SUR UN PROBLÈME DE P. SCHERK, CONCERNANT LA SOMME DES CARRÉS DE DEUX DÉRIVÉES

Marius Iosifescu et Solomon Marcus

(received February 14, 1962)

P. Scherk a posé le problème suivant (Canadian Mathematical Bulletin, vol. 4, no. 3, 1961, p. 306, problème 49):

<u>Let $x(t)$ and $y(t)$ be two differentiable functions defined in some interval. Does the function</u> $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ <u>have the Darboux property?</u>

<u>La réponse est négative.</u> En effet, Witold Wilkosz (Some properties of derivative functions, Fundam. Math. vol. 2, 1921, p. 145-154) a montré (p. 146-147 loc. cit.) que la fonction

$$\phi(x) = \begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

est une fonction dérivée. Posons

$$\psi(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 . \end{cases}$$

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-014-3 Published online by Cambridge University Press

En remplaçant, dans le raisonnement de Wilkosz, la fonction

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad \text{par la fonction}$$

$$G(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$ on trouve que $\psi(x)$ est aussi

une fonction dérivée. Mais on a $\phi^2(x) + \psi^2(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$,

donc la fonction $h(x) = \phi^2(x) + \psi^2(x)$ est dépourvue de la propriétée de Darboux. Ce résultat a été signalé aussi par M. Iosifescu (Asupra produsului a doua derivate, Comunicarile Academiei R. P. R., vol. 7, no. 3 (1957), p. 319-321).

On a tout de même:

<u>Si f est une fonction continue sur (a,b) et si g est une fonction de la première classe de Baire et jouissant de la propriété de Darboux sur (a,b), alors $f^2 + g^2$ jouit de la propriété de Darboux.</u>

<u>Démonstration</u>. I. Maximoff a établi le théorème suivant: Pour qu' une fonction g, de la première classe de Baire, jouisse de la propriété de Darboux sur (a,b), il faut et il suffit que g soit, en chaque point $x \in (a,b)$, continue par rapport à un certain ensemble parfait P_x, contenant x, et dont x est un point de deuxième espèce (Sur les fonctions ayant la propriété de Darboux. Prace Mat.-Fiz. vol. 43 (1936), p. 241-265). On déduit ainsi, de ce que g est de la première classe et jouit de la propriété de Darboux, que g^2 jouit aussi de la propriété de Darboux (et est, bien entendu, de la première classe). De ce que f est continue on déduit, en utilisant de nouveau le théorème de Maximoff (la suffisance de la condition), que $f^2(x) + g^2(x)$ jouit de la propriété de Darboux.

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-014-3 Published online by Cambridge University Press

Corollaire. Si f est continue et g est la dérivée d'une fonction continue, alors $f^2 + g^2$ jouit de la propriété de Darboux. En effet, on sait que la dérivée - finie ou infinie, d'une fonction continue, jouit de la propriété de Darboux et est de la première classe de Baire.

Remarque. Si g est la dérivée d'une fonction discontinue, alors le corollaire ci-dessus n'est plus vrai. En effet, soit

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq 0 \\ \infty, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

g est la dérivée de la fonction $G(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ +1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et

il est évident que g ne jouit pas de la propriété de Darboux.

On a aussi:

Si f et g sont des fonctions bornées et approximativement continues, alors f, g, f^2 et g^2 sont des fonctions dérivées.

Démonstration. En vertu d'un théorème de Denjoy (Sur une propriété des fonctions dérivées, Enseignement Math. 18 (1916), p. 320-328) toute fonction bornée et approximativement continue est une dérivée; donc f et g sont des dérivées. D'autre part, en vertu d'un théorème de Wilkosz (loc. cit. p. 150), si f et g sont des dérivées bornées et approximativement continues, alors f^2 et g^2 sont aussi des fonctions dérivées.

Problème. Si f est approximativement continue et si g est une dérivée-finie ou infinie - d'une fonction continue, peut-on dire que $f^2 + g^2$ jouit de la propriété de Darboux?

En utilisant des moyens plus puissants, on peut obtenir un résultat plus général, à savoir:

Soient f et g deux dérivées approximatives finies. Supposons que f est continue en chaque point où g est

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-014-3 Published online by Cambridge University Press

discontinue. En ces conditions, $f^2 + g^2$ jouit de la propriété de Darboux.

Démonstration. Une dérivée approximative finie jouit de la propriété de Darboux (C. Goffman - C. J. Neugebauer, On approximate derivative, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), p. 962-966) et est de la première classe de Baire (G. Tolstov, Sur la dérivée approximative exacte, Rec. Math. Moscou (Mat. Sbornik) N. S. 4 (1938), p. 499-504). En utilisant le même théoreme de Maximoff (la nécessité de la condition) on déduit que chacune des fonctions f^2 et g^2 est continue en chaque x, relatif à un certain ensemble parfait dont x est un point de deuxième espèce. En utilisant de nouveau le théorème de Maximoff (la suffisance de la condition) et en tenant compte que f^2 et g^2 sont de la première classe de Baire, on déduit que f^2 et g^2 possèdent la propriété de Darboux. Mais $f^2 + g^2$ est de la première classe de Baire et satisfait la condition du théorème de Maximoff (en vertu de ce que f est continue en chaque point où g est discontinue), donc $f^2 + g^2$ jouit de la propriété de Darboux.

Remarque. 1. Dans toutes les démonstrations ci-dessus, on peut utiliser, au lieu du théorème de Maximoff, un théorème de W. H. Young (A theorem in the theory of functions of a real variable, Rendiconti del Circolo Mat. Palermo, vol. 24 (1907), p. 187-192), à savoir: Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f, de la première classe de Baire, jouisse de la propriété de Darboux sur (a, b), est que pour chaque $x \in (a, b)$ existent deux suites $x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots < x < \ldots < y_n < \ldots < y_2 < y_1$, telles que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x)$.

2. La somme d'une fonction f continue et une fonction g jouissant de la propriété de Darboux ne jouit pas obligatoirement de la propriété de Darboux. C'est une conséquence d'un théorème de T. Radaković (Über Darbousche und stetige Funktionen, Monatshefte für Math. 38 (1931), p. 117-122).

Institut de Mathématique
Bucarest, rue Eminescu, 47

https://doi.org/10.4153/CMB-1962-014-3 Published online by Cambridge University Press