Ayda I. Arruda et Newton C.A. da Costa
Nagoya Math. J.
Vol. 38 (1970), 71–84

SUR LE SCHÉMA DE LA SÉPARATION*

AYDA I. ARRUDA ET NEWTON C.A. DA COSTA

Dedicated to Professor Katuzi Ono on his 60th birthday

Introduction

En continuant l'étude d'un problème soulevé dans [3] et plus tard abordé par un de nous dans [1] et [2], nous avons publié deux "abstracts" (voir [6] et [7]) sur certains calculs propositionnels appellés $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 5$, et leurs relations avec le postulat de la séparation. On développe maintenant les systèmes $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 5$, et on esquisse la construction des calculs correspondants de prédicats de premier ordre. Enfin, on démontre la non trivialité des théories correspondantes des ensembles quand on utilise des postulats comme ceux de Zermelo-Fraenkel, mais avec le schéma de la séparation formulé sans les restrictions ad hoc pour éviter les paradoxes.

Notre première tentative de construire des théories des ensembles avec le postulat de la séparation sans les restrictions mentionnées ([3]), fut fait au moyen de la suppression du théorème de la déduction. Mais, jusq' à présent, on n'a pas rencontré une démonstration de non trivialité de ces théories. Toutefois ce fait a conduit à ce travail, au moyen de la suppression de la régle de modus ponens, mais avec la conservation du théorème de la déduction (voir [6] et [7]).

Ainsi, dans l'axiomatisation des systèmes $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 5$, on procède comme dans [2], au moyen d'une formalisation du concept de déduction.

Dans [2], on a employé la définition suivante de $\rightarrow$-formule:

Définition. Soit Γ une suite finie de formules et A une formule quelconque (comme dans Kleene [11], avec des adaptations évidentes); alors, $\Gamma \rightarrow A$ est une $\rightarrow$-formule. Dans le cas où Γ est vide, $\emptyset \rightarrow A$ est abrégée par $\rightarrow A$.

Received February 27, 1969

*) Travail réalisé avec l'aide partielle de la "Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP)", São Paulo, Brésil.

La terminologie, les notations, etc. sont transposées des traveaux cités dans la bibliographie, avec des modifications claires.

Le symbole $\longleftrightarrow$ écrit entre deux formules A et B abrége:

$$A \rightarrow B \quad \text{et} \quad B \rightarrow A.$$

Le symbole metamathématique de déduction dans nos systèmes sera $\mid\!\rightarrow$. La suite finie de formules $A_1, A_2, \cdots, A_n$ sera quelquefois dénotée par

$$A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n.$$

Soient $\Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_m$, $m \geqslant 1$, $m \rightarrow$-formules et Σ une $\rightarrow$-formule telle que:

$$\text{(I)} \quad \Sigma_1, \Sigma_2, \cdots, \Sigma_m \mid\!\rightarrow \Sigma;$$

on écrira quelquefois (I) de la manière suivante:

$$\text{(II)} \quad \frac{\Sigma_1 \; \Sigma_2 \cdots \Sigma_m}{\Sigma}.$$

(Il va sans dire que la virgule dans (I) ne peut pas être substituée par $\wedge$; dans le cas (II), on n'utilisera jamais des virgules entre les $\rightarrow$-formules.)

On dit qu'une régle α n'est pas valable dans un calcul $\mathscr{C}$ si α n'est pas dérivable dans $\mathscr{C}$. Une telle régle est admissible si l'on peut l'ajouter à $\mathscr{C}$ sans modifier l'ensemble de ses théses.

Un calcul $\mathscr{C}_1$ est plus fort que un calcul $\mathscr{C}_2$, s'il y a une thése de $\mathscr{C}_1$ qui n'est pas démontrable dans $\mathscr{C}_2$.

1. Les calculs propositionnels $\mathbf{J}_n$.

Avec la définition précédante de $\rightarrow$-formule, les postulats des calculs $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 4$, sont ceux qui suivent:

Postulats de $\mathbf{J}_1$:

$\rightarrow_1)$ $A \rightarrow A$

$\rightarrow_2)$ $\dfrac{\Gamma \rightarrow A}{C, \Gamma \rightarrow A}$

$\rightarrow_3)$ $\dfrac{C, C, \Gamma \rightarrow A}{C, \Gamma \rightarrow A}$

$\rightarrow_4)$ $\dfrac{\Delta, C, D, \Gamma \rightarrow A}{\Delta, D, C, \Gamma \rightarrow A}$

$\rightarrow_5)$ $\dfrac{\Delta \rightarrow C \qquad C, \Gamma \rightarrow A}{\Delta, \Gamma \rightarrow A}$

$\supset_1)$ $\dfrac{\Gamma, A \rightarrow B}{\Gamma \rightarrow A \supset B}$

$\supset_2)$ $(A \supset B)$ & $(A \supset (B \supset C)) \rightarrow A \supset C$

$\&_1)$ $A, B \rightarrow A \;\&\; B$

$\&_2)$ $A \;\&\; B \rightarrow A$

$\&_3)$ $A \;\&\; B \rightarrow B$

$\&_4)$ $(A \supset B) \;\&\; (A \supset C) \rightarrow A \supset B \;\&\; C$

$\vee_1)$ $A \rightarrow A \vee B$

$\vee_2)$ $B \rightarrow A \vee B$

$\vee_3)$ $(A \supset C) \;\&\; (B \supset C) \rightarrow A \vee B \supset C$

https://doi.org/10.1017/S0027763000013532 Published online by Cambridge University Press

$\vee_4)\quad \dfrac{\Gamma, A \to C \qquad \Gamma, B \to C}{\Gamma, A \vee B \to C}$ $\qquad\qquad \neg_1)\quad A \to \neg\neg A$

$\neg_2)\quad \neg\neg A \to A$ $\qquad\qquad \neg_3)\quad \to \neg(A \ \&\ \neg A) \qquad \neg_4)\quad \to A \vee \neg A$

Les postulats de $\mathbf{J}_2$ sont ceux de $\mathbf{J}_1$ et encore:

$\neg_5)\quad \to (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$ $\qquad\qquad \neg_6)\quad \neg A, \neg B \to \neg(A \vee B)$

$\mathbf{J}_3$ est obtenu en rajoutant à $\mathbf{J}_2$ les postulats:

$\neg_7)\quad A, \neg B \to \neg(A \supset B)$ $\qquad\qquad \neg_8)\quad A, \neg B \to \neg(A \ \&\ B)$

$\neg_9)\quad \neg A, B \to \neg(A \ \&\ B)$ $\qquad\qquad \neg_{10})\quad \neg A, \neg B \to \neg(A \ \&\ B)$

Les postulats de $\mathbf{J}_4$ sont ceux de $\mathbf{J}_2$ et encore:

$$\neg_{11})\quad \frac{A \to B \qquad \to \neg B}{\to \neg A}.$$

Théorème 1. *Dans* $\mathbf{J}_1$ *les conditions "pour toute suite finie* Γ *on a* $\Gamma \to F \mapsto \Gamma \to G$" *et* "$\Gamma \mapsto F \to G$" *sont équivalentes.*

Théorème 2. *Dans* $\mathbf{J}_1$ *on peut démontrer, entre autres, les schémas et les régles ci-dessous:*

$\dfrac{\Gamma \to A \qquad \Gamma \to B}{\Gamma \to A \ \&\ B}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \to A \supset B \qquad \Gamma \to A \supset (B \supset C)}{\Gamma \to A \supset C}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \to A}{\Gamma \to B \supset A}$

$\dfrac{\Gamma \to A \supset B \qquad \Gamma \to A \supset C}{\Gamma \to A \supset B \ \&\ C}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \to A \supset C \qquad \Gamma \to B \supset C}{\Gamma \to A \vee B \supset C}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \to A \supset (B \supset C)}{\Gamma \to (A \supset B) \supset (A \supset C)}$

$\to A \supset A \qquad \to A \supset (B \supset A) \qquad A \supset B \to (A \supset (B \supset C)) \supset (A \supset C)$

$A \supset (B \supset C) \to (A \supset B) \supset (A \supset C) \qquad (A \supset B) \ \&\ (B \supset C) \to A \supset C$

$A \supset B \to (B \supset C) \supset (A \supset C) \qquad (B \supset C) \to (A \supset B) \supset (A \supset C)$

$A \leftrightarrow A \qquad \to A \sim A \qquad A \sim B \leftrightarrow B \sim A \qquad A \sim B,\ B \sim C \to A \sim C$

$\dfrac{\Gamma \to A \supset B}{\Gamma \to (B \supset C) \supset (A \supset C)}$ $\qquad \dfrac{\Gamma \to A \supset B \qquad \Gamma \to B \supset C}{\Gamma \to A \supset C}$

$\dfrac{\to A \sim B}{\to B \sim A}$ $\qquad \dfrac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$

$A \supset A \to B \supset B \qquad A \sim A \leftrightarrow B \sim B \qquad A, B \to A \supset B$

$\to A \supset (B \supset (A \supset B)) \qquad \to A \supset (B \supset A \ \&\ B) \qquad A \supset (B \supset C) \to B \supset (A \supset C)$

$\to A \supset ((A \supset B) \supset B) \qquad \to A \ \&\ (A \supset B) \supset B \qquad A \ \&\ B \to A \supset B$

$\to A \ \&\ B \supset A \qquad \to A \ \&\ B \supset B \qquad A \ \&\ B \to A \sim B$

$A \to B \supset A \,\&\, B$	$\to (A \supset B) \,\&\, (A \supset C) \supset (A \supset B \,\&\, C)$	$A \,\&\, A \leftrightarrow A$
$A \supset (B \supset C) \leftrightarrow A \,\&\, B \supset C$	$A \vee A \leftrightarrow A$	$A \vee (B \vee C) \leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
$A \sim B \to A \,\&\, C \sim B \,\&\, C$	$A \sim B \to C \,\&\, A \sim C \,\&\, B$	$A \sim B \to A \vee C \sim B \vee C$
$A \sim B \to C \vee A \sim C \vee B$	$A \sim B \to A \supset C \sim B \supset C$	$A \sim B \to C \supset A \sim C \supset B$
$A \,\&\, (B \vee A) \leftrightarrow A$	$A \vee (B \,\&\, A) \leftrightarrow A$	$A \supset (A \supset B) \to A \supset B$
$A \vee (B \& C) \leftrightarrow (A \vee B) \& (A \vee C)$		$A \& (B \vee C) \leftrightarrow (A \& B) \vee (A \& C)$
$A \,\&\, B \leftrightarrow B \,\&\, A$	$A \vee B \leftrightarrow B \vee A$	$A \& (B \& C) \leftrightarrow (A \& B) \& C.$

COROLLAIRE 1. *Les schémas de la forme $F \to G$ ou $F \leftrightarrow G$ du théoreme précedent entrainent la validité des schémas correspondants $\to F \supset G$ et $\to F \sim G$.*

COROLLAIRE 2. *Si A et B sont des formules, C_A est une formule construite à partir de A en utilisant seulement $\supset$, $\&$, $\vee$, et C_B est une formule obtenue à partir de C_A par la substituition de quelques occurences de A par B, alors on a:*

$$\vdash\!\to A \sim B \to C_A \sim C_B.$$

THÉORÈME 3. *Dans $\mathbf{J}_1$ ne sont pas valables, entre autres, les schémas suivants:*

$A \& \neg A \to B$	$A \& \neg A \to \neg B$	$A, \neg A \to B$
$A, \neg A \to \neg B$	$\to A \& \neg A \supset B$	$\to A \& \neg A \supset \neg B$
$A \to \neg A \supset B$	$A \to \neg A \supset \neg B$	$\to ((A \supset B) \supset A) \supset A$
$(A \supset B) \supset A \to A$	$\neg A \to A \supset B$	$\neg A \to A \supset \neg B$
$\to \neg A \supset (A \supset B)$	$\to \neg A \supset (A \supset \neg B)$	$\to A \supset (\neg A \supset B)$
$\to A \supset (\neg A \supset \neg B)$	$A \supset B \to \neg B \supset \neg A$	$\to (A \supset B) \supset (\neg B \supset \neg A)$
$A \supset B,\ A \supset \neg B \to \neg A$	$\to (A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A).$	

Démonstration. Par la matrice $M_1 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \to \rangle$, où N est l'ensemble des nombres naturels positifs et I est l'ensemble des nombres impairs. Les symboles v, v_d et v_{nd} sont respectivement les abréviations de *valeur*, *valeur désignée* et *valeur non désignée*. La suite vide sera denotée par $\emptyset$ et $v(\emptyset) = 1$. Les fonctions $\supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \to$ de M_1 sont définies comme il suit:

$\supset$: $v(A \supset B) = v(B)$ si a) $v(A) = d$ et $v(B) = nd$ ou
b) $v(A) = nd$ et plus petite que $v(B) = nd$;
" $= 1$ dans tous les autres cas.

https://doi.org/10.1017/S0027763000013532 Published online by Cambridge University Press

&: $v(A \mathbin{\&} B) = v_{nd}(v(A), v(B))$ quand seulement une des valeurs est non désignée;

″ $= \text{Max.}\,(v(A), v(B))$ dans tous les autres cas.

$\vee$: $v(A \vee B) = v_d(v(A), v(B))$ quand seulement une des valeurs est désignée;

″ $= \text{Min.}\,(v(A), v(B))$ dans tous les autres cas.

$\neg$: $v(\neg A) = v(A) + 1$ si $v(A) = d$;

″ $= v(A) - 1$ si $v(A) = nd$.

$\wedge$: $v(\Delta, \Gamma) = v_{nd}(v(\Delta), v(\Gamma))$ quand seulement une des valeurs est non désignée;

″ $= \text{Max.}\,(v(\Delta), v(\Gamma))$ dans tous les autres cas.

$\rightarrow$: $v(\Gamma \rightarrow A) = v(A)$ si a) $v(\Gamma) = d$ et $v(A) = nd$ ou

b) $v(\Gamma) = nd$ et plus petite que $v(A) = nd$;

″ $= 1$ dans tous les autres cas.

THÉORÈME 4. *On démontre dans* $\mathbf{J}_2$*, entre autres, les schémas suivants, au-delà de ceux du théorème* 2:

$A \supset B \rightarrow \neg B \supset \neg A$	$A \sim B \rightarrow \neg A \sim \neg B$	$A \rightarrow \neg A \supset B$
$\rightarrow A \mathbin{\&} \neg A \supset B$	$\rightarrow A \mathbin{\&} \neg A \supset \neg B$	$\neg A \rightarrow A \supset B$
$\neg(A \mathbin{\&} \neg B) \rightarrow A \supset B$	$\rightarrow A \mathbin{\&} \neg B \rightarrow \neg(A \mathbin{\&} B)$	$\rightarrow \neg A \mathbin{\&} B \supset \neg(A \mathbin{\&} B)$
$\rightarrow \neg A \mathbin{\&} \neg B \supset \neg(A \mathbin{\&} B)$	$\neg A \vee B \rightarrow A \supset B$	$\rightarrow A \vee B \supset \neg(\neg A \mathbin{\&} \neg B)$
$\rightarrow (A \supset B) \supset \neg(A \mathbin{\&} \neg B)$	$\rightarrow \neg(A \vee B) \sim \neg A \mathbin{\&} \neg B$	$\rightarrow \neg A \supset \neg(A \mathbin{\&} \neg B)$
$\rightarrow (A \supset B) \supset \neg A \vee B$	$\rightarrow A \mathbin{\&} B \sim \neg(\neg A \vee \neg B)$	$\rightarrow \neg(A \mathbin{\&} B) \sim \neg A \vee \neg B$
$\neg A \rightarrow (A \supset B) \sim \neg A$	$A \rightarrow (A \supset B) \sim B$	$B \rightarrow (A \supset B) \sim B$
$\neg B \rightarrow \neg A \supset (A \supset B)$	$B \rightarrow A \mathbin{\&} B \sim A$	$B \rightarrow A \vee B \sim B$
$\neg B \rightarrow A \mathbin{\&} B \sim B$	$\neg B \rightarrow A \vee B \sim A$	$A \mathbin{\&} (B \vee \neg B) \longleftrightarrow A$
$A \rightarrow A \vee (B \mathbin{\&} \neg B)$	$A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} \neg B \rightarrow B \mathbin{\&} \neg B$	$\neg A \mathbin{\&} \neg B \rightarrow \neg(A \vee B)$
$\rightarrow A \vee (B \mathbin{\&} \neg B) \sim A$	$\rightarrow B \mathbin{\&} \neg B \supset A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} \neg B$	$\rightarrow A \mathbin{\&} B \mathbin{\&} \neg B \sim B \mathbin{\&} \neg B$
$A \vee B \vee \neg B \longleftrightarrow B \vee \neg B$	$\rightarrow ((A \supset B) \supset A) \supset A$	$A \sim B \rightarrow C_A \sim C_B$.

(*Dans le dernier schéma,* A, B, C_A, C_B *sont des formules comme dans le théorème* 2*, corollaire* 2*, mais ici* C_A *peut être construite avec* $\supset$, &, $\vee$ *et* $\neg$.)

https://doi.org/10.1017/S0027763000013532 Published online by Cambridge University Press

THÉORÈME 5. *Dans* $\mathbf{J}_2$ *ne sont pas valables, entre autres, les schémas suivants*:

$A, \neg A \rightarrow B$	$A, \neg A \rightarrow \neg B$	$A \& \neg A \rightarrow B$
$A \& \neg A \rightarrow \neg B$	$A \supset B,\ A \supset \neg B \rightarrow \neg A$	$(A \supset B) \& (A \supset \neg B) \rightarrow \neg A$
$A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$	$A \supset B \rightarrow \neg (A \& \neg B)$	$\neg (A \vee B) \rightarrow \neg A \& \neg B$
$\neg A \rightarrow \neg (A \& \neg B)$	$\rightarrow \neg (A \& B \& \neg B)$	$\neg A, B \rightarrow \neg (A \& B)$
$A, \neg B \rightarrow \neg (A \& B)$	$\neg B, \neg A \rightarrow \neg (A \& B)$	$A, \neg B \rightarrow \neg (A \supset B)$
$A \& (A \supset B) \rightarrow B$.		

Démonstration. Par la matrice $M_2 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, où les fonctions $\&$, $\vee$, $\wedge$ et $\rightarrow$ sont définies comme dans la matrice M_1, du théorème 3, et les autres comme suit:

$\supset$: $v(A \supset B) = 1$ dans tous les cas.

$\neg$: $v(\neg A) = 1$ si, et seulement si, $v(A) = 1$;

″ $= v(A) + 1$ si $v(A) = nd$;

″ $= v(A) - 1$ si $v(A) = d$ et différente de 1.

THÉORÈME 6. *Si* F *est une thése du calcul propositionnel classique, alors* $\rightarrow F$ *est une thése du calcul* $\mathbf{J}_3$.

Démonstration. Analogue à celle du théorème 10 de Kleene [11], p. 132, à cause des lemmes:

LEMME I. *Dans les conditions du lemme* 13 *de Kleene* [11], p. 132, *on démontre dans* $\mathbf{J}_3$ *que* $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \rightarrow E$ *ou que* $Q_1, Q_2, \cdots, Q_m \rightarrow \neg E$.

LEMME II. *Dans les conditions du lemme* 14 *de Kleene* [11], p. 133, *on démontre dans* $\mathbf{J}_3$ *que* $P_1 \vee \neg P_1, \cdots, P_m \vee \neg P_m \rightarrow E$.

THÉORÈME 7. *Dans* $\mathbf{J}_3$ *ne sont pas valables, entre autres, les schémas:*

$A \supset B \rightarrow \neg (A \& \neg B)$	$A \supset B \rightarrow \neg A \vee B$	$A \& (A \supset B) \rightarrow B$
$A \rightarrow \neg A \supset B$	$A, \neg A \rightarrow B$	$A, \neg A \rightarrow \neg B$
$A \supset B,\ A \supset \neg B \rightarrow \neg A$	$\neg A \rightarrow A \supset B$.	

Démonstration. Par la matrice $M_3 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, où les fonctions $\supset$, $\vee$, $\neg$, $\wedge$ et $\rightarrow$ sont définies comme dans la matrice M_2 et $\&$ comme il suit:

https://doi.org/10.1017/S0027763000013532 Published online by Cambridge University Press

&: $v(A \mathbin{\&} B) = v_{nd}(v(A),\ v(B))$ quand seulement une des valeurs est non désignée;

″ $= \text{Max.}\,(v(A),\ v(B))$ si les deux valeurs sont non désignées;

″ $= \text{Min.}\,(v(A),\ v(B))$ si les deux valeurs sont désignées.

THÉORÈME 8. *Dans* $\mathbf{J}_4$ *on démontre, entre autres, les schémas et les régles ci-dessous:*

$$\begin{array}{lll} A\to B,\ \to C\supset A\mid\!\to\ \to C\supset B & A\to B,\ \to A\&C\mid\!\to\ \to B\&C & B\to A,\ \to\neg A\mid\!\to\ \to\neg B \\ B\to A,\ \to A\supset C\mid\!\to\ \to B\supset C & A\to B,\ \to C\&A\mid\!\to\ \to C\&B & \to(A\&\neg B)\supset\neg(A\supset B) \\ A\to B,\ \to A\vee C\mid\!\to\ \to B\vee C & A\to B,\ \to C\vee A\mid\!\to\ \to C\vee B & \to\neg(A\&B\&\neg B). \end{array}$$

THÉORÈME 9. *Dans* $\mathbf{J}_4$, *si* A, B, C_A *et* C_B *sont des formules comme dans le théorème* 4, *on a:*

$$A\longleftrightarrow B,\ \to C_A\mid\!\to\ \to C_B.$$

Démonstration. Conséquence des régles du théorème 8.

THÉORÈME 10. *Dans* $\mathbf{J}_4$ *ne sont pas valables les schémas et les régles suivantes:*

$$\begin{array}{lll} A,\ \neg A\to B & A,\ \neg A\to\neg B & A\to B\mid\!\to\ \neg B\to\neg A \\ A\longleftrightarrow B\mid\!\to\ \neg A\longleftrightarrow\neg B & A\supset B,\ A\supset\neg B\to\neg A & A\supset B\to\neg A\vee B \\ A\supset B\to\neg(A\&\neg B) & \neg(A\vee B)\to\neg A\&\neg B & \neg A\to\neg(A\&\neg B) \\ \neg A\&B\to\neg(A\&B) & A,\ \neg B\to\neg(A\&B) & A,\ \neg B\to\neg(A\supset B) \\ \to\neg(A\vee\neg A\supset B\&\neg B) & \neg(A\supset B)\to\neg(\neg A\vee B). & \end{array}$$

Démonstration. Par la matrice $M_4 = \langle N, I, \&, \supset, \vee, \neg, \wedge, \to\rangle$, avec les mêmes conventions que pour la matrice M_2 et où les fonctions $\supset$, & $\vee$, $\wedge$ et $\to$ sont définies comme dans la matrice M_2 et $\neg$ comme dans la matrice M_1.

COROLLAIRE 1. *Les régles ci-dessous ne sont pas admissibles dans* $\mathbf{J}_4$:

$$\Gamma\wedge A\to B,\ \Gamma\to\neg B\mid\!\to\Gamma\to\neg A \qquad\qquad A\longleftrightarrow B\mid\!\to C_A\longleftrightarrow C_B.$$

THÉORÈME 11. *Le calcul* $\mathbf{J}_2$ *est strictement plus fort que* $\mathbf{J}_1$, *et* $\mathbf{J}_3$ *et* $\mathbf{J}_4$ *sont strictement plus forts que* $\mathbf{J}_2$.

THÉORÈME 12. *Le système* $\mathbf{J}_1$ *n'est pas* $\supset$*-finiment trivialisable, mais les calculs* $\mathbf{J}_n$, $2\leqslant n\leqslant 4$, *sont* $\supset$*-finiment trivialisables.*

Démonstration. Dans $\mathbf{J}_1$ les schémas du type $\to F \supset A$, où A est une formule quelconque et F une formule fixée, ne sont pas valables, ce qu'on peut voir en utilisant la matrice M_1. Dans les calculs $\mathbf{J}_n$, $2 \leqslant n \leqslant 4$, on a $\vdash \to A \,\&\, \neg A \supset B$.

Théorème 13. *Les systèmes* $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 4$, *ne sont pas* $\to$ *-finiment trivialisables.*

Démonstration. Dans les systèmes $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 4$, on démontre, par les matrices correspondantes M_n, que les schémas du type $F \to A$, où F est une formule fixée et A une formule quelconque, ne sont pas valables.

Théorème 14. *Dans les calculs* $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 3$, *on a* (*théorème de la* $\to$ *-déduction*):

$$Si\ \vec{\Gamma}, \to A \vdash \to \theta \to B \quad alors \quad \vec{\Gamma} \vdash \to A,\ \theta \to B,$$

où $\vec{\Gamma}$ *est une suite finie de* $\to$ *-formules.*

Démonstration. On fait par induction sur la longueur de la deduction subsidiaire.

Base de l'induction: $\theta \to B$ est un postulat ou une des $\to$-formules de $\vec{\Gamma}, \to A$. Dans le premier cas, on obtient $A, \theta \to B$ par $\to_2$; alors, le théorème résulte des propriétés générales de la notion de déduction. Dans le second cas, on obtient le théorème par $\to_1$ et $\to_2$.

Hypothèse de l'induction: Si le théorème est valable pour toute déduction subsidiaire de longueur n, $1 \leqslant n \leqslant k$, il est valable aussi pour une déduction quelconque de longueur $k+1$. Nous avons huit cas à considérer selon $\theta \to B$ est un axiome, une des $\to$-formules de $\vec{\Gamma}, \to A$ ou une conséquence de $\to$-formules précédentes au moyen d'une des régles de déduction postulées dans les systèmes considérés. Dans les deux premiers cas on procède comme dans la base de l'induction; pour les autres, comme dans l'example qui suit. Considérons le postulat $\vee_4$: dans ce cas $\theta \to B$ est de la forme $\Sigma, A_1 \vee B_1 \to C$, mais par l'hypothèse de l'induction $\vec{\Gamma} \vdash \to A, \Sigma, A_1 \to C$ et $\vec{\Gamma} \vdash \to A, \Sigma, B_1 \to C$; d'où, par le postulat considéré on obtient: $\vec{\Gamma} \vdash \to A, \Sigma, A_1 \vee B_1 \to C$, qui est justement $\vec{\Gamma} \vdash \to A, \theta \to B$.

Corollaire 1. *Dans* $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 3$, *les régles "Si* $\Gamma \to A$ *et* $\Gamma \to A \supset B$, *alors* $\Gamma \to B$*" et "Si* $\to A$ *et* $\to A \supset B$, *alors* $\to B$*" sont équivalentes.*

https://doi.org/10.1017/S0027763000013532 Published online by Cambridge University Press

Démonstration. Il est évident que la première entraîne la seconde. D'autre côté, si la seconde est valable, on a:

1)	$\rightarrow A \& (A \supset B) \mid\!\rightarrow\, \rightarrow A$	par $\&_2$ et $\rightarrow_5$,
2)	$\rightarrow A \& (A \supset B) \mid\!\rightarrow\, \rightarrow A \supset B$	par $\&_3$ et $\rightarrow_5$,
3)	$\rightarrow A \& (A \supset B) \mid\!\rightarrow\, \rightarrow B$	de 1) et 2) par la seconde régle,
4)	$\mid\!\rightarrow A \& (A \supset B) \rightarrow B$	de 3) par le théorème 14,
5)	$\Gamma \rightarrow A \& (A \supset B) \mid\!\rightarrow \Gamma \rightarrow B$	de 4) par $\rightarrow_5$,
6)	$\Gamma \rightarrow A;\ \Gamma \rightarrow A \supset B$	hypothèses,
7)	$\Gamma \rightarrow A \& (A \supset B)$	de 6) par le théorème 2,
8)	$\Gamma \rightarrow B$	conséquence de 7) et 5).

THÉORÈME 15. *Dans le calcul* $\mathbf{J}_4$ *le théorème de la* $\rightarrow$*-déduction n'est pas valable.*

Démonstration. Au moyen du postulat $\neg_6$ on démontre dans $\mathbf{J}_4$ que $A \rightarrow B,\ \rightarrow \neg B \mid\!\rightarrow\, \rightarrow \neg A$; donc, si le théorème de la $\rightarrow$-déduction était valable, on obtiendrait $A \rightarrow B \mid\!\rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$. Mais, dans $\mathbf{J}_4$ on a $\mid\!\rightarrow \neg A \vee B \rightarrow A \supset B$; alors, par le résulat antérieur, $\mid\!\rightarrow \neg(A \supset B) \rightarrow \neg(\neg A \vee B)$, ce qui n'est pas vrai dans $\mathbf{J}_4$.

THÉORÈME 16. *La régle de modus ponens dans la forme "Si* $\rightarrow A$ *et* $\rightarrow A \supset B$, *alors* $\rightarrow B$*" n'est pas admissible dans* $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 4$.

Démonstration. Dans $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 3$, elle n'est pas admissible parce qu'elle entraîne la validité du schéma $A \& (A \supset B) \rightarrow B$ qui n'est pas valable dans les calculs considérés. Pour $\mathbf{J}_4$ on a la démonstration suivante: dans $\mathbf{J}_4$ on a $\mid\!\rightarrow\, \rightarrow (A \& \neg B) \supset \neg(A \supset B)$; si on fait A égal à $A \vee \neg A$ et B egal à $B \& \neg B$, on obtient $\mid\!\rightarrow\, \rightarrow ((A \vee \neg A) \& \neg(B \& \neg B) \supset \neg((A \vee \neg A) \supset (B \& \neg B))$; d'autre côté, mous avons $\mid\!\rightarrow\, \rightarrow (A \vee \neg A) \& \neg(B \& \neg B)$; alors, par la régle de modus ponens, $\mid\!\rightarrow\, \rightarrow \neg(A \vee \neg A \supset B \& \neg B)$, schéma qui n'est pas valable dans $\mathbf{J}_4$.

COROLLAIRE 1. *La régle de modus ponens dans la forme "Si* $\Gamma \rightarrow A$ *et* $\Gamma \rightarrow A \supset B$, *alors* $\Gamma \rightarrow B$*" n'est pas admissible dans* $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 4$.

THÉORÈME 17. *Dans* $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 3$, *on a la régle: "Si* $\vec{\Gamma}, \rightarrow A \mid\!\rightarrow \theta \rightarrow C$ *et* $\vec{\Gamma}, \rightarrow B \mid\!\rightarrow \theta \rightarrow C$, *alors* $\vec{\Gamma}, \rightarrow A \vee B \mid\!\rightarrow \theta \rightarrow C$*".*

https://doi.org/10.1017/S0027763000013532 Published online by Cambridge University Press

Nous pouvons introduire encore un nouveau calcul, $\mathbf{J}_5$, dont les postulats sont ceux de $\mathbf{J}_2$ et le suivant:

$$\rightarrow_7)\quad \frac{\Gamma, A \rightarrow B \qquad \Gamma \rightarrow \neg B}{\Gamma \rightarrow \neg A}$$

THÉORÈME 18. *Dans* $\mathbf{J}_5$ *on démontre les schémas et les régles suivantes*:

Si $A \rightarrow B$, *alors* $\neg B \rightarrow \neg A$;

Si $\Gamma, A \rightarrow B$ *et* $\Gamma, A \rightarrow \neg B$, *alors* $\Gamma \rightarrow \neg A$;

$A \& \neg A \rightarrow B$	$A \& \neg A \rightarrow \neg B$	$A, \neg A \rightarrow B$
$A, \neg A \rightarrow \neg B$	$\neg A \& B \rightarrow \neg (A \& B)$	$A \& \neg B \rightarrow \neg (A \& B)$
$\neg A \& \neg B \rightarrow \neg (A \& B)$	$\neg A \& \neg B \rightarrow \neg (A \vee B)$	$A \vee B \leftrightarrow \neg (\neg A \& \neg B)$
$A \& B \leftrightarrow \neg (\neg A \vee \neg B)$	$\neg A \vee \neg B \leftrightarrow \neg (A \& B)$	$\neg A \& \neg B \leftrightarrow \neg (A \vee B)$.

THÉORÈME 19. *Dans* $\mathbf{J}_5$ *ne sont pas valables les schémas*:

$A \& (A \supset B) \rightarrow B$	$A, \neg B \rightarrow \neg (A \supset B)$
$\rightarrow \neg (A \vee \neg A \supset B \& \neg B)$	$A \supset B, A \supset \neg B \rightarrow \neg A$.

Démonstration. Par la matrice $M_5 = \langle N, I, \supset, \&, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, où les fonctions $\supset, \&, \vee, \neg, \wedge$ sont définies comme dans la matrice M_4 et $\rightarrow$ comme il suit:

$\rightarrow$: $v(\Gamma \rightarrow A) = 2$ si, et seulement si, $v(\Gamma) = d$ et $v(A) = nd$;

$\qquad$ " $= 1$ dans tous les autres cas.

THÉORÈME 20. *La régle "Si* $\rightarrow A$ *et* $\rightarrow A \supset B$, *alors* $\rightarrow B$*" n'est pas admissible dans* $\mathbf{J}_5$ *et, en conséquence, n'est pas admissible la régle "Si* $\Gamma \rightarrow A$ *et* $\Gamma \rightarrow A \supset B$, *alors* $\Gamma \rightarrow B$*".*

Démonstration. Les régles considérées entraînent la validité des schémas $\rightarrow \neg (A \vee \neg A \supset B \& \neg B)$ et $A \& (A \supset B) \rightarrow B$, respectivement.

THÉORÈME 21. *Le calcul* $\mathbf{J}_5$ *est plus fort que* $\mathbf{J}_3$ *et* $\mathbf{J}_4$, *et* $\mathbf{J}_3$ *est plus fort que* $\mathbf{J}_5$.

2. Les calculs de prédicats $\mathbf{J}_n^*$.

Pour obtenir les calculs de prédicats $\mathbf{J}_n^*$ on considère lespostulats de $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 5$, et encore ceux qui suivent, où les restrictions pour $\exists_1$ et $\forall_1$ sont celles de Kleene [11], p. 81, et pour $\exists_2$, $\exists_3$, $\forall_2$ et $\forall_3$ celles du même livre, p. 442:

https://doi.org/10.1017/S0027763000013532 Published online by Cambridge University Press

$\exists_1)$ $A(t) \to \exists\, x A(x)$ $\qquad$ $\exists_2)$ $\dfrac{\Gamma \to A(b) \supset C}{\Gamma \to \exists x A(x) \supset C}$ $\qquad$ $\exists_3)$ $\dfrac{\Gamma,\ A(b) \to C}{\Gamma,\ \exists x A(x) \to C}$

$\forall_1)$ $\forall x A(x) \to A(t)$ $\qquad$ $\forall_2)$ $\dfrac{\Gamma \to C \supset A(b)}{\Gamma \to C \supset \forall x A(x)}$ $\qquad$ $\forall_3)$ $\dfrac{\Gamma \to A(b)}{\Gamma \to \forall x A(x)}$

$\to_8)$ Si A et B sont des formules congrues, ou si l'une est obtenue de l'autre par la suppression des quantificateurs vides, alors $A \to B$ et $B \to A$ sont des postulats.

Pour le calcul $\mathbf{J}_5^*$ le postulat $\to_8$ n'est pas necessaire parce qu'il est démontrable. Avec des restrictions évidentes, le théorème de la $\to$-déduction et les plusieurs formes du théorème du remplacement sont valables pour les calculs $\mathbf{J}_n^*$; aussi le théorème des k-transformées (voir [4] et [5]) peut être étendu aux systèmes $\mathbf{J}_n^*$, $1 \leqslant n \leqslant 5$.

THÉORÈME 22. *Si* $\mid\!\to \Gamma \to F$ *dans les calculs* $\mathbf{J}_n^*$, $1 \leqslant n \leqslant 5$, *alors les k-transformées de* $\Gamma \to F$ *sont démontrables dans les calculs propositionnels correspondants.*

Démonstration. Voir [4] et [5].

COROLLAIRE 1. *Soit* $\Gamma \to A$ *un schéma du calcul* $\mathbf{J}_n$, $1 \leqslant n \leqslant 5$. *Si ce schéma n'est pas valable dans* $\mathbf{J}_n$, *il n'est pas valable non plus en* $\mathbf{J}_n^*$, $1 \leqslant n \leqslant 5$.

THÉORÈME 23. *Dans* $\mathbf{J}_n^*$, $1 \leqslant n \leqslant 5$, *sont démontrables, entre autres, les schémas et les régles suivantes (sous des restrictions évidentes):*

$\forall x A \longleftrightarrow A$ $\qquad$ $\exists x A \longleftrightarrow A$ $\qquad$ $\forall x A(x) \to \exists x A(x)$

$\dfrac{\to A(x) \supset B(x)}{\to \forall x A(x) \supset \forall x B(x)}$ $\qquad$ $\dfrac{\to A(x) \sim B(x)}{\to \forall x A(x) \sim \forall x B(x)}$

$\dfrac{\to A(x) \supset B(x)}{\to \exists x A(x) \supset \exists x B(x)}$ $\qquad$ $\dfrac{\to A(x) \sim B(x)}{\to \exists x A(x) \sim \exists x B(x)}$

$\forall x \forall y A(x, y) \longleftrightarrow \forall y \forall x A(x, y)$ $\qquad$ $\exists x \exists y A(x, y) \longleftrightarrow \exists y \exists x A(x, y)$

$\forall x \forall y A(x, y) \to \forall x A(x, x)$ $\qquad$ $\exists x A(x, x) \to \exists x \exists y A(x, y)$

$\forall x A(x) \& \forall x B(x) \longleftrightarrow \forall x(A(x) \& B(x))$ $\qquad$ $A \& \forall x B(x) \longleftrightarrow \forall x(A \& B(x))$

$\exists x A(x) \vee \exists x B(x) \longleftrightarrow \exists x(A(x) \vee B(x))$ $\qquad$ $A \vee \exists x B(x) \longleftrightarrow \exists x(A \vee B(x))$

$A \,\&\, \exists x B(x) \longleftrightarrow \exists x(A \,\&\, B(x))$ $\qquad$ $A \vee \forall x B(x) \to \forall x(A \vee B(x))$

$\exists x(A(x) \,\&\, B(x)) \to \exists x A(x) \,\&\, \exists x B(x)$ $\qquad$ $\exists x(A \supset B(x)) \to A \supset \exists x B(x)$

$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \to \forall x(A(x) \vee B(x))$ $\qquad$ $\exists x(A(x) \supset B) \to \forall x A(x) \supset B$

$\exists x(A(x) \supset B(x)) \to \forall x A(x) \supset \exists x B(x)$

https://doi.org/10.1017/S0027763000013532 Published online by Cambridge University Press

Si $\vdash\!\rightarrow\rightarrow A\sim B$, *alors* $\vdash\!\rightarrow\rightarrow C_A\sim C_B$.

THÉORÈME 24. Dans $\mathbf{J}_n^*$, $2\leqslant n\leqslant 5$, on démontre les schémas suivants, que ne sont pas valables dans $\mathbf{J}_1$.

$$\rightarrow \forall x A(x)\sim \neg\exists x\neg A(x) \qquad \rightarrow \forall x(A\vee B(x))\supset A\vee\forall x B(x)$$

$$\rightarrow \exists x A(x)\sim \neg\forall x\neg A(x) \qquad \forall x(A(x)\supset B)\longleftrightarrow \exists x A(x)\supset B$$

$$\rightarrow \neg\forall x A(x)\sim \exists x\neg A(x) \qquad \forall x(A\supset B(x))\longleftrightarrow A\supset\forall x B(x)$$

$$\rightarrow \neg\exists x A(x)\sim \forall x\neg A(x).$$

THÉORÈME 25. *Dans* $\mathbf{J}_5^*$ *on peut démontrer que:*

$$\forall x A(x)\longleftrightarrow \neg\exists x\neg A(x) \qquad et \qquad \exists x A(x)\longleftrightarrow \neg\forall x\neg A(x).$$

THÉORÈME 26. *Les calculs* $\mathbf{J}_n^*$, $1\leqslant n\leqslant 4$, *ne sont pas* $\rightarrow$ *-finiment trivialisables.*

Démonstration. Conséquence du théorème 22 et des théorèmes correspondants des calculs propositionnels.

Si l'on ajout à $\mathbf{J}_2^*(\mathbf{J}_3^*$, $\mathbf{J}_4^*$ ou $\mathbf{J}_5^*)$ le postulat A, $A\supset B\rightarrow B$, ou à $\mathbf{J}_1^*$ les postulats A, $A\supset B\rightarrow B$ et $\rightarrow(A\supset B)\supset((A\supset\neg B)\supset\neg A)$, on obtient un calcul que l'on denotera par $\mathscr{C}$.

THÉORÈME 27. *Si* $\Gamma\vdash\!\rightarrow F$ (*avec lec restrictions usuelles pour les variables libres des formules* Γ) *dans le calcul de prédicats classique, alors* $\vdash\!\rightarrow\Gamma\rightarrow F$ *dans* $\mathscr{C}$, *et reciproquement.*

THÉORÈME 28. *Le calcul* $\mathscr{C}$ *est strictement plus fort que* $\mathbf{J}_5^*$.

COROLLAIRE 1. *Si dans le calcul propositionnel classique on substitute la régle de modus ponens par les trois régles ci-dessous on obtient un calcul strictement plus faible que le calcul propositionnel classique:*

$$\frac{A\supset B \qquad A\supset(B\supset C)}{A\supset C} \qquad\qquad \frac{A\supset(B\supset C)}{(A\supset B)\supset(B\supset C)} \qquad\qquad \frac{A}{B\supset A}$$

Remarque. Nous pouvons ajouter aux calculs $\mathbf{J}_n^*$, $1\leqslant n\leqslant 5$, la rélation d'égalité, avec des postulats convenables.

3. Les systèmes $\mathbf{J}_n^*$ et le postulat de la séparation.

L'étude développée des théories des ensembles ZF_n, construites sur $\mathbf{J}_n^*$, $1\leqslant n\leqslant 5$, avec le postulat de la séparation sans les restrictions ad hoc pour éviter les paradoxes, ne sera pas faite ici. Mais on montrera, au moyen des raisonnements finitistes, qu'on peut construire ces théories et qu'elles ne sont pas triviales.

Les théories des ensembles ZF_n ont respectivement les calculs $\mathbf{J}_n^*, 1 \leqslant n \leqslant 5$, pour logique sous-jacente et leurs postulats spécifiques sont les suivants:

(I) Si F est un postulat du système ZF de Zermelo-Fraenkel (voir [10], pp. 274–275), exception faite du postulat de la séparation, alors $\rightarrow F$ est un postulat de ZF_n, $1 \leqslant n \leqslant 5$.

(II) Postulat de la séparation:

$$\rightarrow \exists y \forall x (x \in y \sim F(x)),$$

où $F(x)$ est une formule quelconque de ZF et la variable y ne figure pas libre dans $F(x)$ (x et y sont des variables différentes).

Théorème 29. *Les systèmes ZF_n, $n = 1$, 2 et 4, ne sont pas $\rightarrow$ -finiment trivialisables, dans eux n'est pas admissible la régle de modus ponens, ils ne sont pas triviaux, mais ils sont inconsistants dans un sens généralisé. Le système ZF_3 a les trois dernières propriétés.*

Démonstration. Soient les matrices $M_n' = \langle N, I, \&, \supset, \vee, \neg, \wedge, \rightarrow \rangle$, avec les mêmes conventions que pour les matrices M_n, $n = 1$, 2 et 4, mais en substituant la définition de la fonction $\supset$ par la suivante:

$\supset$: $v(A \supset B) = v(A) + v(B) + 1$ si $v(A)$ et $v(B)$ sont toutes les deux non désignées ou toutes les deux désignées;

" $= v(A) + v(B)$ dans tous les autres cas.

Au moyen du théorème 22 et de M_n', $n = 1$, 2 et 4, on démontre les trois prémières propriétés; la dernière est démontreé en observant que dans ZF_n, $n = 1, 2$ et 4, est valable la $\rightarrow$ -formule $\rightarrow x \in x \sim x \notin x$, par example. Pour le système ZF_3, la démonstration est faite de la même façon, avec la matrice M_3

Observation. Rest ouvert le problème de savoir si ZF_3 est ou non $\rightarrow$ -finiment trivialisable.

Théorème 30. *ZF_5 est $\rightarrow$ -finiment trivialisable, est inconsistant dans un sens généralisé, n'y est pas valable la régle de modus ponens et il n'est pas trivial.*

Bibliographie.

[1] A.I. Arruda, Sur certaines hiérarchies de calculs propositionnels, Comptes Rendus Académie de Sciences de Paris, série A, **265** (1967), pp. 651–644.

[2] A.I. Arruda, Sur certaines hiérarchies da calculs propositionnels, Comptes Rendus Académie de Sciences de Paris, série A, **266** (1968), pp. 37–39 et 897–900.

[3] A.I. Arruda, et N.C.A.da Costa, O paradoxo de Curry-Moh Shaw-Kwei, Boletim da Sociedade Matemática de São Paulo, vol. **18,** fasc. 1 et 2 (1968), pp. 83–89.

[4] A.I. Arruda et N.C.A.da Costa, Sur un théorème de Hilbert et Bernays, Comptes Rendus Académie de Sciences de Paris, **258** (1964), pp. 6311–6312.

[5] A.I. Arruda, et N.C.A.da Costa, Transformadas no cálculo restrito de predicados, Anais da Academia Brasileira de Ciências, vol. **38** (1966), pp. 385–390.

[6] A.I. Arruda, et N.C.A.da Costa, On the postulate of separation, Notices of the American Mathematical Society, vol. **15** (1968), pp. 399–400.

[7] A.I. Arruda, et N.C.A.da Costa, Further considerations on the postulate of separation, Notices of the American Mathematical Society, vol. **15** (1968), p. 555.

[8] N.C.A.da Costa, Sistemas formais inconsistentes, Thèse, Universidade Federal do Paraná (1963).

[9] N.C.A.da Costa, Calculs propositionnels pour les systèmes formels inconsistants, Comptes Rendus Académie de Sciences de Paris, **257** (1963), pp. 3790–3792.

[10] A.A. Fraenkel, et Y. Bar-Hillel, *Foundations of Set Theory*, North-Holland (1958), Amsterdan.

[11] S.C. Kleene, *Introduction to Metamathematics*, Van Nostrand (1952), New York.

Institut de Mathématiques
Université de Campinas
Campinas, São Paulo, Brésil.