacun des anneaux locaux de $X^{an}$ est au plus 3, on en déduit l'existence de deux suites exactes de groupes abéliens

$$0 \to H^1(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^2\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(X_{ét}^{an}, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}) \to 0 \tag{1}$$

$$0 \to H^1(X_{top}^{an}, \mathbb{Z}/n) \to H^1(X_{ét}^{an}, \mathbb{Z}/n) \to H^0(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^1\pi_*^{an}\mathbb{Z}/n) \to 0 \tag{2}$$

De même, en utilisant la suite spectrale $H^p(X_{Zar}, \mathrm{R}^q\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \Rightarrow H^{p+q}(X_{ét}, \mu_n^{\otimes 2})$ on

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

établit l'existence d'une suite exacte

$$0 \to H^1(X_{Zar}, \mathrm{R}^2\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(X_{ét}, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to 0 \tag{3}$$

Considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & H^1(X_{Zar}, \mathrm{R}^2\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) & \to & H^3(X_{ét}, \mu_n^{\otimes 2}) & \to & H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \to & H^1(X_{ét}^{an}, \mathrm{R}^2\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}) & \to & H^3(X_{ét}^{an}, \mu_n^{\otimes 2}) & \to & H^0(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}) & \to 0 \end{array}$$

La flèche $H^3(X_{ét}, \mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(X_{ét}^{an}, \mu_n^{\otimes 2})$ est un isomorphisme d'après le théorème de comparaison de Berkovich ([2], Cor. 6.3.11). On en déduit que le morphisme $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2}) \to H^0(X_{top}^{an}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})$ est surjectif.

**(5.2.1)** *Le cas où $X$ est propre.* Afin de montrer l'injectivité dans ce cas, on va établir l'égalité des cardinaux des deux groupes. On peut remarquer qu'elle résulte directement, modulo la description explicite du squelette donnée par Berkovich ([2], 4.2.1, 4.3.1 et 4.3.2), du résultat de Kato ([8], Cor. 2.9) qui repose lui-même sur des travaux de Saito ([10]). Rappelons les étapes de la démonstration de Kato ($X$ est donc une courbe *propre*).

**(5.2.2)** *Le principe de la démonstration de Kato et Saito.*

(a) Le groupe $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ est un quotient de $H^3(X_{ét}, \mu_n^{\otimes 2})$. Ce dernier groupe est isomorphe, par les dualités de Poincaré et Tate, au dual de $H^1(X_{ét}, \mathbb{Z}/n)$. En conséquence $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ s'identifie au dual d'un sous-groupe $H$ de $H^1(X_{ét}, \mathbb{Z}/n)$. Le groupe $H$ est précisément celui *des classes de revêtements étales de $X$ (de groupe $\mathbb{Z}/n$) dont la fibre en tout point fermé est triviale* ([8], Lemma 2.4, Lemma 2.7 et [10], II §1 et §2).

(b) Si $\mathcal{X}$ désigne un modèle intègre, propre et régulier de $X$ au-dessus de l'anneau des entiers de $k$, dont on note $\mathcal{X}_s$ la fibre spéciale, alors tout revêtement étale de $X$ dont la fibre en chaque point fermé est triviale s' étend en un revêtement étale de $\mathcal{X}$ dont la fibre en chaque point fermé de $\mathcal{X}_s$ (et donc en tout point de $\mathcal{X}_s$ par la théorie du corps de classes) est triviale ([10], Prop. 2.2).

(c) Le sous-groupe $H$ s'identifie donc à celui des classes de revêtements étales de $\mathcal{X}_s$ de groupe $\mathbb{Z}/n$ à fibres triviales. Saito utilise ([10], dém. du th. 2.4) les suites exactes de localisation pour donner une description de $H$ en termes de la combinatoire des singularités de $\mathcal{X}_s$ (après s'être ramené au cas où celles-ci sont ordinaires).

**(5.2.3)** On va montrer comment établir l'égalité des cardinaux d'une autre manière, en utilisant uniquement (a) et (b). Ceci va donc constituer une preuve du résultat de Kato qui diffère en partie de celle donnée par ce dernier. La méthode suivie ici permet en outre d'établir au passage un résultat de dualité (proposition 5.2.5 ci-dessous).

Du théorème de comparaison de Berkovich ([2], Cor. 6.3.11) et de la dualité de Poincaré algébrique (ou bien directement de la version analytique cette dernière, [2] 7.3.1) on déduit l'existence d'un isomorphisme *trace*

$$H^4(X^{an}_{\acute{e}t}, \mu_n^{\otimes 2}) \simeq \mathbb{Z}/n$$

modulo lequel le cup-produit établit une dualité parfaite entre $H^3(X^{an}_{\acute{e}t}, \mu_n^{\otimes 2})$ et $H^1(X^{an}_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/n)$.

LEMME 5.2.4. *La restriction à* $H^1(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^2\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}) \times H^1(X^{an}_{top}, \mathbb{Z}/n)$ *de l'accouplement mentionné ci-dessus est nulle.*

*Démonstration.* Soit $h$ appartenant à l'image de

$$H^1(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^2\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2}) \to H^3(X^{an}_{\acute{e}t}, \mu_n^{\otimes 2})$$

et soit $h'$ appartenant à celle de

$$H^1(X^{an}_{top}, \mathbb{Z}/n) \to H^1(X^{an}_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/n)$$

Il existe un nombre fini de points $P_1, P_2, \ldots, P_r$ tels que toute composante connexe de $X - \{P_1, P_2, \ldots, P_r\}$ soit simplement connexe (pour le voir, on utilise [1] Prop. 4.1.4 et Prop. 4.1.6). On en déduit que $h'$ provient de la cohomologie à support dans $P_1, P_2, \ldots, P_r$. D'autre part d'après la suite exacte (1) la classe $h$ est localement triviale (au sens de $X^{an}_{top}$). Il existe en particulier $r$ ouverts disjoints $V_1, V_2, \ldots, V_r$ tels que chaque $V_i$ contienne $P_i$, et sur lesquels $h$ est nulle. Si $F$ désigne le complémentaire de la réunion des $V_i$ alors $h$ provient de la cohomologie à support dans $F$. Le cup-produit $h \cup h'$ provient donc de la cohomologie à support dans le fermé $\{P_1, P_2, \ldots, P_r\} \cap F = \emptyset$ et est de ce fait trivial, ce qui achève la démonstration du lemme. □

PROPOSITION 5.2.5. *Les suites exactes* (1) *et* (2) *sont naturellement duales l'une de l'autre.*

*Démonstration.* On dispose en vertu du lemme ci-dessus d'une application injective de $H^1(X^{an}_{top}, \mathbb{Z}/n)$ dans $H^0(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^3\pi_*^{an}\mu_n^{\otimes 2})^\vee$ (la notation $^\vee$ signifiant "groupe dual"). Or compte-tenu du fait qu'il existe une rétraction de $X^{an}$ sur son squelette $\Delta$, le premier est simplement égal au groupe de cohomologie singulière $H^1(\Delta, \mathbb{Z}/n)$ et le second est isomorphe, d'après la proposition 4.2 et le fait que $\Delta$ est un polyèdre fini compact, à $H_1(\Delta, \mathbb{Z}/n)$. Ces deux groupes ont de ce fait même cardinal et sont donc isomorphes, d'où la proposition. □

**(5.2.6)** *Suite de la démonstration du théorème*. Soit $H$ (resp. $H'$) le sous-groupe de $H^1(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/n)$ formé des classes dont l'image dans $H^1(X^{an}_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/n)$ s'annule en tout point $P$ (resp. en tout point *algébrique* $P$). D'après le théorème de comparaison de Berkovich ([2], Cor. 6.3.11) les groupes $H^1(X^{an}_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/n)$ et $H^1(X_{\acute{e}t}, \mathbb{Z}/n)$ sont isomorphes. En conséquence $H$ s'identifie à $H^1(X^{an}_{top}, \mathbb{Z}/n)$ donc à

$H^0(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^3\pi^{an}_*\mu_n^{\otimes 2})^\vee$. On dispose également d'un isomorphisme $H' \simeq H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})^\vee$ : on le déduit immédiatement du résultat rappelé en 5.2.2, a) après avoir remarqué que par définition $H'$ est exactement le groupe des classes de revêtements de $X$ de groupe $\mathbb{Z}/n$ *à fibres fermées triviales*. Soit $X' \to X$ un tel revêtement et soit $\mathcal{O}$ un anneau de valuation du corps $k(X)$ dominant celui de $k$. Le résultat de Saito rappelé en 5.2.2, b) implique que $X'$ s'étend en un $\mathbb{Z}/n$-revêtement de Spec $\mathcal{O}$ dont la fibre spéciale est triviale. Il en résulte que l'image de la classe de $X' \to X$ dans $H^1(k(X)_h, \mathbb{Z}/n)$ est nulle pour tout hensélisé $k(X)_h$ de $k(X)$ dont l'anneau domine $\mathcal{O}$. Dès lors la classe de $X' \to X$ dans $H^1(X_{ét}, \mathbb{Z}/n)$ appartient à $H$ et donc $H' = H$. On en déduit que $H^0(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^3\pi^{an}_*\mu_n^{\otimes 2})$ et $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ ont même cardinal, ce qu'on souhaitait établir.

**(5.2.7)** *Le cas général.* On ne fait plus maintenant d'hypothèse de propreté sur $X$. Soit $\overline{X}$ la compactification lisse de $X$ et $S$ l'ensemble $\overline{X} - X$. On pourrait conclure par des arguments de cardinalité, en utilisant la suite exacte de localisation relative à l'ouvert $X$ de $\overline{X}$. On va utiliser une autre méthode, reposant sur le lemme 5.2.8 qui donne une description topologique des résidus. L'ensemble $S$ s'identifie à $\overline{X}^{an} - X^{an}$. Soit $h$ un élément de $H^3(k(\overline{X}), \mu_n^{\otimes 2})$. Si $P$ est un point fermé de $\overline{X}$ on peut définir le résidu $\partial_P$ de $h$ en $P$ ([11], §2). C'est un élément de $H^2(k(P), \mu_n) \simeq \mathbb{Z}/n$. La classe $h$ est dite non ramifiée sur $X$ si et seulement si $\partial_P(h) = 0$ pour tout point fermé $P$ de $X$. Le groupe des classes non ramifiées sur $X$ s'identifie naturellement d'après les résultats de Bloch et Ogus ([3]) à $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$. Soit $h$ un élément de ce dernier groupe. Notons $h^{an}$ son image dans $H^0(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^3\pi^{an}_*\mu_n^{\otimes 2})$. Soit $\mathcal{P}$ un polyèdre fini en dehors duquel $h^{an}$ est nulle tel que pour tout point $P$ de $S$ il existe un intervalle ouvert $I_P$ inclus dans $\mathcal{P}$, n'en comprenant aucun sommet, et aboutissant à $P$. L'existence de $\mathcal{P}$ est assurée par la proposition 4.2. Orientons $\mathcal{P}$ de sorte que chaque $I_P$ soit dirigé vers $P$. Ce choix étant fait on peut associer à $h^{an}$, toujours d'après 4.2, une fonction $\phi$ continue à valeurs dans $\mathbb{Z}/n$ définie en tout point de $\mathcal{P}$ qui n'est pas un sommet.

LEMME 5.2.8. *Pour tout point $P$ de $S$ on a l'égalité $\partial_P(h) = \phi(I_P)$.*

*Démonstration.* Si $\partial_P(h)$ est nul alors $h$ provient de $H^0(\hat{X}_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$, où $\hat{X} = X \bigcup \{P\}$. La classe $h^{an}$ provient donc d'une classe de $H^0(\hat{X}^{an}_{top}, \mathrm{R}^3\pi^{an}_*\mu_n^{\otimes 2})$ nécessairement nulle en $P$ qui est de type (1), et donc nulle sur un voisinage $V$ de $P$. En conséquence $h^{an}$ est nulle sur $V - \{P\}$ et $\phi(I_P) = 0$. Le cas général se ramène à celui-ci en utilisant la formule classique de calcul des résidus ([7], Prop. 1.3), les résultats du 3.2.3, et la proposition 2.9. □

**(5.2.9)** *Fin de la démonstration du théorème 5.2.* Soit $h$ un élément de $H^0(X_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$ dont l'image $h^{an}$ dans $H^0(X^{an}_{top}, \mathrm{R}^3\pi^{an}_*\mu_n^{\otimes 2})$ est nulle. D'après le lemme ci-dessus les résidus de $h$ (vu comme élément du groupe $H^3(k(X), \mu_n^{\otimes 2})$ ) en chacun des points $P$ de $S$ sont nuls. La classe $h$ provient donc de

https://doi.org/10.1023/A:1013714010804 Published online by Cambridge University Press

$H^0(\overline{X}_{Zar}, \mathrm{R}^3\pi_*\mu_n^{\otimes 2})$. L'injectivité déjà établie dans le cas propre et la remarque 4.3 entraînent la nullité de $h$. La démonstration est terminée. □

*Remarque* 5.3. On peut appliquer les méthodes mises en œuvre dans ce texte à des situations analogues. Soit par exemple $k$ un corps complet pour une valeur absolue non archimédienne $|\ |$ telle que $|k^*|$ soit libre de rang 1 et telle que le corps résiduel $\tilde{k}$ soit *algébriquement clos*. Soit $Y$ une $k$-courbe analytique lisse et $n$ un entier premier à la caractéristique de $\tilde{k}$. Soit $\Delta$ le squelette de $Y$ (que l'on munit d'une orientation quelconque) et $Harm(\Delta, \mathbb{Z}/n)$ le groupe des cochaînes harmoniques sur $\Delta$ à valeurs dans $\mathbb{Z}/n$. On va indiquer rapidement comment calculer ${}_nH^2(Y_{\acute{e}t}, \mathbb{G}_m)$. On voit facilement, par des raisonnements standards reposant sur le théorème 90 de Hilbert, que ce groupe est isomorphe à ${}_nH^0(Y_{top}, \mathrm{R}^2\pi_*^{an}\mathbb{G}_m)$. Soit $h$ appartenant à ce dernier. Si $P$ est un point de type (1) ou (4) l'évaluation de $h$ en $P$ est nulle pour des raisons de dimension cohomologique. Si $P$ est de type (3) elle est à valeurs dans ${}_nH^2(k(P), \mathbb{G}_m) = H^2(k(P), \mu_n) \simeq \mathbb{Z}/n$ (ceci une fois choisi un isomorphisme entre $\mu_n$ et $\mathbb{Z}/n$). Si $P$ est de type (2) le corps résiduel de $k(P)$ est de la forme $\tilde{k}(\mathcal{C})$ où $\mathcal{C}$ est une $\tilde{k}$-courbe intègre, projective et lisse. L'évaluation de $h$ en $P$ appartient à $H^2(k(P), \mu_n)$ qui est isomorphe à $H^1(\tilde{k}(\mathcal{C}), \mathbb{Z}/n)$. Ce dernier groupe est muni d'une flèche surjective à valeurs dans Ker $\left(\bigoplus_{\mathcal{Q}} \mathbb{Z}/n \to \mathbb{Z}/n\right)$ où $\mathcal{Q}$ parcourt l'ensemble des points fermés de $\mathcal{C}$ (on utilise encore l'isomorphisme choisi entre $\mu_n$ et $\mathbb{Z}/n$) dont le noyau est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n)^{2g(P)}$, l'entier $g(P)$ étant le genre de $\mathcal{C}$. L'ensemble $E$ des $P$ de type (2) tels que $g(P)$ est non nul est discret. On en déduit (modulo des raisonnements analogues à ceux tenus tout au long de cet article) l'existence d'une suite exacte

$$0 \to \prod_E (\mathbb{Z}/n)^{2g(P)} \to {}_n\, H^2(Y_{\acute{e}t}, \mathbb{G}_m) \to \mathrm{Harm}(\Delta, \mathbb{Z}/n) \to 0$$

Ceci est vrai en particulier si l'on prend pour $Y$ l'analytification $X^{an}$ d'une $k$-courbe algébrique intègre et lisse $X$ ; dans ce cas l'ensemble $E$ est fini, et le groupe ${}_nH^2(X^{an}_{\acute{e}t}, \mathbb{G}_m)$ est isomorphe à ${}_nH^2(X_{\acute{e}t}, \mathbb{G}_m)$ par les théorèmes de comparaison de Berkovich (appliqués à $\mu_n$ et au groupe de Picard, et combinés avec la suite de Kummer). La suite exacte ci-dessus est alors essentiellement, au moins dans le cas propre, une réécriture d'un résultat connu : Ogg a en effet calculé ([9]) le groupe $H^1(k, A)$ pour n'importe quelle variété abélienne $A$ sur $k$ en fonction de la composante neutre de la fibre spéciale du modèle de Néron de $A$ ; et si $X$ est propre $H^2(X_{\acute{e}t}, \mathbb{G}_m)$ est isomorphe à $H^1(k, \mathrm{Pic}^0 X)$.

## References


1. Berkovich, V.: *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields.* Math. Surveys Monogr. 33, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990.
2. Berkovich, V.: Étale cohomology for non-archimedean analytic spaces, *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **78** (1993), 5–161.

3. Bloch, S. and Ogus, A.: Gersten's conjecture and the homology of schemes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4)* **7** (1974), 181–202.
4. Bosch, S and Lütkebohmert, W.: Stable reduction and uniformization of abelian varieties I, *Math. Ann.* **270** (1985), 349–379.
5. Bourbaki, N.: *Algèbre commutative*, Hermann, Paris, 1964.
6. Colliot-Thélène, J.-L.: Birational Invariants, Purity and the Gersten Conjecture, *Proc. Sympos. Pure Math.* **58**(1) (1995).
7. Colliot-Thélène, J.-L. et Ojanguren, M.: Variétés unirationnelles non rationnelles: au delà de l'exemple d'Artin et Mumford, *Invent. Math.* **97** (1989), 141–158.
8. Kato, K.: A Hasse principle for two-dimensional global fields, with an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène, *J. Reine Angew. Math.* **366** (1986), 142–183.
9. Ogg, A. P.: Cohomology of abelian varieties over function fields, *Ann. of Math.* **76** (1962), 185–212.
10. Saito, S.: Class-field theory for curves over local fields, *J. Number Theory* **21** (1985), 44–80.
11. Serre, J.-P.: *Cohomologie Galoisienne* (cinquième édition), Lecture Notes in Math. 5, Springer, New York, 1994.
12. Witt, E.: Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper, *J. Reine Angew Math.* **171** (1934), 4–11.