Canad. Math. Bull. Vol. **33** (2), 1990

EXEMPLES DE DIMENSION DE KRULL D'ANNEAUX DE POLYNOMES

PAR

AHMED OUERTANI

ABSTRACT. For each pair (m, n) of integers such that $m+1 \leqq n \leqq 2m+1$, we give, by original and straightforward methods, some examples of rings A' such that $\dim A' = m$ and $\dim A'[X] = n$.

Introduction Tous les anneaux considérés sont commutatifs, unitaires, intégres et de dimension de Krull finie. Rappellons que la dimension de Krull d'un anneau A est la longueur maximale des chaines $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ d'idéaux premiers de A. Rappellons aussi que si A est de dimension m, alors l'anneau des polynômes $A[X]$ est de dimension comprise entre $m + 1$ et $2m + 1$ (A. Seidenberg [5]).

Le but de cet article est pour tout couple d'entiers (m, n), tels que $m+2 \leqq n \leqq 2m+1$, de donner de nouveaux exemples d'anneaux A tels que $\dim A = m$ et $\dim A[X] = n$ (le cas $n = m + 1$ étant celui des anneaux noethériens (Krull. $W[1]$) et prufériens (A. Seidenberg [6])).

Pour cela on considère un sous-anneau A' de la forme $A + M$ d'un anneau B' de la forme $B + M$, comme il est d'ailleur classique de la faire (E. Bastida and R. Gilmer [1], J. W. Brewer and E. A. Rutter [2], D. Costa, J. Mott and M. Zafrallah [3]), mais sans hypothèses superflues, consistant à se limiter à des anneaux locaux, intégralement clos, ou de valuation pour l'anneau B'.

On montre par un argument très simple qu'il suffit que le corps des fractions de B soit transcendant sur le corps des fractions de A pour pouvoir obtenir le résultat en quelques lignes. En particulier des exemples sont donc fournis par la considération du sous-anneau d'un anneau de polynômes $B' = K[X]$, formé par les polynômes de terme constant dans A. Bien sûr A' est intégralement clos si A est intégralement clos.

On note A' un anneau de la forme $A + M$ où M est un idéal de A', A un anneau tels que $A \cap M = (0)$, on a alors $A'/M \simeq A$ et $A' = A[M]$.

Généralités. (1) De l'isomorphisme $A'/M \simeq A$, on déduit que $\dim A' \geqq \dim A + ht(M)$; (2) Si R est une A-algèbre alors $\dim R \leqq \sup\{\dim A[r_1, \ldots, r_n]\}$, où $(r_1, \ldots, r_n)$ parcourt les familles finies d'éléments de R.

En effet si $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ est une chaine d'idéaux premiers de R, de longueur n. Pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$, il existe un élément r_i dans P_i et n'appartenant pas à

Reçu par la rédaction le 21 septembre 1987.

The 1980 Mathematics Subject Classification 13.C.15.

https://doi.org/10.4153/CMB-1990-023-5 Published online by Cambridge University Press

P_{i-1}. Alors la trace de la chaine $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_n$ dans $A[r_1, \ldots, r_n]$ est de même longueur n.

Comparaison de $\dim A'$ **et** $\dim B'$. Si $A' = A+M$ est un sous-anneau de $B' = B+M$ on compare les dimensions de A' et de B'.

LEMME 1. *Si $f \in M\backslash(0)$ alors les localisés $(A')_f$ et $(B')_f$ pour la partie multiplicative $\{1, f, \ldots, f^n, \ldots\}$ sont égaux.*

LEMME 2. $ht_{B'}(M) \leqq ht_{A'}(M) \leqq \dim B'$.

PREUVE. $ht_{B'}(M) \leqq ht_{A'}(M)$ car tout idéal premier de B' contenu dans M est un idéal premier de A'.

Pour montrer que $ht_{A'}(M) \leqq \dim B'$. On considère $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_n = M$ une chaine d'idéaux premiers de A' au dessous de M; soit $f \in M\backslash\mathfrak{P}_{n-1}$. Puisque $(A')_f = (B')_f$, alors dans B', il existe une chaine de n idéaux premiers $P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_{n-1}$ tels que $f \notin P_{n-1}$. Soit $I = P_{n-1} + M$; alors I est un idéal propre de B' (sinon $1 = x+m$ où $x \in P_{n-1}$ et $m \in M$, mais alors $x = 1-m \in A' \cap P_{n-1} = \mathfrak{P}_{n-1}$ et on aurait $A' = \mathfrak{P}_{n-1} + M = M$) ainsi P_{n-1} n'est pas maximal dans B' et $\dim B' \geqq n$.

PROPOSITION 1. *On a les inégalités :*

$$\dim A + ht_{B'}(M) \leqq \dim A + ht_{A'}(M) \leqq \dim A' \leqq \dim A + \dim B'.$$

PREUVE. Si $\mathfrak{P}_0 \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_d \subset \mathfrak{P}_{d+1} \subset \ldots \subset \mathfrak{P}_n$ est une chaine d'idéaux premiers de A' où $\mathfrak{P}_{d+1}$ est le premier idéal de cette chaine contenant M, alors ou bien $M \subset \mathfrak{P}_{d+1}$ auquel cas $d \leqq \dim B'$, $n-d \leqq \dim A$ et donc $n \leqq \dim A + \dim B'$, ou bien $M = \mathfrak{P}_{d+1}$ et d'après le lemme 2, $d+1 \leqq \dim B'$, $n-d-1 \leqq \dim A$ et d'où encore $n \leqq \dim A + \dim B'$.

COROLLAIRE 1. *Si M est de hauteur maximale dans B', alors*

$$ht_{A'}(M) = ht_{B'}(M)$$

et, notant $ht(M)$ la hauteur de M dans A' ou B',

$$\dim A' = \dim A + \dim B' = \dim A + ht(M).$$

Lorsque $A' = A + M \subseteq B' = B + M$, l'anneau de polynômes $A'[X] = A[X] + M[X]$ est un sous-anneau de $B'[X] = B[X] + M[X]$.

LEMME 3. *Si le corps des fractions de B est transcendant sur le corps des fractions de A. On a :*

$$ht_{A'[X]}(M[X]) \geqq ht_{B'}(M) + 1$$

PREUVE. Si $(0) \subset N_1 \subset \ldots \subset N_{m-1} \subset M$ est une chaine d'idéaux premiers de B', b un élément de B transcendant sur A. L'application

$$\begin{aligned} \phi_b : A'[X] &\longrightarrow B' \\ F &\longrightarrow F(b) \end{aligned}$$

est un morphisme d'anneaux. $\phi_b^{-1}(N_{m-1}) = P = \{F \in A'[X]\, tq\, F(b) \in N_{m-1}\}$ est un idéal premier de $A'[X]$ tel que $N_{m-1}[X] \subset P \subset M[X]$. En effet puisque N_{m-1} est un idéal de B', alors $N_{m-1}[b] \subset N_{m-1}$, d'où $N_{m-1}[X] \subseteq P$, et si m est un élément de M n'appartenant pas à M_{m-1}, le polynôme $F = mX - mb$ appartient à $A'[X]$ et est tel que $F(b) = 0$, mais F n'appartient pas à $N_{m-1}[X]$, ainsi $N_{m-1}[X] \subset P$. D'autre part si $f = f_1 + f_2 \in A'[X]$ où $f_1 \in A[X]$, $f_2 \in M[X]$ est tel que $f(b) = f_1(b) + f_2(b) \in N_{m-1}$, puisque $f_2(b) \in M$, alors $f_1(b) = 0$, mais b transcendant sur A, donc $f_1 = 0$ et $f \in M[X]$, soit $P \subseteq M[X]$, de plus cette inclusion est stricte car $N_{m-1} \subset M$.

Si M est de hauteur maximale dans B' et B' est tel que $\dim B'[X] = \dim B' + 1$ (c'est le cas si B' est noethérien ou de Prûfer... etc.);

$$\dim B'[X] = ht_{B'}(M) + 1$$

et donc

$$\dim A[X] + ht_{A'[X]}(M[X]) \leqq \dim A'[X] \leqq \dim A[X] + \dim B'[X]$$

d'où

$$\dim A[X] + ht_{B'}(M) + 1 \leqq \dim A'[X] \leqq \dim A[X] + ht_{B'}(M) + 1$$

et par suite

$$\begin{aligned}\dim A'[X] &= \dim A[X] + ht_{B'}(M) + 1\\ &= \dim A[X] + \dim B' + 1\end{aligned}$$

Conclusion. Si A est tel que $\dim A[X] = \dim A + d$ alors $\dim A'[X] = \dim A' + d + 1$. Donc par récurrence, ceci permet de retrouver tous les cas des anneaux de type (m, n) tels que $m + 1 \leqq n \leqq 2m + 1$.

EXEMPLES. Soient m et n deux entiers tels que $n = m + 1 + d$ où $0 \leqq d \leqq m$ et $r = m - d$. On part d'un anneau intégre A_0 tel que $\dim A_0 = r$, $\dim A_0[X] = r + 1$ (par exemple $A_0 = k[X_1, \ldots, X_r]$ où k est un corps).

On note K_0 le corps des fractions de A_0, A_1 le sous-anneau de $K_0(Y_1)[Z_1]$ formé des polynômes à terme constant dans A_0, alors $\dim A_1 = r + 1$, $\dim A_1[X] = r + 3$, $K_0(Y_1, Z_1)$ est le corps des fractions de A_1. Remarquons que ceci permet de retrouver, mais de façon très simple un anneau A dont la différence entre $\dim A[X]$ et $\dim A$ soit égale à 2.

Si $K_0(Y_1, \ldots, Y_{d-1}, Z_1, \ldots, Z_{d-1})$ est le corps des fractions de A_{d-1},

$$\begin{aligned}\dim A_{d-1} &= r + d - 1\\ \dim A_{d-1}[X] &= r + 1 + 2(d - 1).\end{aligned}$$

On note A_d le sous anneau de $K_0(Y_1, \ldots, Y_d, Z_1, \ldots, Z_{d-1})$ $[Z_d]$ formé des polynômes à terme constant dans A_{d-1} alors

$$\begin{aligned}\dim A_d &= \dim A_{d-1} + 1 = m\\ \dim A_d[X] &= \dim A_{d-1}[X] + 2 = n\end{aligned}$$

et $K_0(Y_1, \ldots, Y_d, Z_1, \ldots, Z_d)$ est le corps des fractions de A_d.

Bibliographie

1. E. Bastida and R. Gilmer, *Overrings and divisorial ideals of rings of the forme $D+M$*, Michigan Math. J. **20** (1973), 79–95.

2. J. W. Brewer and E. A. Rutter, *$D+M$ constructions with general overrings*, Michigan Math. J. **23** (1976) 33–42.

3. D. Costa, J. Mott and M. Zafrullah, *The $D+XD_S[X]$ construction*, J. Algebra **53** (1978), 423–439.

4. W. Krull, *Jakobsonche Ringe, Hilbertsche Nullstellensatz*, Dimensionen theorie. Math. Zeit. **54** (1951), 354–387.

5. A. Seidenberg, *A note on the dimension theory of rings*, Pacific J. Math. **3** (1953) 505–512.

6. ———, *On the dimension theory of rings II*, Pacific J. Math. **4** (1954), 603–614.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
1060 Belvédère, Tunis