of binding together a great variety of algebraical theorems which are usually put before the student without any organic connection whatever; and for this reason I have brought it specially under the notice of the younger members of the Mathematical Society. Its power is not surprising when we reflect on its close connection with the theorem $\underset{x=1}{\mathrm{L}}(x^m - 1)/(x-1) = m$, which is the fundamental proposition in the differentiation of algebraic functions.

Mr W. PEDDIE exhibited and described a model of the thermodynamic surface which represents the state of water-substance in terms of pressure, volume, and temperature. Various lines, the equations of which are $\frac{dp}{dt} = \text{const.}$, $\frac{dp}{dv} = \text{const.}$, &c., were drawn upon the surface.

Fifth Meeting, March 9*th*, 1888.

W. J. MACDONALD, Esq., M.A., F.R.S.E., President, in the Chair.

Sur un système de cercles tangents à une circonférence et orthogonaux à une autre circonférence.

Par M. PAUL AUBERT.

On donne deux cercles S et Σ ayant pour centres les points O et ω, pour rayons r et ρ. Le cercle S est supposé intérieur au cercle Σ, et le point ω intérieur au cercle S.

I. *Tous les cercles T tangents extérieurement au cercle S et orthogonaux au cercle Σ sont tangents à un troisième cercle fixe.*

Figures 18, 19.

Soit T un cercle tangent au cercle S et orthogonal à Σ. Prenons la figure inverse par rapport au point I comme pôle, la puissance d'inversion étant la puissance k^2 du point I par rapport au cercle S. Ce cercle reste invariable, et le cercle Σ se transforme en une droite perpendiculaire au diamètre Iω en un point P′ tel que

$$\mathrm{IP}\cdot\mathrm{IP}' = k^2.$$

Le cercle T se transforme en un cercle T′ tangent au cercle S et coupant à angle droit la droite P′D; son centre est donc sur cette droite, et par suite le cercle T′ est aussi tangent à la circonférence S_1

https://doi.org/10.1017/S0013091500030091 Published online by Cambridge University Press

symétrique de S par rapport à la droite P'D. Il en résulte que le cercle T lui-même est tangent à la circonférence U qu'on obtiendrait en transformant S_1, le pôle étant au point I, et la puissance d'inversion égale à k^2. La circonférence ainsi obtenue étant fixe quand on considère tous les cercles tels que T, la proposition est démontrée.

Cherchons son centre V et son rayon.*

Désignons par d la distance $O\omega$. On sait que les circonférences U et S_1 sont homothétiques par rapport au pôle I, et que le rapport de similitude est égal au quotient de la puissance d'inversion par la puissance du pôle relative au cercle S_1.

Ainsi $$\frac{IV}{IO_1}=\frac{\epsilon k^2}{\overline{IO_1}^2-r^2} \qquad \text{où } \epsilon^2=1.$$

En remarquant que
$$IO+IO_1=2IP'=k^2/\rho,$$
puis substituant à IO sa valeur $(d+\rho)$,
et à k^2 l'expression $[(d+\rho)^2-r^2]$,

il vient $$IO_1=\frac{\epsilon[(d+\rho)d-r^2]}{\rho}$$
$$IV=\frac{\epsilon\rho}{r^2-d^2}[d(d+\rho)-r^2].$$

Son rayon est alors $$R=\frac{\rho^2 r}{r^2-d^2}.$$

On obtient d'ailleurs immédiatement le point V et le rayon R par une construction géométrique. Ayant en effet démontré l'existence du cercle U tangent à la circonférence T, désignons par B le point de contact, et par A le point où la circonférence T touche le cercle S. Si nous joignons BA, les points B et A étant deux points antihomologues des circonférences S et U, considérées comme inversement homothétiques, la droite BA va couper la ligne des centres VO au centre d'homothétie inverse de ces deux circonférences. Je dis que ce point n'est autre que ω.

En effet, désignons le pour un instant par C. Le produit $CA\times CB$ est constant pour tous les cercles tels que T tangents à S et à U ; soit h^2 sa valeur. Tous les cercles T seront donc orthogonaux à un cercle fixe ayant C pour centre et dont le rayon est h. Mais nous savons déjà que ces cercles T sont orthogonaux au cercle Σ.

* La solution est un peu plus simple si l'on prend pour pôle d'inversion le centre ω du cercle Σ, et pour uissance d'inversion le carré de son rayon.

https://doi.org/10.1017/S0013091500030091 Published online by Cambridge University Press

Les deux cercles C et Σ coïncident donc, sans quoi le lieu des centres des circonférences T serait l'axe radical des cercles C et Σ, ce qu'il est absurde de supposer puisque tous ces cercles sont tangents aux circonférences S et U. Donc la droite BA passe par le point ω, qui est le centre d'homothétie inverse des deux circonférences S et U.

Cela posé, pour obtenir le point V, on construira un cercle T quelconque par la méthode connue, puis on joindra ωA qu'on prolongera jusqu' en B. La droite BT coupera le diamètre ωI au point V cherché ; le rayon de la circonférence est BV.

II. *On prend une droite quelconque LL' perpendiculaire à la ligne des centres Oω. Soient ωF, ωG les tangentes menées du point ω à l'un des cercles T ; soient F'' et G' les points d'intersection de la droite LL' avec les bissectrices des angles FωO et GωO. Les points F'' et G' forment une division homographique quand le cercle T varie.*

Posons $F'L = x$, $G'L = y$; il faut montrer que x et y satisfont à une relation de la forme

$$mxy + nx + py + q = 0.$$

La figure nous donne

$$GT = \rho \operatorname{tg} \frac{G\omega F}{2}.$$

Or,
$$\frac{G\omega F}{2} = \frac{G\omega L}{2} - \frac{F\omega L}{2},$$

et
$$\operatorname{tg}\frac{G\omega L}{2} = \frac{y}{\omega L}, \ \operatorname{tg}\frac{F\omega L}{2} = \frac{x}{\omega L};$$

d'où, en posant $\omega L = l$,

(1)
$$GT = \rho\frac{l(y-x)}{l^2+xy}.$$

Cherchons une autre expression de GT. On a

(2)
$$\overline{OT}^2 = \overline{\omega O}^2 + \overline{\omega T}^2 - 2\omega O \cdot \omega T \cos O\omega T.$$

D'ailleurs on sait que

$$\overline{OT}^2 = (r + GT)^2, \ \overline{\omega O}^2 = d^2, \ \overline{\omega T}^2 = \overline{GT}^2 + \rho^2,$$

et
$$\cos O\omega T = \cos\left(\frac{G\omega L}{2} + \frac{F\omega L}{2}\right),$$
$$= \cos\frac{G\omega L}{2}\cos\frac{F\omega L}{2} - \sin\frac{G\omega L}{2}\sin\frac{F\omega L}{2}.$$

Remplaçons ces cosinus et sinus par leurs expressions au moyen des tangentes des mêmes arcs, il vient

$$\cos O\omega T = \frac{l^2 - xy}{\sqrt{(x^2+l^2)(y^2+l^2)}},$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500030091 Published online by Cambridge University Press

et la formule (2) devient

$$(r+\mathrm{GT})^2 = d^2+\rho^2+\overline{\mathrm{GT}}^2 - 2d\sqrt{\rho^2+\overline{\mathrm{GT}}^2}\frac{l^2-xy}{\sqrt{(x^2+l^2)(y^2+l^2)}}$$

c'est à dire

$$r^2+2r\cdot\mathrm{GT} = d^2+\rho^2-2d(l^2-xy)\frac{\sqrt{\overline{\mathrm{GT}}^2+\rho^2}}{\sqrt{(x^2+l^2)(y^2+l^2)}}.$$

Or, en tenant compte de la relation (1), on a

$$\overline{\mathrm{GT}}^2+\rho^2 = \rho^2\frac{l^2(y-x)^2+(l^2+xy)^2}{(l^2+xy)^2},$$

ou
$$\overline{\mathrm{GT}}^2+\rho^2 = \frac{\rho^2}{(l^2+xy)^2}[l^4+(x^2+y^2)l^2+x^2y^2],$$

$$\overline{\mathrm{GT}}^2+\rho^2 = \frac{\rho^2}{(l^2+xy)^2}(l^2+x^2)(l^2+y^2).$$

Par suite on peut écrire

$$r^2+2r\cdot\mathrm{GT} = d^2+\rho^2-2d\rho\frac{l^2-xy}{l^2+xy}.$$

Si nous égalons l'expression (1) de GT avec celle que fournit cette dernière relation, il vient, après quelques simplifications

(3) $$[(\rho+d)^2-r^2]xy+2lr\rho(y-x)+l^2[(\rho-d)^2-r^2]=0.$$

C'est bien une relation d'homographie entre x et y.

On peut, en remarquant qu' x et y n'y figurent que par les rapports x/l et y/l, ce qu'on pouvait prévoir, poser

$$x/l = x_1,\ y/l = x_2,$$

avec $$\mathrm{A} = (\rho+d)^2-r^2,\ \mathrm{B} = r\rho,\ \mathrm{C} = (\rho-d)^2-r^2,$$

et on a la relation

(4) $$\mathrm{A}x_1x_2+2\mathrm{B}(x_2-x_1)+\mathrm{C}=0.$$

III. *Soient T_1, T_2, T_3, … T_n une série de cercles T orthogonaux au cercle Σ, le premier aux points A_1 et A_2, le second aux points A_2 et A_3, le troisième aux points A_3 et A_4, … le $n^{\text{ième}}$ aux points A_n et A_{n+1}. La condition nécessaire et suffisante pour que le point A_{n+1} coïncide avec le point A_1 est que l'on puisse satisfaire à une relation de la forme*

$$\mathrm{tg}\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2r\rho}\sqrt{(\rho^2+d^2-r^2)^2-4d^2\rho^2}.$$

Désignons d'une manière générale par son ordonnée x_p le point de rencontre de la bissectrice de l'angle $\mathrm{A}_p\omega\mathrm{L}$ avec la perpendiculaire LL′. Il est clair que si le point A_{n+1} vient coïncider avec le point A_1, le point x_{n+1} coïncidera avec le point x_1 ; et réciproquement.

https://doi.org/10.1017/S0013091500030091 Published online by Cambridge University Press

Nous sommes donc ramené à chercher la condition nécessaire et suffisante pour que la valeur de x_{n+1} obtenue en appliquant successivement la formule (4) à toutes les valeurs consécutives des indices jusqu' à l'indice $(n+1)$, soit égale à la valeur primitive x_1. Nous tirons de (4)

$$x_2 = \frac{2Bx_1 - C}{Ax_1 + 2B}.$$

Désignons par a et b les racines de l'équation du second degré en x obtenue en supposant dans la relation (4) $x_1 = x_2 = x$. On a

$$a + b = 0, \ Aab = C.$$

Substituons à C cette valeur, il vient

$$x_2 = \frac{2Bx_1 - Aab}{Ax_1 + 2B},$$

d'où
$$\frac{x_2 - a}{x_2 - b} = \frac{2Bx_1 - Aab - Aax_1 - 2Ba}{2Bx_1 - Aab - Abx_1 - 2Bb},$$

ou
$$\frac{x_2 - a}{x_2 - b} = \frac{(2B - Aa)(x_1 - a) - Aa(a+b)}{(2B - Ab)(x_1 - b) - Bb(a+b)}.$$

Mais $a + b = 0$; donc

$$\frac{x_2 - a}{x_2 - b} = \frac{2B - Aa}{2B - Ab} \cdot \frac{x_1 - a}{x_1 - b}.$$

On aura pareillement

$$\frac{x_3 - a}{x_3 - b} = \frac{2B - Aa}{2B - Ab} \cdot \frac{x_2 - a}{x_2 - b}, \\ = \left(\frac{2B - Aa}{2B - Ab}\right)^2 \cdot \frac{x_1 - a}{x_1 - b},$$

et en général

$$\frac{x_{n+1} - a}{x_{n+1} - b} = \left(\frac{2B - Aa}{2B - Ab}\right)^n \cdot \frac{x_1 - a}{x_1 - b}.$$

Si on a $x_{n+1} = x_1$, cette relation donne

$$\left(\frac{2B - Aa}{2B - Ab}\right)^n = 1.$$

Par suite
$$\frac{2B - Aa}{2B - Ab} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}.$$

Mais, A et C étant dans nos hypothèses des quantités essentiellement positives, on a

$$a = -\sqrt{\frac{C}{A}}\,i, \ b = +\sqrt{\frac{C}{A}}\,i,$$

d'où
$$Aa = -\sqrt{AC}\,i, \ Ab = +\sqrt{AC}\,i;$$

et l'on a

$$\frac{2B + \sqrt{AC}\,i}{2B - \sqrt{AC}\,i} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n}.$$

https://doi.org/10.1017/S0013091500030091 Published online by Cambridge University Press

En égalant les parties réelles et les parties imaginaires, il vient

$$(5) \qquad 4B^2 - AC = (4B^2 + AC)\cos\frac{2k\pi}{n},$$

$$(6) \qquad 4B\sqrt{AC} = (4B^2 + AC)\sin\frac{2k\pi}{n},$$

d'où (7) $$\operatorname{tg}\frac{2k\pi}{n} = \frac{4B\sqrt{AC}}{4B^2 - AC},$$

condition nécessaire et suffisante pour que les relations (5) et (6) soient satisfaites, car le module du premier membre de la relation précédente est égal à l'unité. On tire de (7)

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} = \frac{4B^2 - AC \pm \sqrt{16ACB^2 + (4B^2 - AC)^2}}{4B\sqrt{AC}}$$

c'est à dire $$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} = \frac{4B^2 - AC \pm (4B^2 + AC)}{4B\sqrt{AC}}.$$

En remplaçant A, B, C par leurs valeurs, il vient

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} = \frac{2r\rho}{\sqrt{(\rho^2 + d^2 - r^2)^2 - 4d^2\rho^2}}$$

et $$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} = \frac{-\sqrt{(\rho^2 + d^2 - r^2)^2 - 4d^2\rho^2}}{2r\rho}.$$

Ces deux valeurs sont inverses l'une de l'autre et de signes contraires, ce qu'on savait. On peut donc simplement conserver la dernière, et, en ne considérant que la valeur absolue, écrire

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2r\rho}\sqrt{(\rho^2 + d^2 - r^2)^2 - 4d^2\rho^2}.$$

C'est bien la relation donnée.

The Nine-Point Circle.

By Rev. John Wilson, M.A.

I. To find the nine points.

(1) Let M (fig. 20) be the centre of the circle which passes through H, K, L, the middle points of BC, BA, CA.

Draw the diameter HMU.

Join UX, UA, and the three lines forming the median $\triangle$ HKL.

UX is $\perp$ to BC and KL.

https://doi.org/10.1017/S0013091500030091 Published online by Cambridge University Press

(2) Let $\triangle$ HKL be turned through 180° round M, then H, K, L will assume the positions U, V, W;
and WU = and $\parallel$ HL is also = and $\parallel$ AK, the half of AB.

Hence AU is = and $\parallel$ KW.

(3) Now the $\angle$ LKW is a right angle.

Hence KW and AU are $\perp$ KL (and BC),
and therefore $\parallel$ UX.

AUX is therefore a straight line $\perp$ to BC.

Similarly BZ, and CY are straight lines, and they intersect in O, the orthocentre;

$$\left.\begin{array}{l}\text{and H, K, L}\\ \quad\text{U, V, W}\\ \quad\text{X, Y, Z}\end{array}\right\}\text{are points in the circle.}$$

H, K, L are the middle points of the $\triangle$ ABC;

X, Y, Z the feet of the $\perp^{ars}$ from the vertices A, C, B on the opposite sides;

U, V, W the points in which these $\perp^{ars}$ cut the circle.

II. To show that U, V, W, the points in which the $\perp^{ars}$ from the vertices to the opposite sides cut the medioscribed circle, bisect the segments of the $\perp^{ars}$ between the orthocentre and the vertices.

In the $\triangle$ AOB,
KW is drawn through the middle point of AB $\parallel$ to the base;
hence, KW = $\frac{1}{2}$AO.
$\therefore$ AU = UO.

Similarly BW = WO and CV = VO.

III. To show that S, the circum-centre, corresponds with O the ortho-centre. Suppose the $\triangle$ HKL swung round as before.

If LS and HS be drawn $\perp$ to the sides, S is the centre of the circumscribed circle.

In the triangles LHS, UWO

$$\left.\begin{array}{l}\text{LH is} \parallel \text{and = UW}\\ \text{HS} \parallel \text{UO}\\ \text{LS} \parallel \text{WO}\end{array}\right\}$$

Hence the triangles are congruent
and HS = UO.

IV. The line joining S and O is bisected in M.

https://doi.org/10.1017/S0013091500030091 Published online by Cambridge University Press

Since HS is $\parallel$ and $=$ UO,
UOHS forms a $\parallel^m$ whose diagonals mutually bisect.
But UH is bisected in M;
hence SO passes through and is bisected in M.

V. If the median AH be drawn it will cut OS in G so that OG = 2GS.

Through U draw UP $\parallel$ OG;
then UP = $\frac{1}{2}$OG.

AG is bisected in P, hence a line PQ drawn through P $\parallel$ AO bisects OG and is = $\frac{1}{2}$AO = UO = SH.

Hence PQHS is a $\parallel^m$ whose diagonals mutually bisect.

Hence QG = GS,
or GS = $\frac{1}{3}$OS.

HG is also equal to $\frac{1}{3}$AH.

Hence G is the point of intersection of the medians of the $\triangle$ ABC.

VI. O, M, G, and S, respectively the ortho-centre, the centre of the medioscribed circle, the centroid and the centre of the circumscribed circle, are collinear.

Sixth Meeting, April 13*th*, 1888.

W. J. Macdonald, Esq., M.A., F.R.S.E., President, in the Chair.

Extension of a theorem of Abel's in summation to integration.

By George A. Gibson, M.A.

The extension referred to was first given, I believe, by M. Ossian Bonnet in *Liouville's Journal*, vol. xiv., pp. 249 *et seq.* M. Jordan, in his *Cours d'Analyse*, tom. 2, § 82, seems to refer to this article in attributing to M. Bonnet the discovery of the "Second Theorem of the Mean," though he does not explicitly say so. In a course of lectures on "Simple and Multiple Integrals," delivered at Berlin University in the summer of 1885 by Professor Kronecker, which I attended, the "Second Theorem of the Mean" was shown to be a case of Abel's theorem, though I do not remember that Professor Kronecker mentioned M. Bonnet's name in connection with it. I

https://doi.org/10.1017/S0013091500030091 Published online by Cambridge University Press