BULL. AUSTRAL. MATH. SOC. 46B15
VOL. 47 (1993) [427–434]

STRUCTURE DES CONES NORMAUX CONTENUS DANS UN ESPACE DE BANACH OU SON DUAL II

RICHARD BECKER

Let B be a Banach space and $X \subset B$ a normal cone such that the norm is monotone on X for the order determinated by X.

We study the sup, denoted by $i(X)$, of the $q \geqslant 1$ such that, for each $\varepsilon > 0$ and each n, there are $x_1, \ldots, x_n$ in X such that:

$$(1-\varepsilon).\left\|(a_k)\right\|_q \leqslant \left\|\sum_1^n a_k.x_k\right\| \leqslant (1+\varepsilon).\left\|(a_k)\right\|_q,$$

for all $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, where $\| \ \|_q$ is the norm in l^q.

We prove that $i(X)$ is the inf of the p for which we have:

$$\left(\sum_1^n \|x_k\|^p\right)^{1/p} \leqslant S_p.\left\|\sum_1^n x_k\right\| \quad \text{for all} \quad x_1, \ldots, x_n \text{ in } X.$$

The proof use a similar theorem of Krivine, concerning Banach Riesz spaces. Here conical measures are a useful tool. We establish a link with a preceding work in which we adapt the Maurey theory of factorisation of operators with values in a L^p space, to the case of normal cones, contained in a Banach space.

INTRODUCTION

Ce travail fait suite à un travail précédent ([**1**] ou [**2**]) mais en est relativement indépendant.

Soit X un cone convexe normal contenu dans un espace de Banach. Le but de ce travail est d'examiner s'il existe $p \geqslant 1$ tel que, pour tout n et tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans X tels que

$$(1-\varepsilon).\left\|(a_i)\right\|_p \leqslant \left\|\sum_1^n a_i.x_i\right\| \leqslant (1+\varepsilon).\left\|(a_i)\right\|_p,$$

pour tous $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$, où $\| \ \|_q$ désigne la norme l^q.

Received 14 May 1992

Notons que le cas $p = 1$ est trivial: il suffit, si $X \neq (0)$, de choisir $x_0 \in X$, de norme 1, et de prendre $x_1 = \cdots = x_n = x_0$. Dans ce travail les mesures coniques [**3**, Section 30.38.40] s'avérent un outil indispensable. Nous utilisons aussi un résultat de Krivine [**6**], concernant les espaces de Banach réticulés.

Nous faisons ensuite le lien avec un travail précédent ([**1**] ou [**2**]) et avec un autre travail de Krivine [**5**], concernant les théorèmes de factorisation. Nous terminons en donnant des applications aux espaces de Banach ordonnés et aux cones faiblement complets. Dans tout ce qui suit, sauf mention du contraire, B désigne un espace de Banach et B_1 sa boule unité; X sera un sous-cone convexe normal de B; on supposera que la norme est croissante sur X, pour l'ordre déterminé par X; c'est toujours possible [**7**, V.3.1].

On désignera par id_X l'application identique de X dans lui même.

Si $1 \leqslant q \leqslant \infty$ on note q' le nombre tel que $1/q + 1/q' = 1$.

DÉFINITION 1: Soit $q \geqslant 1$. Nous dirons que l'application id_X est $(q, 1)$ sommante si on a, pour tous $x_1, \ldots, x_n$ dans X:

$$\left(\sum_1^n \|x_k\|^q\right)^{1/q} \leqslant S_q . \left\|\sum_1^n x_k\right\| .$$

Soit $i(X)$ l'inf. des $q \geqslant 1$ tels que id_X soit $(q, 1)$ sommante, s'il en existe; sinon on pose $i(X) = +\infty$. On a $i(X) \geqslant 1$. Si $q > i(X)$ on voit que id_X est $(q, 1)$ sommante.

THÉORÈME 2. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout n, il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans X, tels que l'on ait, en posant $q = i(X)$:*

$$(1-\varepsilon). \|(a_k)\|_q \leqslant \left\|\sum_1^n a_k . x_k\right\| \leqslant (1+\varepsilon). \|(a_k)\|_q .$$

pour tous $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$.

De plus, soit $t \geqslant 1$ tel que, pour tout n, il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans X de norme 1, avec $\left\|\sum_1^n a_k . x_k\right\| \leqslant M . \|(a_k)\|_t$, pour tous $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$; on a alors $t \leqslant i(X)$.

PREUVE: Le théorème va résulter d'un théorème de Krivine [**6**, Théorème 0.1 et son commentaire], rappelé plus loin, de la construction suivante et du Théorème 5. $\square$

DÉFINITION 3: Soit $M_d(X)$ l'espace vectoriel réticulé des mesures coniques discrétes sur X.

On a $M_d(X) = \left\{\sum_1^n \pm\varepsilon_{x_k} \mid x_k \in X\right\}$. Rappelons que toute $\lambda \in M_d(X)$ est une forme linéaire sur l'espace vectoriel réticulé de fonctions sur X engendré par B' [**3**, Section 30.38.40].

On voit que $a.\varepsilon_x = \varepsilon_{a.x}$ pour tout $a \geqslant 0$. Si $\lambda = \sum_1^n \varepsilon_{x_k}$ soit $r(\lambda) = \sum_1^n x_k$ la résultante de λ. On munit l'espace $M_d(X)$ de la norme $\|\mu\| = \|r(|\mu|)\|$. C'est un espace normé réticulé: puisque la norme est croissante sur X on a: $(|\lambda| \leqslant |\mu|) \Rightarrow (\|\lambda\| \leqslant \|\mu\|)$. Notons que, si la norme n'est pas croissante sur X, l'application $\mu \rightsquigarrow \|\mu\|$ n'est pas une norme sur $M_d(X)$: prendre $\alpha = \varepsilon_x + \varepsilon_y$ et $\beta = \varepsilon_x - \varepsilon_y$ puis considérer l'inégalité triangulaire.

Proposition 4. *Si X n'est pas réduit à $\{0\}$ ou à (R^+), alors $M_d(X)$ contient $l^1(N)$ au sens des espaces réticulés, that is: il existe $\mu_1, \ldots, \mu_n$, dans $M_d(X)$, deux-à-deux étrangéres, de norme 1, telles que $\left\|\sum_1^n a_k.\mu_k\right\| = \sum_1^n |a_k|$ pour tous a_k, pas forcément $\geqslant 0$, et tout n.*

Preuve: Soit $x_0 \in X$, de norme 1, non situé sur une génératrice extrémale; il suffit de prendre des $\mu_n \geqslant 0$, deux-à-deux étrangéres, telles que $r(\mu_n) = x_0$. □

Théorème 5. *On a $i(M_d^+(X)) = i(X)$.*

De plus, pour tout $p \geqslant 1$, l'application id_X est $(p, 1)$ sommante si et seulement si $M_d(X)$ est de genre $\leqslant p$, c'est à dire:

$$\left(\sum_1^n \|\mu_k\|^p\right)^{1/p} \leqslant G_p. \left\|\sum_1^n \mu_k\right\| \text{ pour des } \mu_k \in M_d(X)$$

deux-à-deux étrangéres.

Preuve: Soit $p > i(X)$; on a pour toutes $\mu_k \in M_d^+(X)$:

$$\left\|\sum_1^n \mu_k\right\| = \left\|\sum_1^n r(\mu_k)\right\| \geqslant m. \left(\sum_1^n \|r(\mu_k)\|^p\right)^{1/p}$$

avec $m > 0$, puisque $p > i(X)$; d'òu $p \geqslant i(M_d^+(X))$, puisque $\|\mu_k\| = \|r(\mu_k)\|$.

Inversement, si $p > i(M_d^+(X))$, étant donnés $x_1, \ldots, x_n$ dans X, il suffit de considérer $\varepsilon_{x_1}, \ldots, \varepsilon_{x_n}$ pour voir que $p \geqslant i(X)$. Si on sait seulement que $M_d(X)$ est de genre $\leqslant p$, on montre que $\left(\sum_1^n \|x_k\|^p\right)^{1/p} \leqslant S_p. \left\|\sum_1^n x_k\right\|$ pour tous $x_k \in X$ en introduisant les ε_{x_k} et en groupant les éléments proportionnels.

Pour prouver la premiére partie du Théorème 2 il suffit d'appliquer le théoreme de Krivine [**6**, Théorème 0.1 et son commentaire]: il existe alors dans $M_d(X)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout n, des $\mu_1, \ldots, \mu_n$ deux-à-deux étrangéres, telles que l'on ait:

$$(1 - \varepsilon). \|(a_k)\|_p \leqslant \left\|\sum_1^n a_k.\mu_k\right\| \leqslant (1 + \varepsilon). \|(a_k)\|_p$$

https://doi.org/10.1017/S0004972700015252 Published online by Cambridge University Press

pour tous $a_1, \ldots, a_n$ pas forcément $\geqslant 0$.

Il suffit alors de prendre $x_k = r(|\mu_k|)$ pour $k = 1, \ldots, n$, pour avoir les inégalités du Théorème 2. En effet, puisque les μ_k sont deux-à-deux étrangéres, on a:

$$r\left(\left|\sum_1^n a_k.\mu_k\right|\right) = \sum_1^n |a_k| .x_k.$$

D'après la définition de la norme dans $M_d(X)$, le résultat est obtenu.

La premiére partie du Théorème 2 est donc prouvée.

Voici la preuve de la seconde partie:

Soit $p > i(X)$; on a alors $\|(a_k)\|_p \leqslant S_p.M.\|(a_k)\|_t$ puisque id_X est $(p, 1)$ sommante. D'ou $t \leqslant p$ et $t \leqslant i(X)$ en faisant $p \to i(X)$. ∎

REMARQUE 6. Au lieu d'introduire l'espace $M_d(X)$ et appliquer les résultats de Krivine [**6**] on aurait pu adapter les preuves de [**6**] au cadre des cones normaux.

7. Dans un travail précédent ([**1**] 8, 11 ou [**2**]) nous avions associé a tout cone convexe normal X, contenu dans un espace de Banach B, un intervalle $I_X \subset]1, +\infty[$ tel que:

(1°) Si $q \in I_X$, il existe C_q telle que:

Pour toute suite $x_1, \ldots, x_n$ de X il existe (α_n) avec $\|(\alpha_n)\|_{q'} = 1$ et $y_1, \ldots, y_n$ dans X, de sorte que $x_n = \alpha_n.y_n$ et $M_q((y_n)) \leqslant C_q.M_1((x_n))$ où

$$M_q((x_n)) = \sup\left\{\left(\sum_1^\infty |f(x_n)|^q\right)^{1/q} \mid f \in B_1'\right\}$$

(2°) Si $q > 1$ n'est pas dans I_X alors il existe C_q' telle que: Pour tout n il existe $x_1, \ldots, x_n$ dans X, de norme 1, tels que

$$\left\|\sum_1^n a_k.x_k\right\| \leqslant C_q'.\|(a_k)\|_{q'} \quad \text{pour tous} \quad a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$$

Notons ([**1**], 2) que, puisque X est normal, si $x_n \in X$ pour tout n on a $M_1((x_n)) \leqslant N_X.\left\|\sum_1^\infty x_n\right\|$ avec $N_X < \infty$.

DÉFINITION 8: Avec les notations de la Section 7 on pose $I(X) = 1$ si $I_X = \emptyset$, sinon $I(X)$ désigne l'extrémité droite de I_X ou $+\infty$.

THÉORÈME 9. *On a* $1/I(X) + 1/i(X) = 1$.

PREUVE: Elle résulte des deux lemmes suivants. ∎

https://doi.org/10.1017/S0004972700015252 Published online by Cambridge University Press

Lemme 10. *Soit $1 < q < \infty$; si $q \in I_X$ alors id_X est $(q', 1)$ sommante.*

Preuve: Il suffit d'utiliser la Section 7.1°: Avec ces notations on remarque que, pour tout k, on a:

$$\|y_k\| \leqslant M_q((y_n)) \leqslant C_q . M_1((x_n)) \leqslant C_q . N_X . \left\| \sum_1^\infty x_n \right\|$$

puis on utilise l'égalité $x_n = \alpha_n . y_n$, pour majorer $\left(\sum_1^\infty \|x_n\|^{q'} \right)^{1/q'}$ par $C_q . N_X . \left\| \sum_1^\infty x_n \right\|$. □

Lemme 11. *Soit $1 < q < \infty$; si $q > I(X)$, alors id_X n'est pas $(q', 1)$ sommante.*

Preuve: Soit $I(X) < q_1 < q$; d'aprés la Section 7.2° il existe, pour tout n, des $x_1, \ldots, x_n$ dans X, de norme 1, tels que $\left\| \sum_1^n x_k \right\| \leqslant C_q' . n^{1/q_1'}$. Si id_X était $(q', 1)$ sommante, on aurait $n^{1/q'} \leqslant S_{q'} . C_q' . n^{1/q_1'}$, ce qui est impossible, quand $n \to \infty$, puisque $q_1 < q$. □

12. Nous allons faire le lien avec certains travaux de Krivine, concernant les théorèmes de factorisation [**5**]: Rappelons que, si Y est un cone convexe contenu dans un e.l.c.s. E, et si f est une fonction définie sur Y, on pose pour $y \in Y$:

$$\widehat{f}(y) = \inf\{ y'(y) \mid y' \in E' \text{ et } y' \geqslant f \text{ sur } Y \}.$$

[**3**, Problem 30.1].

Dans ce paragraphe B est un espace de Banach réticulé et $X = B^+$; on voit alors que, pour $q > 1$, on a:

$(q \in I_X)$ si et seulement si (B' est de type $\geqslant q$, au sens de [**5**]) :

En effet, d'aprés ([**1**] 8,f ou [**2**]) la condition $q \in I_X$ équivaut à:

$$\widehat{h}(x) \leqslant F_q . \left(\sum_1^n \|x_k'\|^q \right)^{1/q} . \|x\|$$

pour toutes $x_1', \ldots, x_n'$ dans B' et tout $x \in X$, ou h est l'application définie sur X par $z \rightsquigarrow \left(\sum_1^n |x_k'(z)|^q \right)^{1/q}$.

Or, dans un espace de Banach réticulé, la fonction $\widehat{h}$ est donnée par l'élément $\left(\sum_1^n |x_k'|^q \right)^{1/q}$ de B', considéré par Krivine dans [**5**].

On a donc, immédiatement, d'aprés [**5**, Théorèmes 5 et 6] l'équivalence: $(q \in I_X)$ si et seulement si (B est de type $\leqslant q'$).

https://doi.org/10.1017/S0004972700015252 Published online by Cambridge University Press

13. Cas des espaces de Banach ordonnés. Soit B un espace de Banach ordonné par un cone convexe fermé et saillant B^+ tel que $B = B^+ - B^+$; on ne suppose pas forcément que B^+ soit normal. On sait alors que le cone $X = (B^+)^\circ$ est un sous - cone normal de B', qui est $\sigma(B', B)$ complet.

Nos résultats s'appliquent donc à $X \subset B'$.

On n'a pas forcément $B' = X - X$; cela équivaut à ce que B^+ soit normal [**7**, V.3.5]. De plus $X_1 = X \cap B'_1$ est $\sigma(B', B)$ compact.

On suppose que X_1 est une partie héréditaire de X; c'est le cas, par exemple, si $B_1 = \operatorname{conv}\big((B_1^+) \cup (-B_1^+)\big)$, ce qu'on peut toujours supposer [**7**, V.3.5].

Soit $M(X)$ l'espace des mesures coniques sur X, pour la dualité avec B: on a $M(X) = M^+(X) - M^+(X)$, où $M^+(X)$ est le cone des formes $\geqslant 0$ sur le treillis de fonctions sur X engendré par B, que l'on note $h(X, B)$. Comme X est $\sigma(B', B)$ complet, pour toute $\lambda \in M^+(X)$, il existe $r(\lambda) \in X$ tel que $\lambda(x) = (r(\lambda))(x)$ pour tout $x \in B$. On munit $M(X)$ de la norme $\|\mu\| = \|r(|\mu|)\|$.

Théorème 14. *$M(X)$ est un espace de Banach réticulé; il est isomorphe au dual de l'espace $h(X, B)$ muni de la norme:*

$$\|h\| = \sup\big\{\widehat{|h|}(x) \mid x \in X_1\big\} = \sup\{\mu(|h|) \mid \mu \in M^+(X) \text{ et } r(\mu) \in X_1\}.$$

Preuve: Comme en Section 3 on voit que $M(X)$ est un espace normé réticulé. Comme $M_1^+(X)$ est $\sigma(M(X), h(X, B))$ compacte, puisque X_1 est $\sigma(B', B)$ compacte, on voit que $M(X)$ est le dual de $h(X, B)$ pour la norme $\sup\{\mu(h) \mid r(|\mu|) \in X_1\}$, qui est équivalente à la formule du théorème; on utilise [**3**, Problem 30.1] pour la formule avec $(\widehat{\ })$. ∎

Nous allons maintenant nous placer dans des cadres abstraits:

15. Cas des cones engendrés par un convexe héréditaire. De façon abstraite, soit X un cône convexe saillant, contenu dans un espace vectoriel E, et engendré par un convexe héréditaire K, qui ne contient pas de demi-droite. Soit j la jauge de K; on peut alors reprendre la théorie conduisant au Théorème 2:

En effet si $\lambda \in M_d(X)$ on voit que l'application $\lambda \rightsquigarrow \|\lambda\| = j(r(|\lambda|))$ est une norme d'espace vectoriel réticulé sur $M_d(X)$. Ici E est mis en dualité avec son dual algébrique.

A priori on n'a pas l'analogue du Théorème 9, car on ne peut pas effectuer l'analogue de la théorie de ([**1**] ou [**2**]); en effet, à priori, X n'est pas un cone normal situé dans un espace normé. Cependant, si on munit l'espace vectoriel $(X - X)$, ordonné par le cone X, de la semi-norme associée à $\operatorname{conv}(K \cup (-K))$ celle ci sera une norme si:

$$(x \in (X - X) \text{ et } n.x \leqslant y_n \text{ pour tout } n, \text{ avec } y_n \in K) \Rightarrow (x \leqslant 0).$$

https://doi.org/10.1017/S0004972700015252 Published online by Cambridge University Press

Le cone X est alors normal dans $(X - X)$; de plus K et la trace de la boule unité sur X s'absorbent mutuellement. On peut alors établir le Théorème 9.

16. Cas des espaces de Banach ordonnés. Ce cas peut être vu, de facon abstraite, de la façon suivante: Soit X un cone convexe saillant, contenu dans un e.l.c.s E; on suppose que X est engendré par un convexe $\sigma(E, E')$ compact héréditaire K.

Soit A l'espace vectoriel des fonctions affines sur X, nulles en 0, dont la restriction à K est continue. On munit A de la norme $\|f\| = \sup\{|f(x)| \mid x \in K\}$.

On sait alors que A est un espace de Banach ordonné, par l'ordre des fonctions sur X, tel que $A = A^+ - A^+$ [**4**, Théorème 5].

On peut alors appliquer nos résultats au cône X, qui est normal dans l'espace de Banach A'.

Dans ce cas on a de plus $A' = (X - X)$ et A^+ est normal dans A [**4**, Théorème 5].

17. Cas des cones faiblement complets. (Classe $\mathcal{S}$, [**3**, Section 30.38.40]). Soit X un cone de $\mathcal{S}$, contenu dans un e.l.c.s. E; comme le saturé par hérédité de toute partie $\sigma(E, E')$ compacte est aussi $\sigma(E, E')$ compacte, on peut utiliser les résultats du paragaphe précédent, en considérant X comme la réunion, filtrante croissante, de ses parties $\sigma(E, E')$ compactes, convexes et héréditaires.

References

[**1**] R. Becker, 'Structure des cones normaux contenus dans un espace de Banach ou son dual', *C.R. Acad. Sci. Paris Sér I Math* **t.314** (1992), 535–539.

[**2**] R. Becker, 'Cones contenus dans un espace de Banach et factorisation d' opérateurs $\geqslant 0$, définis sur le dual, à valeurs dans un espace L^1', (Soumis).

[**3**] G. Choquet, *Lectures on analysis 1–3, Mathematics*, Lecture Notes Series (Benjamin, New York, Amsterdam, 1969).

[**4**] H. Fakhoury, 'Structures uniformes faibles sur une classe de cones et d'ensembles convexes', *Pacific J. Math.* **39** (1971), 641–654.

[**5**] J.L Krivine, 'Théorèmes de factorisation dans les espaces réticulés', Séminaire Maurey-Schwartz exposés XXII et XXIII 1973–1974, Ecole Polytechnique Paris.

[**6**] J.L Krivine, 'Sous-espaces de dimension finie des espaces de Banach réticulés', *Ann. of Math.* **104** (1976), 1–29.

[**7**] H.H. Schaeffer, *Topological vector spaces* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977).

https://doi.org/10.1017/S0004972700015252 Published online by Cambridge University Press

Equipe D'Analyse
Unité associée au C.N.R.S. No 754
Tour 46, 4ième étage
Universite Paris VI
4 Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05
France