Can. J. Math., Vol. XXXIII, No. 6, 1981, pp. 1448–1458

MODELES BIFILTRES: UNE PLAQUE TOURNANTE EN HOMOTOPIE RATIONNELLE

YVES FELIX

A chaque c.w. complexe X, 1-connexe, de type fini, est associé une algèbre différentielle graduée commutative $(\Lambda Z, d)$ qui est un modèle dans le sens de Sullivan [**10**] et représente donc le type d'homotopie rationnelle de X.

ΛZ est munie d'une seconde graduation $Z = \bigoplus_{q \geqq 0} Z_q$. La différentielle d se décompose alors sous la forme $d = \sum_{i=0}^{\infty} d_i$ avec $d_0(Z_p) \subset (\Lambda^2 Z)_{p-1}$ et $d_i(Z_p) \subset Z_{p-i}$, $i \geqq 1$. En particulier d_0 est purement quadratique tandis que d_i est du premier degré, $i \geqq 1$.

L'algèbre ΛZ et la partie quadratique d_0 ne dépendent que des nombres de Betti de X. Les différents types d'homotopie rationnelle de nombres de Betti donnés sont donc paramétrés par les déformations d_i. La partie d_1 exprime la structure multiplicative de l'algèbre de cohomologie rationnelle de X, les parties d_2, d_3, d_4. . . . les structures algébriques plus complexes du type d'homotopie rationnelle.

L'algèbre différentielle $(H(\Lambda Z, d_1), \bar{d})$ est le modèle filtré d'Halperin–Stasheff [**4**]. $(\Lambda Z, d)$ est isomorphe a $C^*(L)$ ou L est le modèle de Quillen de X et C^* le foncteur de Koszul [**1**].

1. Preliminaires sur les modèles minimaux. Une Q-A.D.G.C. (algèbre différentielle graduée commutative) (A, d_A) est une Q-A.G.C. (algèbre graduée commutative) A munie d'une différentielle d_A vérifiant $d_A(A^p) \subset A^{p+1}$ et

$$d_A(a.b) = d_A(a).b + (-1)^p\, a.d_A(b) \text{ si } a \in A^p.$$

Elle est dite c-connexe si $H_0(A) = Q$.

Si (A, d_A) est une Q-A.D.G.C. c-connexe, son modèle minimal

$$(AZ, d) \xrightarrow{p} (A, d_A)$$

est une Q-A.D.G.C. connexe, libre en tant que A.G.C. et vérifiant les conditions suivantes:

(1) Nilpotence: Il existe une base homogène $\{x_\alpha\}_{\alpha \in s}$ de Z indexée par un ensemble bien ordonné s telle que dx_α appartienne a l'algèbre engendrée par les x_β avec $\beta < \alpha$.

Reçu le 8 juillet 1980. E.R.A. du CNRS No. 07–590.

(2) Minimalité: $d(Z) \subset \Lambda^+ Z . \Lambda^+ Z$.

L'espace des indécomposables $Q(\Lambda Z) \xleftarrow{\sim} Z$ du modèle minimal d'une A.D.G.C. (A, d_A) s'appelle espace de ψ-homotopie et se note $\pi_\psi(A, d_A)$. Si X est simplement connexe et de type fini, alors il existe un isomorphisme [**10**]:

$$\pi_\psi{}^n(A_{PL}(X), d) \cong \operatorname{Hom}(\pi_n(X), Q).$$

Associant à chaque espace X l'algèbre différentielle graduée des $P.L.$ formes rationnelles sur X, Sullivan [**10**] établit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des Q-A.D.G.C. c-connexes admettant un modèle minimal de type fini et la catégorie homotopique des espaces nilpotents ayant le type d'homotopie rationnel d'un c.w. complexe connexe de type fini.

Un espace est dit *formel* si son modèle minimal est isomorphe au modèle minimal de l'A.D.G.C. $(H^*(X, Q), 0)$. Il est dit *intrinsèquement formel* s'il est formel et si toutes les A.D.G.C. de même algèbre de cohomologie ont même modèle minimal.

Un homomorphisme entre Q-A.D.G.C. sera appelé un *quasi-isomorphisme* s'il induit un isomorphisme en cohomologie.

Dans [**8**] Quillen établit une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des espaces rationnels 1-connexes et la catégorie homotopique des algèbres de Lie graduées différentielles connexes. Un espace sera dit *π-formel* si son modèle de Quillen est isomorphe ou modèle minimal de Quillen de l'algèbre de Lie différentielle graduée $(\pi_* \Omega X, 0)$.

2. Construction du modèle bifiltre.

2.1. *Modèle trigradué d'un espace vectoriel gradué V.* A chaque algèbre de Lie L est associée classiquement une A.D.G.C., son complexe de cochaînes rationnelles $C^*(L)$, dont la cohomologie s'appelle cohomologie rationnelle de l'algèbre de Lie [**2**]. Plus generalement, on peut definir un foncteur cochaînes C^* allant de la catégorie des algèbres de Lie graduées dans la catégorie des A.D.G.C. [**8**]. Nous en rappelerons la construction en § 3.

Soit V un espace vectoriel gradué de la forme $V = \sum_{j \geqq 2} V^j$ de type fini (dim $V^j < \infty$ pour tout j); posons $s^{-1}V^*$ l'espace gradué défini par $(s^{-1}V^*)_p = (V^{p+1})^*$; voir § 3. La cohomologie de l'algèbre de Lie graduée libre $\mathscr{L}_{s^{-1}V^*}$ est isomorphe a $V \oplus Q$ avec $V \cdot V = 0$.

La graduation

$$\mathscr{L}_{s^{-1}V^*} = \sum_0^\infty (\mathscr{L}_{s^{-1}V^*})^k$$

ou $k + 1$ est la longueur d'un mot en $(\mathscr{L}_{s^{-1}V^*})^k$ munit $C^*(\mathscr{L}_{s^{-1}V^*}) =$

https://doi.org/10.4153/CJM-1981-111-1 Published online by Cambridge University Press

$(\Lambda Z, d)$ d'une graduation

$$\Lambda Z = \sum_{k=0}^{\infty} (\Lambda Z)_k.$$

Evidemment $Z_0 = V$ et la projection $\Lambda Z \to V \oplus Q$ qui annule $\Lambda^+ Z \cdot \Lambda^+ Z$ et Z_+ induit un isomorphisme $H(\Lambda Z) \xrightarrow{\simeq} V \oplus Q$.

La différentielle d est purement quadratique, et homogène de degré inferieur -1:

$$d: (\Lambda^k Z)_q{}^p \to (\Lambda^{k+1} Z)_{q-1}^{p+1}.$$

En particulier $(\Lambda Z, d)$ est le modele minimal de $V \oplus Q$. Nous l'appellerons *le modèle trigradué* de l'espace vectoriel V.

L'inclusion $V = Z_0 \subset Z$ induisant un isomorphisme $V \xrightarrow{\simeq} H^+(\Lambda Z, d)$, on a $H_+(\Lambda Z, d) = 0$, et il s'en suit que $(\Lambda Z, d)$ est le modèle bigradué de $V \oplus Q$ ou sens de [**4**].

2.2. *Modèle bifiltré d'une* A.D.G.C. (A, d_A).

THÈORÉME. *Soit* $V = \sum_{p \geqq 2} V^p$ *un espace vectoriel gradué et soit*

$$(\Lambda Z, d_0) \xrightarrow{\theta} (\Lambda \oplus Q)$$

son modèle trigradué:

(1) *Si H est une Q-algèbre graduée commutative d'espace vectoriel sous-jacent $V \oplus Q$, il existe une application lineaire*

$$d_1: Z_q{}^k \to Z_{q-1}^{k+1}$$

telle que $d = d_0 + d_1$ soit une différentielle. Il existe en outre un quasi-isomorphisme ϕ: $(\Lambda Z, d_0 + d_1) \to (H, 0)$ avec

$$\phi(\Lambda Z)_+ = 0.$$

(2) *Si (A, d_A) est une Q-*A.D.G.C. *de cohomologie H, alors il existe $d_2, d_3, \ldots$ verifiant d_i: $Z_q{}^k \to Z_{q-i}{}^{k+1}$, $(\sum_0^\infty d_i)^2 = 0$, ainsi qu'un quasi-isomorphisme*

$$\phi: (\Lambda Z, d_0 + d_1 + d_2 + \ldots) \to (A, d_A).$$

(3) *(unicité) Si ϕ': $(\Lambda Z', d') \to (A, d_A)$ vérifie les mêmes conditions que ϕ, alors il existe un isomorphisme linéaire $(\Lambda Z, d) \xrightarrow{\simeq} (\Lambda Z', d')$ envoyant Z_k dans $Z'_{\leqq k}$ et rendant commutatif a homotopie près le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(\Lambda Z, d) \arrow[d] \arrow[drr, "\phi"] & & \\
(\Lambda Z', d') \arrow[rr, "\phi'"] & & (A, d_A)
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Posons p: $Z_0 \rightarrow H^+$ l'isomorphisme d'espaces vectoriels gradués sousjacent à θ. Prolongeons p en un homomorphisme surjectif ϕ de Q-algèbres graduées commutatives:

$$\phi: \Lambda Z_0 \rightarrow H.$$

Le composé $p^{-1}\phi$: $\Lambda^+ Z_0 \rightarrow Z_0$ est une application linéaire surjective.

Construisons d_1 et θ par récurrence sur Z_n:

Sur Z_0 posons $d_1 = 0$ et $\theta = \phi$;

Sur Z_1 posons $d_1 = -p^{-1}\phi d_0$ et $\theta = 0$. Notons, alors, que

$$\phi_0 d(\Lambda Z_{\leqq 1}) = 0.$$

Comme $d_0(Z_1) = \Lambda^2 Z_0$, nous pouvons écrire

(1) $\quad \Lambda^+ Z_0 = Z_0 + [d(Z_1)]\ \Lambda Z_0.$

Montrons par l'absurde que la somme (1) est directe: Supposons l'existence d'un α dans $Z_1 \otimes \Lambda Z_0$ avec $d\alpha$ dans Z_0. La suite d'implications suivantes conduira a la contradiction souhaitée:

$$d\alpha \in Z_0 \Rightarrow (d_1\alpha \in Z_0) \text{ et}$$

$$(d_0\alpha = 0) \Rightarrow \alpha = d_0(\beta) \Rightarrow \alpha \in Z_1 \otimes \Lambda^{\geqq 1} Z_0 \Rightarrow d_1\alpha \in \Lambda^{\geqq 2} Z_0.$$

La somme (1) etant directe, l'application θ induit un isomorphisme d'algèbres graduées commutatives

$$\Lambda(Z_0)/d(Z_1) \cdot \Lambda Z_0 \cong H,$$

et donc:

$$H_0((\Lambda Z)_{\leqq 1}, d) \cong H.$$

Sur $Z_{>1}$, posons $\theta = 0$.

Définissons d_1 sur Z_2: soit z dans Z_2; comme $d_1 d_0(z)$ appartient a $\Lambda^2 Z_0$, $d_1 d_0(z)$ peut s'écrire $\mathrm{d}_0(x)$ avec x dans Z_1. Posons linéairement $d_1(z) = -x$. Notons que

$$d^2 z = d_1{}^2 z = -d_1 x = -p^{-1}\phi d_0(x) = 0.$$

Supposons avoir construit d_1 sur $Z_{<n}$, $n \geqq 3$, avec $d_1{}^2 = 0$, $d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0$, et définissons d_1 sur Z_n:

Soit $z \in Z_n$, $d_1 d_0(z) \in (\Lambda^2 Z)_{n-2}$; $d_0(d_1(d_0(z))) = -d_1 d_0{}^2 z = 0$, et donc $d_1(d_0(z)) = d_0(x)$, x dans Z_{n-1}.

Posons linéairement $d_1(z) = -x$.

Il est clair que $d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0$. Comme

$$d_0 d_1{}^2(z) = -d_1 d_0 d_1(z) = d_1{}^2 d_0(z) = 0,\ d_1{}^2(z) = d_0(t),$$

ce qui entraine $d_1{}^2(z) = 0$, car $d_1{}^2(z)$ est une expression du premier degré.

La propriété 1 est donc satisfaite. Les propriétés 2 et 3 se verifient comme dans [**4**].

https://doi.org/10.4153/CJM-1981-111-1 Published online by Cambridge University Press

Definition. L'A.D.G.C. $(\Lambda Z,\ d_0 + d_1 + d_2 + \ldots)$ s'appelle *modèle bifiltré* de l'A.D.G.C. (A, d_A).

Remarque 1. Si nous rendons minimal $(\Lambda Z, d_0 + d_1)$, nous obtenons le modèle bigradué de H dans le sens de [**4**]. La différentielle induite dans cette algèbre par $d_0 + d_1 + d_2 + \ldots$ est le modèle filtre de [**4**].

PROPOSITION. *Soit* $(\Lambda Z, D)$ *un modèle bifiltré, alors:*
(1) $d_0 d_1 + d_1 d_0 = 0,\ i \geqq 1.$
(2) *Si* D' *est une autre différentielle avec* $d_0 = d_0'$ *et*

$$(D' - D)(Z_k) \subset Z_{<k},\ k = 0, 1, \ldots$$

et

$$d_n' = d_n \colon Z_n \to Z_0,$$

alors $d_n = d_n'$.

Demonstration. (1) $(d_0 d_1 + d_1 d_0)(Z_k)$ est la partie de $D^2(Z_k)$ appartenant a $(\Lambda^2 Z)_{k-i-1}$.
(2) Resulte du fait que l'application $d_0\colon Z_n \to (\Lambda^2 Z)_{n-1}$ est injective.

Si dans le théorème l'algèbre H (et donc $(\Lambda Z, d_0 + d_1)$) est fixée et H est supposée de dimension finie, les restrictions $\{d_n\colon Z_n \to Z_0\}_{n \geqq 2}$ des différentielles possibles $(\Lambda Z,\ d_0 + d_1 + d_2 + \ldots)$ forment une variété algébrique V_H de dimension finie. Le théorème montre que les orbites de V_H sous l'action du groupe des automorphismes linéaires de Z représentent les différents types d'homotopie rationnelle de cohomologie H. (Voir aussi [**9**].)

L'identification $\Lambda Z = C^*(\mathscr{L})$, $\mathscr{L}$ l'algèbre de Lie libre sur $s^{-1}(H^+)^*$, identifie $(Z_k^p)^* = \mathscr{L}_{p-1}^{k+1}$ ou l'indice inférieur représente le degré dans $\mathscr{L}$ et l'indice supérieur le longueur des mots.

L'application linéaire d_i correspond par dualité à une application linéaire

$$\mathscr{L}_p^k \xrightarrow{\bar{d}_i} \mathscr{L}_{p-1}^{k+i}.$$

Les conditions

$$\left(\sum_{i \geqq 1} d_i\right)^2 = 0 \quad \text{et} \quad d_0\left(\sum_{i \geqq 1} d_i\right) + \left(\sum_{i \geqq 1} d_i\right) d_0 = 0$$

se dualisent en les relations $(\sum_{i \geqq 1} \bar{d}_i)^2 = 0$ et le fait que $(\mathscr{L}, \bar{d})$ est une algèbre de Lie différentielle. La variété V est donc celle des perturbations du modèle de Quillen $(\mathscr{L}_V, \bar{d}_1)$ de $(H, 0)$. C'est la variété introduite par J. M. Lemaire et F. Sigrist [**6**] pour dénombrer les types d'homotopie de cohomologie donnée.

Désignons par $(\Lambda X, d)$ le modèle bigradué de H [**4**] et par $V_H{}'$ la variété algébrique, en general de dimension infinie, dont un point consiste en la donnée des applications linéaires $X_n \to (\Lambda X)_{\leqq n-2}$, restrictions d'une différentielle D sur ΛX [**3**]. En rendant minimale la partie d de la différentielle D sur ΛZ, nous définissons un homomorphisme de variétés algébriques $V_H \to V_H{}'$ induisant une bijection sur les orbites. (Voir aussi [**9**].)

3. Modèle de Sullivan et modèle de Quillen. Les foncteurs C^* et L de Koszul et Quillen [**8**] définissent une équivalence de catégories entre la catégorie homotopique des A.D.G.C. simplement connexes de type fini, et la catégorie homotopique des Lie A.D.G. (algèbres de Lie différentielles graduees) connexes de type fini [**1**].

$$\text{Lie A.D.G.} \underset{L}{\overset{C^*}{\rightleftarrows}} \text{A.D.G.C.}$$

C^* est le foncteur cochaînes usuel et L est le compose $P\Omega$ ou Ω désigne la cobar construction sur la coalgèbre différentielle duale et P le foncteur "éléments primitifs".

On rappellera ici la construction explicite de C^*, en commencant avec des conventions sur les espaces gradués différentiels:

(1) Si $X = \sum_p X^p$ est un espace gradué, alors

$$X_p = X^{-p} \text{ et } (X^*)_p = (X^*)^{-p} = (X^p)^*.$$

(2) Désignons par x_i les éléments de X et par f_i les éléments de X^*. Le produit tensoriel des éléments f_i s'interprète comme fonction multilinéaire par la règle:

$$\langle f_i \otimes \ldots \otimes f_p; x_i, \ldots x_p \rangle = \epsilon \langle f_1, x_1 \rangle \ldots \langle f_p, x_p \rangle$$

ou ϵ est l'indice gradué de la permutation:

$$f_1, \ldots, f_p, x_1, \ldots, x_p \to f_1, x_1, \ldots, f_p, x_p$$

(defini par $\epsilon(uv) = (-1)^{|u||v|}vu$, $|u| = \deg u$.)

(3) Les éléments de $\Lambda^p X$ s'interprètent comme des fonctions multilinéaires par la regle:

$$\langle f_1 \wedge \ldots \wedge f_p; x_1, \ldots, x_p \rangle = \sum_\sigma \epsilon_\sigma \langle f_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes f_{\sigma(p)}; x_1, \ldots, x_p \rangle.$$

(4) On pose $(s^r X)^p = X^{p+r}$ (et donc $(s^r X)_p = X_{p-r}$) pour tout $r \in Z$. Les éléments de $s^{-1}(X^*)$ s'interprètent comme des fonctions en sX par la regle

$$\langle s^{-1} f, sx \rangle = (-1)^{|f|} \langle f, x \rangle.$$

https://doi.org/10.4153/CJM-1981-111-1 Published online by Cambridge University Press

(5) Une différentielle d dans X est une application linéaire $d: X^p \to X^{p+1}$ (de façon équivalente $d: X_p \to X_{p-1}$) telle que $d^2 = 0$. La différentielle duale en X^* est définie par

$$\langle df, x\rangle + (-1)^{|f|} \langle f, dx\rangle = 0.$$

Les différentielles induites en sX, $s^{-1}X^*$ par les règles

$$sd + ds = 0, \; s^{-1}d + ds^{-1} = 0$$

sont encore duales.

L'extension de d (en X^*) en dérivation sur ΛX^* est encore une différentielle et satisfait à la formule

$$\langle d(f_i \wedge \ldots \wedge f_p); x_1, \ldots, x_p\rangle = (-1)^{\Sigma|f_j|+1} \sum < f_1 \wedge \ldots \wedge f_p; (-1)^{|x_1|}x_1, \ldots (-1)^{|x_{i-1}|}x_{1-1}, dx_i, \ldots \; x_p\rangle.$$

Soit maintenant (L, d_L) une algèbre de Lie différentielle graduée, c'est à dire un espace vectoriel gradué L muni d'un crochet [,] et d'une différentielle assujetis aux conditions

(0) $[x, y] = (-1)^{|xy|+1} [y, x]$

(1) $(-1)^{|xz|} [x[y, z]] + (-1)^{|yx|} [y, [z, x]] + (-1)^{|zy|} [z, [x, y]] = 0$

(2) $d_L[x, y] = [d_L(x), y] + (-1)^{|x|} [x, d_L(y)]$

(3) $d_L^2 = 0$.

L'algèbre des cochaînes sur L, $C^*(L, d_L)$ est l'algèbre différentielle graduée commutative $(\Lambda s^{-1} L^*, d_1 + d_2)$ ou $(\Lambda s^{-1} L^*, d_1)$ est l'espace différentiel défini précédemment à partir de l'espace différentiel (L, d_L):

$$\langle d_1 s^{-1} f; sx\rangle = -\langle f, d_L(x)\rangle$$

et ou la différentielle d_2 est définie par

$$\langle d_2 s^{-1} f; sx, sy\rangle = (-1)^{|x|} \langle f; [x, y]\rangle.$$

Les relations (1), (2) et (3) sont respectivement équivalentes aux relations $d_2^2 = 0$, $d_1 d_2 + d_2 d_1 = 0$ et $d_1^2 = 0$, comme on vérifie à l'aide d'un petit calcul.

Le foncteur C^* se décompose en un composé

$$\text{Lie-A.D.G.} \xrightarrow{\bar{C}} \text{A.D.G.C.}_{(1)} \xrightarrow{i} \text{A.D.G.C.}$$

A.D.G.C.$_{(1)}$ désigne la catégorie qui a pour objets les A.D.G.C. de la forme $(\Lambda Z, d_1 + d_2)$ avec d_1 linéaire et d_2 quadratique, et pour morphismes les homomorphismes d'A.D.G.C. de la forme $\Lambda\phi$ ($\phi: Z \to Z'$).

Les remarques ci-dessus montrent que $\bar{C}$ est un isomorphisme de catégories. Puisque C^* est une équivalence [**8**, Appendice II], il en est de même avec i. (Pour d'autres détails, voir aussi [**11**].)

Un espace 1-connexe de type fini admet un modèle minimal dans la catégorie des Lie A.D.G. (modèle de Quillen–Baues–Lemaire) et dans la catégorie des A.D.G.C. (modèle de Sullivan). La donnée du modèle de Sullivan est équivalente a celle de la tour de Postnikov de l'espace, tandis que la donnée du modèle de Quillen est, elle, équivalente a celle d'une structure cellulaire minimale. Un passage plus maniable que celui des foncteurs C^* et L paraît donc intéressant. Notre modèle bifiltré peut être considéré, à ce sujet, comme la plaque tournante du passage Sullivan $\rightarrow$ Quillen.

Soit, en effet, (A, d_A) une A.D.G.C. 1-connexe, la différentielle D de son modèle bifiltré $(\Lambda Z, D)$ ne contient qu'une partie linéaire et une partie quadratique: $D = d_1 + d_2$. C'est donc de la forme

$$(\Lambda Z, D) = C^*(\pi)$$

où π est l'algèbre de Lie graduée différentielle $(s^{-1} Z^*, \bar{d}_1)$.

PROPOSITION. *π est le modèle minimal de Quillen–Baues–Lemaire de l'algèbre (A, d_A).*

Démonstration. Comme C^* est une équivalence de catégories, π est quasi-isomorphe ou modèle minimal de Quillen–Baues–Lemaire de (A, d_A). Par l'isomorphisme

$$(\Lambda Z, d_2) \xrightarrow{\sim} C^*(\mathscr{L}_{s^{-1}[H^+(A, d_A)]^*}),$$

π est isomorphe comme algèbre de Lie a $\mathscr{L}_{s^{-1}[H^+(A,d_A)]^*}$. Le modèle π est donc libre et forcément minimal car l'espace vectoriel des générateurs est isomorphe a l'espace vectoriel d'homologie.

Exemples. (1) $p^3(\mathbf{C})$ a comme modèle bifiltré $(\Lambda Z, d)$ avec

$$\begin{array}{llll} Z_0\colon x, t, r & |x| = 2 & |t| = 4 & |r| = 6. \\ Z_1\colon y, z, v, v', w, m & |y| = 3 & |z| = 5 & |v| = 7 \\ & |v'| = 7 & |w| = 9 & |m| = 11. \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} dy = x^2 - t & dm = r^2 \\ dz = tx - r & dw = rt \\ dv = rx & dv' = t^2 \end{array}$$

$Z_2\colon \ldots$

Comme $p^3(\mathbf{C})$ est formel, la différentielle diminue la graduation d'exactement une unite.

Il suffit donc de la connaitre sur $Z_{\leq 1}$ pour construire le modèle de Quillen–Baues–Lemaire. Il est tel qu'on l'attendait:

$$(\mathscr{L}_{(x,t,r)}, d)$$

avec

$$|x| = 1, \; |t| = 3, \; |r| = 5$$
$$dx = 0, \; dt = [x, x], \; dr = [t, x].$$

(2) Soit $(\Lambda Z, d)$ le modele formel d'algèbre de cohomologie $H^* = \Lambda(x, y, z)/(xy + yz + xz)$ avec $|x| = |y| = |z| = 3$.

Ce modèle ne possède pas de cohomologie en dimension strictement plus grande que 6. Construisons donc son modèle bifiltré en dimension $\leqq 6$. Il suffit de nouveau a cause de la formalité de le construire sur Z_0 et Z_1.

$$\begin{array}{ll} Z_0\colon x, y, z, v, w & |x| = |y| = |z| = 3 \\ & |v| = |w| = 6. \\ Z_1\colon r, s, t & |r| = |s| = |t| = 5 \end{array}$$

$$dr = xy - v \qquad ds = yz - w \qquad dt = xz + v + w.$$

Le modèle minimal de Quillen–Baues–Lemaire est donc

$$(\mathscr{L}_{(x,y,z,w,v)}, d)$$

avec

$$|x| = |y| = |z| = 2, \; |w| = |v| = 5, \; dx = dy = dz = 0,$$
$$dv = [x, y] - [x, z], \; dw = [y, z] - [x, z].$$

4. Caractère fonctoriel du modèle bifiltré. Soient (A, d_A) et (B, d_B) deux A.D.G.C. de modèles bifiltrés

$$(\Lambda Y, d) \xrightarrow{\phi_A} (A, d_A) \text{ et } (\Lambda Z, D) \xrightarrow{\phi_B} (B, d_B).$$

THÉORÈME. *Si* $f\colon (A, d_A) \to (B, d_B)$ *est un homomorphisme* d'A.D.G.C., 1-*connexes, de type fini, alors il existe un homomorphisme d'*A.D.G.C. $\bar{f}\colon (\Lambda Y, d) \to (\Lambda Z, D)$ *rendant commutatif a homotopie près le diagramme*

$$\begin{tikzcd} (\Lambda Y, d) \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\phi_A"] & (\Lambda Z, D) \arrow[d, "\phi_B"] \\ (A, d_A) \arrow[r, "f"] & (B, d_B) \end{tikzcd}$$

avec $\bar{f}(Y_p) \subset Z_{\leqq p}$.

Démonstration. Il suffirait d'appliquer le foncteur cochaînes au modèle de Quillen de f. Pareille application $\bar{f}$ peut egalement se construire par récurrence sur le degré de graduation inférieure des générateurs de Y.

5. Dualité. La theorie que nous avons mise ou point pour les A.D.G.C. se transpose aux Lie A.D.G.

PROPOSITION. *Soit* $V = \sum_{p \leqq 0} V^p$ *un espace vectoriel gradué de type fini, il existe une algebre de Lie libre bigraduée*

$$\mathscr{L}_W + \mathscr{L}\left(\bigoplus_{\substack{q \geqq 0 \\ p < 0}} W_q^{\,p}\right)$$

vérifiant les propriétés:

(1) *Il existe une différentielle* d_0 *sur* $\mathscr{L}_W$ *et un quasi-isomorphisme* $(\mathscr{L}_W, d_0) \xrightarrow{\phi} (V, 0)$ *ou* V *est considéré comme algèbre de Lie abèlienne.*

(2) d_0 *est quadratique et homogène par rapport aux graduations:*

$$d_0(W_q^{\,p}) \subset (\mathscr{L}_W)_{q-1}{}^{p+1}.$$

(3) $H_q(\mathscr{L}_W, d_0) = 0,\ q > 0$ *et* $H_0(\mathscr{L}_W, d_0) = V$.

(4) *Si* π *est une Q-algèbre de Lie graduée d'espace vectoriel sous-jacent* V, *alors il existe une application linéaire*

$$d_1\colon W_q^{\,p} \to W_{q-1}{}^{p+1}$$

telle que $d_0 + d_1$ *soit une différentielle, et un quasi-isomorphisme*

$$\phi\colon (\mathscr{L}_W, d_0 + d_1) \to (\pi, 0).$$

(5) *Si* (L, d_L) *est une Q-Lie* A.D.G. *d'homologie* π, *alors il existe* $d_2, d_3, \ldots,$ *tels que*

$$d_i\colon W_q^{\,p} \to W_{q-1}{}^{p+i},\ i \geqq 2,$$

et un quasi-isomorphisme $\phi\colon (\mathscr{L}_W, d_0 + d_1 + \ldots) \to (L, d_L)$.

Définition. Pareil modèle $(\mathscr{L}_W, d_0 + d_1 + d_2 + \ldots)$ s'appellera *modèle bifiltré* de (L, d_L).

PROPOSITION. (unicité du modèle bifiltré). *Si* $\phi'\colon (\mathscr{L}_{W'}, d') \to (L, d_L)$ *est un autre modèle bifiltré, alors il existe un isomorphisme* $\phi\colon (\mathscr{L}_{W'}, d') \to (\mathscr{L}_W, d)$ *vérifiant* $\theta(W') \subset W$ *et rendant commutatif a homotopie près le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
(\mathscr{L}_W, d) \arrow[dr, "\phi"] \arrow[dd, "\theta"'] & \\
& (L, d_L) \\
(\mathscr{L}_{W'}, d') \arrow[ur, "\phi'"'] &
\end{tikzcd}$$

PROPOSITION. *Le modèle bifiltré d'une Lie* A.D.G. (L, d_L) *est isomorphe a* $P\Omega(\Lambda X, d)^*$ *ou* $(\Lambda X, d)$ *désigne le modèle minimal de Sullivan de* (L, d_L).

https://doi.org/10.4153/CJM-1981-111-1 Published online by Cambridge University Press

Remarque. Le foncteur $L = P\Omega$ se factorise en un composé

$$\text{A.D.G.C.} \xrightarrow{\bar{L}} \text{Lie-A.D.G.}_{(1)} \xrightarrow{j} \text{Lie-A.D.G.}$$

Lie-D.G.C.$_{(1)}$ designe la catégorie dont les objets sont les algèbres de Lie différentielles graduées à différentielle linéaire + quadratique et dont les morphismes sont les applications du premier degré. Le foncteur $\bar{L}$ est un isomorphisme, le morphisme d'inclusion j, une équivalence de catégories.

Le foncteur $\bar{L}^{-1}$ appliqué au modèle bifiltré d'une Lie-A.D.G. fournit le modèle minimal de Sullivan. Ceci termine la boucle:

$$\begin{tikzcd} \text{A.D.G.C.} \arrow[r, phantom, "\overset{\bar{L}}{\cong}"] & \text{Lie A.D.G.}_{(1)} \arrow[d, "j"] \\ \text{A.D.G.C.}_{(1)} \arrow[u, "i"] \arrow[r, phantom, "\underset{\bar{\mathscr{C}}}{\cong}"] & \text{Lie A.D.G.} \end{tikzcd}$$

$$j \circ \bar{L} = L \text{ et } i \circ \bar{C} = C^*$$

sont les foncteurs adjoints de Quillen.

Bibliographie

1. H. J. Baues et J. M. Lemaire, *Minimal models in homotopy theory*, Math. Ann *225* (1977), 219–242.
2. H. Cartan et S. Eilenberg, *Homological algebra* (Princeton University, 1956).
3. Y. Felix, *Dénombrement des types de k-homotopie—théorie de la déformation* (a paraître Nouveaux Memoires de la Soc. Math. France).
4. S. Halperin et J. D. Stasheff, *Obstructions to homotopy equivalence*, Advances in Math. *32* (1979), 233–279.
5. D. Lehmann, *Théorie homotopique des formes différentielles*, Asterisque *45* (1977).
6. J. M. Lemaire et F. Sigrist, *Dénombrement des types d'homotopie rationelle*, Comptes Rendus de l'Acad. Francaise (1978).
7. J. Neisendorfer, *Lie algebras, coalgebras and rational homotopy theory of nilpotent spaces*, Proc. J. of Math. *75* (1978), 429–460.
8. D. Quillen, *Rational homotopy theory*, Ann. of Math. *90* (1969), 205–295.
9. M. Schlessinger et J. D. Stasheff, *Deformation theory and rational homotopy type* (preprint, 1979).
10. D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, Publ. de l'I.H.E.S. *47* (1978), 269–331.
11. D. Tanré, *Modèles de Chen, Sullivan et Quillen* (publication Irma *2*, Lille, 1980).

Université Catholique de Louvain,
Louvain-La-Neuve, Belgique