

# SUR LA COHOMOLOGIE NON ABELIENNE, II

PAUL DEDECKER

Cet exposé\* fait suite à des travaux antérieurs et notamment à mon article (4). Il a fait l'objet d'une communication au Colloque de géométrie différentielle et de topologie algébrique de Zürich en juin 1960. Dans une première partie on aborde, par les méthodes cohomologiques, le problème de la restriction du groupe structural  $G$  d'un espace fibré à un sous-groupe  $N$ , ce qui, lorsque  $N$  n'est pas normal, conduit à une "cohomologie à coefficients dans un faisceau d'espaces homogènes." Dans le second on donne une interprétation cohomologique des espaces fibrés en théorie simpliciale, une fonction tordante étant interprétée comme un cocycle. On précisera ultérieurement le lien entre le point de vue introduit ici et celui développé par Nguyêndinhgoc (7).

## PREMIÈRE PARTIE

**1. Introduction.** Soit  $E = E(B, G)$  un espace fibré principal de base  $B$  et groupe structural  $G$ ,  $N$  un sous-groupe normal de  $G$ . Le problème de la restriction du groupe structural à  $N$  admet, comme on sait une solution fondée sur la cohomologie non abélienne; voir par exemple (2) et (5). Les classes d'espaces fibrés principaux de base  $B$  et groupe  $G$  correspondent aux éléments d'un ensemble  $H^1(B, \mathfrak{G})$  de 1-cohomologie de  $B$  à valeurs dans le faisceau  $\mathfrak{G}$  des jets locaux (germes) d'applications locales continues de  $B$  dans  $G$ ; il s'agit d'un faisceau de groupes en général non abéliens. Au sous-groupe normal  $N$  correspond un sous-faisceau  $\mathfrak{N}$ , un faisceau quotient  $\mathfrak{S}$  et des suites exactes

$$(1.1) \quad e \rightarrow \mathfrak{N} \xrightarrow{i} \mathfrak{G} \xrightarrow{j} \mathfrak{S} \rightarrow e$$

$$(1.2) \quad \dots \rightarrow H^1(B, \mathfrak{N}) \xrightarrow{i^1} H^1(B, \mathfrak{G}) \xrightarrow{j^1} H^1(B, \mathfrak{S}) \rightarrow \dots$$

L'espace fibré  $E$  s'identifie à un élément de  $H^1(B, \mathfrak{G})$  et il s'agit de savoir s'il appartient à l'image de l'application  $i^1$ : en vertu de l'exactitude de la suite (1.2), il en est ainsi si et seulement si  $j^1(E)$  est l'élément neutre de  $H^1(B, \mathfrak{S})$ . Comme on sait, cela revient à dire que l'espace fibré principal associé de fibre le groupe  $G/N$  est trivial.

Dans le cas général  $\mathfrak{N}$  n'est pas un sous-faisceau normal de  $\mathfrak{G}$ , ce qui signifie que l'inclusion  $i$  ne possède pas de conoyau dans la catégorie des groupes: tout au plus pourrait-on définir un faisceau  $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  d'espaces homogènes mais on ne pourrait plus définir un ensemble  $H^1(B, \mathfrak{S})$ . On se propose d'énoncer cependant un analogue du résultat précédent.

Received October 18, 1961.

\*Séminaire Ch. Ehresmann, Institut H. Poincaré, Paris, mai 1960.

**2. La construction fondamentale.** On va “plonger” l’inclusion  $i: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{G}$  dans un homomorphisme de faisceau de groupoïdes  $i^*: \mathfrak{N}^* \rightarrow \mathfrak{G}^*$  qui possède lui un conoyau. Interprété au niveau des groupes l’opération qu’on va réaliser est la suivante. On se donne un groupe  $G$  plus un sous-groupe  $N$  et on construit un groupoïde  $G^*$  muni d’un sous-groupoïde normal  $N^*$  avec en outre (a) des inclusions  $\alpha: N \rightarrow N^*, \beta: G \rightarrow G^*$  qui soient des semi-homomorphismes dans le sens suivant: si pour  $g, g' \in G$   $\beta(g) \cdot \beta(g')$  est défini on a  $\beta(gg') = \beta(g) \cdot \beta(g')$ ; (b) un homomorphisme surjectif  $\mu: G^* \rightarrow G$  tel que  $\mu \circ \beta$  soit l’identité. Pour la notion de sous-groupoïde normal voir (3).

Désignons par  $N'$  un conjugué quelconque de  $N$  (c’est-à-dire  $N' = \gamma N \gamma^{-1}, \gamma \in G$ ) et considérons l’ensemble  $G^*$  des couples  $(g, N')$ . Deux d’entre eux  $(g', N''), (g, N')$  sont dits composables si  $N'' = gN'g^{-1} = g\gamma N \gamma^{-1}g^{-1}$ ; on pose alors

$$(g', N'') \cdot (g, N') = (g'g, N').$$

Ceci fait de  $G^*$  un groupoïde dont les unités sont les couples  $(e, N')$ ; elles correspondent biunivoquement aux sous-groupes  $N'$  de  $G$ ; l’inverse de  $(g, N')$  est  $(g^{-1}, N'')$  où  $N'' = gN'g^{-1}$ . Lorsque  $N$  est normal dans  $G$ , on a  $G^* \approx G$ . On désignera par  $N^*$  le sous-ensemble des couples  $(n', N')$  où  $n' \in N'$ : ceci est un sous-groupoïde qui s’identifie au groupoïde somme ensembliste des groupes  $N'$ . Un composé  $(g, N')(n', N')(g^{-1}, N'')$  est toujours défini et égal à  $(gn'g^{-1}, N'')$ : il appartient à  $N^*$ , ce qui signifie que ce sous-groupoïde est normal dans  $G^*$ . Le quotient  $H^* = G^*/N^*$  s’identifie à l’ensemble des couples  $(h, N')$  où  $h$  est un élément de l’espace homogène  $H' = G/N'$ , image canonique d’un élément  $g \in G$ . Si de même  $g' \in G$  donne  $h'$  dans  $H'' = G/N''$  la loi de composition dans  $H^*$  est la suivante:  $(h', N'') \cdot (h, N')$  est défini si  $N'' = g'N'g'^{-1}$ , le composé étant alors  $(h'', N')$  où  $h''$  est induit par  $g'g$  dans  $G/N'$ . Si l’on désigne par  $\epsilon$  le groupoïde formé des unités de  $G^*$  et par  $e$  un groupe formé d’un seul élément, on a la suite exacte de groupoïdes

$$\epsilon \rightarrow N^* \xrightarrow{i^*} G^* \xrightarrow{j^*} H^* \rightarrow e.$$

Les inclusions  $\alpha, \beta$  dont question ci-dessus sont définies par  $\alpha(n) = (n, N) \in N^*, \beta(g) = (g, N) \in G^*$ ; elles vérifient bien la propriété de semi-homomorphie annoncée. Si  $H$  désigne l’espace homogène  $G/N$  on peut aussi définir une inclusion  $\gamma: H \rightarrow H^*$  par  $\gamma(h) = (h, N), h \in H$ . L’homomorphisme  $\mu: G^* \rightarrow G$  est défini par  $\mu(g, N') = g$ .

Au niveau des faisceaux de groupes, on doit considérer, sur un espace  $B$ , un faisceau de groupes  $\mathfrak{G}$  et un sous-faisceau  $\mathfrak{N}$ . Pour chaque  $x \in B$  on a donc un groupe  $\mathfrak{G}_x$ , un sous-groupe  $\mathfrak{N}_x$  et la famille des conjugués  $\mathfrak{N}'_x$  de  $\mathfrak{N}_x$  par les automorphismes intérieurs de  $\mathfrak{G}_x$ . On peut définir la notion de continuité pour une fonction définie dans un ouvert  $U$  et dont la valeur  $f(x)$  en tout  $x \in U$  est un  $\mathfrak{N}'_x$ : dans un voisinage  $U_x \subset U$  de chaque point  $x$  doit être définie une section continue  $g: U_x \rightarrow \mathfrak{G}$  telle que pour  $y \in U_x, f(y) = g_y \mathfrak{N}'_y g_y^{-1}$ . Toutefois deux telles fonctions qui ont même valeur en  $x$  ne coïncident pas

en général dans un voisinage de  $x$ ; on peut encore dire que deux conjugués distincts  $\mathfrak{N}'_y, \mathfrak{N}''_y$  peuvent tendre continûment vers un même  $\mathfrak{N}'_x$  lorsque  $y$  tend vers  $x$ . Ceci nécessite la considération, pour tout  $x$ , de l'ensemble de tous les jets locaux  $f_x = j_x^\lambda f$  de ces fonctions  $f$ . Chacun de ces jets sera identifié à un groupe  $\mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}_{f_x}$  isomorphe à  $\mathfrak{N}'_x = f(x)$  et de telle manière que deux de ces groupes qui correspondent à des jets distincts aient une intersection vide. L'isomorphisme de  $\mathfrak{N}'_x$  sur  $\mathfrak{N}_x$  sera noté

$$\theta_x : \mathfrak{N}'_x \rightarrow \mathfrak{N}_x.$$

Chaque groupe  $\mathfrak{N}_x$  sera appelé un *germe de conjugué* de  $\mathfrak{N}_x$  en  $x$  et l'ensemble de ces germes-groupes sera noté  $\mathfrak{G}_x$ . On observe que pour  $x \neq y$  les ensembles  $\mathfrak{G}_x$  et  $\mathfrak{G}_y$  sont disjoints; on désigne par  $\mathfrak{G}$  la réunion des  $\mathfrak{G}_x$  lorsque  $x$  parcourt  $B$ , réunion qui se munit d'une structure de faisceau d'ensembles sur  $B$  dont les sections continues sont de la forme  $x \rightarrow j_x^\lambda f$ . Le faisceau de groupes  $\mathfrak{G}$  opère à gauche sur  $\mathfrak{G}$  de la manière suivante: si  $f$  est, au voisinage de  $x$  de la forme  $y \rightarrow g_y \mathfrak{N}_y g_y^{-1} = f(y)$ , et si  $\gamma_x \in \mathfrak{G}_x$  est la valeur en  $x$  d'une section continue  $\gamma$  de  $\mathfrak{G}$  définie au voisinage de ce point, on pose  $\gamma_x \cdot j_x^\lambda f = j_x^\lambda g$  où  $g$  est une fonction analogue à  $f$  de la forme  $y \rightarrow \gamma_y g_y \mathfrak{N}_y g_y^{-1} \gamma_y^{-1}$ . Si  $j_x^\lambda f = \mathfrak{N}_x, j_x^\lambda g = \mathfrak{N}'_x$ , on a donc  $\mathfrak{N}'_x = \gamma_x \cdot \mathfrak{N}_x$ . Notons encore que si  $n'_x \in \mathfrak{N}'_x$  et  $\theta_x(n'_x) \in \mathfrak{N}_x$ , on a  $n'_x \cdot \mathfrak{N}_x = \mathfrak{N}'_x$ .

Pour tout  $x$  on définit alors un groupoïde  $\mathfrak{G}_x^*$  formé des couples  $(g_x, \mathfrak{N}_x) \in \mathfrak{G}_x \times \mathfrak{G}_x$ , un composé  $(g_{2x}, \mathfrak{N}_{2x})(g_{1x}, \mathfrak{N}_{1x})$  étant défini si et seulement si  $\mathfrak{N}_{2x} = g_{1x} \cdot \mathfrak{N}_{1x}$ , la valeur étant alors  $(g_{2x} \cdot g_{1x}, \mathfrak{N}_{1x})$ . La réunion  $\mathfrak{G}^*$  des  $\mathfrak{G}_x^*$  est un faisceau de groupoïdes sur  $B$ . Les couples  $(n'_x, \mathfrak{N}_x)$ , où  $\theta_x(n'_x) \in \mathfrak{N}_x$ , engendrent un sous-groupoïde,  $\mathfrak{N}_x^*$  de  $\mathfrak{G}_x^*$  et un sous-faisceau  $\mathfrak{N}^*$  de  $\mathfrak{G}^*$ . Pour vérifier ce dernier point, c'est-à-dire que  $\mathfrak{N}^*$  est ouvert dans  $\mathfrak{G}^*$ , on notera ce qui suit. Si  $\mathfrak{N}_x = j_x^\lambda f$  et si  $n'_x \in \mathfrak{N}'_x = f(x)$  il existe  $n_x \in \mathfrak{N}_x$  et une section  $g$  de  $\mathfrak{G}$  définie au voisinage de  $x$  qui engendre  $f$  et telle que  $n'_x = g_x n_x g_x^{-1}$ . Il existe alors une section  $n$  de  $\mathfrak{N}$  définie au voisinage de  $x$  et de valeur  $n_x$  en  $x$ . Ces données permettent de définir une section de  $\mathfrak{G}^*$  à valeurs dans  $\mathfrak{N}^*$  au voisinage de  $x$  et de valeur  $(n'_x, \mathfrak{N}_x)$  en  $x$ , ce qui établit la propriété. On notera en outre que chaque  $\mathfrak{N}_x^*$  est un sous-groupoïde normal de  $\mathfrak{G}_x^*$  et on peut donc prendre le quotient  $\mathfrak{S}_x^* = \mathfrak{G}_x^* / \mathfrak{N}_x^*$ . On a donc des suites exactes

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_x &\rightarrow \mathfrak{N}_x^* \xrightarrow{i_x^*} \mathfrak{G}_x^* \xrightarrow{j_x^*} \mathfrak{S}_x^* \rightarrow e_x \\ \mathfrak{G} &\rightarrow \mathfrak{N}^* \xrightarrow{i^*} \mathfrak{G}^* \xrightarrow{j^*} \mathfrak{S}^* \rightarrow e \end{aligned}$$

où  $e$  est un faisceau sur  $B$  ne comportant qu'un seul élément  $e_x$  au-dessus de  $x$ , élément que l'on pourrait d'ailleurs identifier à  $x$ , le faisceau s'identifiant alors à  $B$  en tant qu'espace topologique. On identifiera, au moyen du dernier diagramme, le faisceau  $\mathfrak{G}$  aux sous-faisceaux des unités dans  $\mathfrak{N}^*, \mathfrak{G}^*, \mathfrak{S}^*$  (observer que  $i_x^*$  et  $j_x^*$  se réduisent à des bijections sur les unités). Le faisceau  $\mathfrak{G}$  admet une section globale  $B \rightarrow \mathfrak{G}$  qui associe à tout point  $x \in B$  le jet de la fonction  $f$  de valeur  $f(y) = \mathfrak{N}_y$  pour tout  $y \in B$ . Cette section  $\pi$  est dite *principale* de

même que l'unité  $\pi_x \in \mathfrak{E}_x$  qu'elle définit pour tout  $x \in B$ . On a également des inclusions

$$\alpha: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}^*, \beta: \mathfrak{G} \rightarrow \mathfrak{G}^*, \gamma: \mathfrak{S} \rightarrow \mathfrak{S}^*$$

[où  $\mathfrak{S} = \mathfrak{G}/\mathfrak{N}$  est un faisceau d'espaces homogènes] et un homomorphisme surjectif

$$(2.1) \quad \mu: \mathfrak{G}^* \rightarrow \mathfrak{G},$$

tel que  $\mu \circ \beta$  soit l'identité.

**3. Relations entre  $H^1(B, \mathfrak{G})$  et  $H^1(B, \mathfrak{G}^*)$ .** Pour ce qui concerne les définitions et les notations de la cohomologie non abélienne, nous renvoyons à (2; 5) lorsque les coefficients sont des groupes ou des faisceaux de groupes et à (6) lorsqu'il s'agit de groupoïdes ou de faisceaux de groupoïdes.

Soit  $\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I}$  un recouvrement ouvert de  $B$  et considérons une 1-cochaîne  $g^* = (g_{ij}^*)$  de  $\mathfrak{U}$  à valeurs dans  $\mathfrak{G}^*$ ; on notera  $g_{ij}$  et  $\sigma_{ij}$  les composantes de  $g_{ij}^*$  suivant  $\mathfrak{G}$  et  $\mathfrak{E}$ . Si  $g^*$  est un cocycle, le produit  $g_{ij}^*(x) \cdot g_{jk}^*(x)$  est défini pour tout  $x \in U_{ijk}$  et on a

$$g_{ik}^*(x) = g_{ij}^*(x) \cdot g_{jk}^*(x), \quad x \in U_{ijk}.$$

Ceci implique (a) que les  $g_{ij}$  définissent un cocycle  $\mu(g^*) = g$  à valeurs dans  $\mathfrak{G}$ ; (b) que les  $\sigma_{ii} = \sigma_i: U_i \rightarrow \mathfrak{E}$  sont des sections de  $\mathfrak{E}$  telles que, pour  $x \in U_{ij}$ ,  $\sigma_j(x)$  et  $\sigma_i(x)$  soient les unités à droite et à gauche de  $g_{ij}^*(x)$ , ce qui nous permet d'écrire symboliquement

$$(3.1) \quad g_{ij}^* : \sigma_j \rightarrow \sigma_i.$$

On notera en outre que  $\sigma_{ij}(x) = \sigma_j(x)$  pour tout  $x \in U_{ij}$  et que  $g^*$  est donc caractérisé par  $(g_{ij}, \sigma_j)$ .

La propriété (a) signifie que l'homomorphisme (2.1) induit une application

$$\mu^*: H^1(B, \mathfrak{G}^*) \rightarrow H^1(B, \mathfrak{G});$$

mais celle-ci n'est pas en général surjective. En effet un 1-cocycle  $g = (g_{ij})$  de  $\mathfrak{U}$  à valeurs dans  $\mathfrak{G}$  n'est l'image d'un cocycle  $g^* = (g_{ij}^*)$  à valeurs dans  $\mathfrak{G}^*$  que s'il existe une famille de sections  $\sigma_i: U_i \rightarrow \mathfrak{E}$  (constituant une 0-cochaîne de  $\mathfrak{U}$  à valeurs dans le faisceau des unités) compatible avec  $g$ , c'est-à-dire telles que, pour  $x \in U_{ij}$ , on ait

$$(3.2) \quad \sigma_i(x) = g_{ij}(x) \cdot \sigma_j(x)$$

( au sens des opérations de  $\mathfrak{G}$  sur  $\mathfrak{E}$ ), ce qui entraîne (3.1) en faisant  $g_{ij}^* = (g_{ij}, \sigma_j)$ . [Voir note p. 92.]

Supposons que  $g = (g_{ij})$  soit un cocycle cohomologue, dans  $\mathfrak{G}$ , à un cocycle  $n = (n_{ij})$  à valeurs dans  $\mathfrak{N}$ . Il existe donc une 0-cochaîne  $h = (h_i: U_i \rightarrow \mathfrak{G})$  de  $\mathfrak{U}$  à valeurs dans  $\mathfrak{G}$  telle que, pour tout  $x \in U_{ij}$ ,

$$(3.3) \quad g_{ij}(x) = h_i(x) \cdot n_{ij}(x) \cdot h_j^{-1}(x).$$

Or les  $h_i$  induisent des sections  $\sigma_i: U_i \rightarrow \mathfrak{E}$  provenant des fonctions  $\eta_i: x \rightarrow h_{ix}h\mathfrak{N}_{ix}^{-1}$  en posant  $\sigma_i(x) = j_x \wedge \eta_i$  et ces fonctions vérifient la condition de compatibilité (3.2). Le cocycle  $g$  est donc de la forme  $\mu(g^*)$  où  $g^* = (g_{ij}, \sigma_j)$  et ce dernier donne lieu, par l'homomorphisme  $j: \mathfrak{G}^* \rightarrow \mathfrak{S}^*$  à un cocycle  $j(g^*) = (j(g_{ij}), \sigma_i)$  tel que

$$j(g_{ij}) = j(h_i) \cdot j(h_j^{-1}).$$

Notons  $\mathfrak{h}^* = (h_i^*)$  la 0-cochaîne de  $\mathfrak{U}$  à valeur dans  $\mathfrak{S}^*$  où  $h_i^* = (j(h_i), \pi_i)$   $\pi_i$  étant la restriction à  $U_i$  de la section principale  $\pi: B \rightarrow \mathfrak{E}$ . En général une 0-cochaîne à valeurs dans un faisceau de groupoïdes ne possède pas un cobord, sauf si les unités à droite correspondent à une section globale du faisceau des unités: on dira dans ces conditions qu'il s'agit d'une 0-cochaîne *uniforme à droite*. C'est précisément le cas ici (de façon précise, on a  $h_i: \pi_i \rightarrow \sigma_i$ ) et nous voyons que

$$j(g^*) = \delta \mathfrak{h}^*,$$

le cobord étant défini, comme habituellement, par  $\delta(h^*) = (h_i^* h_j^{*-1})$ . La classe de cohomologie définie par  $j(g^*)$  dans  $H^1(B, \mathfrak{S}^*)$  est donc triviale et c'est plus précisément la classe de cohomologie triviale *principale* en appelant ainsi la classe définie par le cobord d'une 0-cochaîne uniforme à droite dont la section unité à droite est la section principale: au niveau d'un recouvrement  $\mathfrak{U}$  la classe de cohomologie correspondante contient le cocycle trivial principal  $\pi_{ij}$  tel que  $\pi_{ij}(x) = \pi_x, x \in U_{ij}$ .

Réciproquement, soit  $\xi \in H^1(B, \mathfrak{G})$  une classe de cohomologie qui soit de la forme  $\mu(\xi^*)$  où  $\xi^* \in H^1(B, \mathfrak{G}^*)$ , telle en outre que  $j(\xi^*) \in H^1(B, \mathfrak{S}^*)$  soit la classe triviale principale. Dans ces conditions, il existe un recouvrement  $\mathfrak{U}$  et des sections

$$h_i: U_i \rightarrow \mathfrak{G}, \sigma_i: U_i \rightarrow \mathfrak{E}, g_{ij}: U_{ij} \rightarrow \mathfrak{G},$$

les secondes étant induites par les premières et satisfaisant aux conditions suivantes: (a)  $(g_{ij}, \sigma_i)$  constitue un cocycle de la classe  $\xi^*$ ; (b)  $(g_{ij})$  définit donc un cocycle de la classe  $\xi$ ; (c)  $j(g_{ij})$  est de la forme  $j(h_i h_j^{-1})$ . Cela étant, considérons les sections  $U_{ij} \rightarrow \mathfrak{G}^*$  de la forme

$$(h_i^{-1}, \sigma_i)(h_i h_j^{-1}, \sigma_j)(h_j, \pi_j) \text{ et } (n_{ij}, \pi_j) = (h_i^{-1}, \sigma_i)(g_{ij}, \sigma_j)(h_j, \pi_j).$$

Les premières définissent le cocycle principal trivial à valeurs dans  $\mathfrak{G}^*$  et les secondes, un cocycle qui a même image lorsque l'on passe de  $\mathfrak{G}^*$  à  $\mathfrak{S}^*$ : ce dernier cocycle est donc à valeurs dans  $\mathfrak{N}^*$  et les  $(n_{ij})$  représentent un cocycle de  $\mathfrak{U}$  à valeurs dans le sous-faisceau de groupes  $\mathfrak{N}$ , lié à  $(g_{ij})$  par la relation (3.3).

On peut donc énoncer le résultat suivant.

**THÉORÈME 3.1.** *Soient  $\mathfrak{G}$  un faisceau de groupes (non nécessairement abéliens) et  $\mathfrak{N}$  un sous-faisceau quelconque de groupes, données auxquelles correspond une application canonique*

$$i^1: H^1(B, \mathfrak{N}) \rightarrow H^1(B, \mathfrak{G}).$$

Pour qu'un élément  $\xi \in H^1(B, \mathfrak{G})$  soit dans l'image de cette application, il faut et il suffit que, dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} H^1(B, \mathfrak{N}) & \rightarrow & H^1(B, \mathfrak{G}) & & \\ & & \uparrow i^1 & & \\ & & \uparrow \mu^* & & \\ H^1(B, \mathfrak{N}^*) & \xrightarrow{i^*} & H^1(B, \mathfrak{G}^*) & \xrightarrow{j^*} & H^1(B, \mathfrak{S}^*) \end{array}$$

son image inverse  $\mu^{*-1}(\xi)$  contienne un élément  $\xi^* \in H^1(B, \mathfrak{G}^*)$  envoyé par  $j^*$  sur la classe triviale principale de  $H^1(B, \mathfrak{S}^*)$ .

*Remarque.* On notera qu'un ensemble de 1-cohomologie à valeur dans un faisceau  $\mathfrak{F}$  de groupoïdes ne possède pas, en général, de classes privilégiées "triviales." Celles-ci supposent en effet l'existence de 0-cochaînes uniformes à droite, c'est-à-dire de sections globales du faisceau des unités; il revient au même de supposer que  $H^0(B, \mathfrak{F})$  est non vide.

DEUXIEME PARTIE

Dans cette seconde partie, on aborde la cohomologie non abélienne dans le cadre de la théorie simpliciale, en cherchant à caractériser les espaces fibrés simpliciaux principaux (produits simpliciaux tordus) à un isomorphisme près. Pour les notions fondamentales de la théorie simpliciale, voir (1).

**4. Rappels sur les produits simpliciaux tordus.** Soient  $B$  un ensemble simplicial et  $G$  un groupe simplicial. Soit  $E$  la collection des  $E_n = B_n \times G_n$ . On fait alors de  $E$  un ensemble simplicial en définissant des opérateurs de face et dégénérescence du type suivant:

(4.1)  $d_0(x, y) = (d_0x, \tau(x) \cdot d_0y), \quad (x, y) \in E_n,$

(4.2)  $d_i(x, y) = (d_ix, d_iy), \quad 1 \leq i \leq n,$

(4.3)  $s_i(x, y) = (s_ix, s_iy), \quad 0 \leq i \leq n.$

Dans la première de ces formules  $\tau$  représente une collection d'applications  $B_n \rightarrow G_{n-1}$  et les opérateurs  $d_i, s_i$  ainsi définis vérifient les conditions usuelles de compatibilité à la condition nécessaire et suffisante que l'on ait

(4.4)  $\tau s_0x = 1_n \in G_n, \text{ pour tout } x \in B_n;$

(4.5)  $s_i\tau = \tau s_{i+1}, \quad 0 \leq i;$

(4.6)  $(\tau d_0x) \cdot (d_0\tau x) = \tau d_1x;$

(4.7)  $d_i\tau = \tau d_{i+1}, \quad 1 \leq i.$

Muni de la projection  $p(x, y) = x$  de  $E$  sur  $B$ , l'ensemble simplicial  $E$  prend le nom de *produit tordu* de  $B$  par  $G$  et la fonction  $\tau$

(4.8)  $\tau: B_n \rightarrow G_{n-1} \quad (n \geq 1)$

de *fonction tordante*. Ce produit se note souvent  $E = B \times_{\tau} G$ . On observe que la projection  $p$  est une application simpliciale. Ces produits sont aussi appelés produits *principaux* tordus pour les distinguer d'objets similaires obtenus en formant les  $B_n \times F_n$  où  $F$  est un ensemble simplicial sur lequel  $G$  opère à gauche.

A tout "sommet"  $X$  de  $B$  (c'est-à-dire  $X$  est un sous-ensemble simplicial de  $B$  formé des dégénérés d'un  $x \in B_0$ : chaque  $X_n$  contient le seul élément  $x_n = s_0 \dots s_0 x$ ) correspond le sous-ensemble simplicial  $X \times G$  de  $E$  et l'application canonique  $y \rightarrow (x_n, y)$  de  $G$  dans  $X \times G$  induit une application simpliciale

$$i_x: G \rightarrow E.$$

On appellera *repère* en  $X$  toute application du même type

$$h_x: G \rightarrow E$$

telle que (a) pour  $y \in G_0$ ,  $h_x = g_0 \cdot i_x(y)$  où  $g_0$  est un élément de  $G_0$  indépendant de  $y$ ; (b) pour  $y \in G_n$ ,  $h_x(y) = g_n \cdot i_x(y)$ , où  $g_n = s_0 g_{n-1}$ .

Soient  $(E, p, B)$  et  $(E', p', B')$  deux produits tordus de même fibre  $G$  avec des fonctions tordantes  $\tau$  et  $\tau'$ . Un *homomorphisme* de l'un dans l'autre est un couple  $(f, g)$  d'applications simpliciales  $f: E \rightarrow E'$ ,  $g: B \rightarrow B'$  telles que (a)  $p' \circ f = g \circ p$ ; (b)  $f \circ \phi = \phi' \circ (f \times 1)$ . Ces propriétés s'expriment encore par les diagrammes suivants:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ p \downarrow & & \downarrow p' \\ B & \xrightarrow{g} & B' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E \times G & \xrightarrow{\phi} & E \\ f \downarrow & & \downarrow 1 \downarrow f \\ E' \times G & \xrightarrow{\phi'} & E' \end{array}$$

dans lesquels  $\phi$  et  $\phi'$  sont les applications canoniques par lesquelles  $G$  opère à droite sur un produit tordu (par exemple  $\phi[(x, y)g] = (x, y \cdot g)$ ) et où  $1: G \rightarrow G$  est l'application identique. La condition (a) implique que  $f$  est de la forme

$$f(x, y) = (g(x), F_f(x, y))$$

tandis que la condition (b) permet de déterminer la forme de  $F_f$ . En effet  $(x, y) = \phi[(x, 1), y]$  et soit  $f(x, 1) = (g(x), \eta(x))$ ; on a donc

$$(4.9) \qquad f(x, y) = (g(x), \eta(x) \cdot y) \text{ ou } F_f(x, y) = \eta(x) \cdot y.$$

On notera que  $\eta$  représente une suite d'applications  $\eta_n: B_n \rightarrow G_n$ . En exprimant que  $f$  est simpliciale (c'est-à-dire commute avec les opérateurs faces et dégénérescences) on obtient les propriétés suivantes pour  $\eta$ :

$$(4.10) \qquad (\tau' g x) \cdot (d_0 \eta x) = (\eta d_0 x) \cdot \tau x,$$

$$(4.11) \qquad \eta d_i = d_i \eta, \qquad i \geq 1,$$

$$(4.12) \qquad \eta s_i = s_i \eta, \qquad i \geq 0.$$

En particulier soit  $B = B'$  et supposons que  $g$  soit l'identité. Une suite d'applications  $\eta_n: B_n \rightarrow G_n$  vérifiant (4.11) et (4.12) définit au moyen de (4.10) une suite d'applications  $\tau': B_n \rightarrow G_{n-1}$ ,

$$(4.13) \quad \tau'x = (\eta d_0x) \cdot \tau x \cdot (d_0\eta x)^{-1}$$

que l'on vérifie être une nouvelle fonction tordante. Les applications  $(x, y) \rightarrow (x, (\eta x) \cdot y)$  et  $(x, y) \rightarrow (x, (\eta x)^{-1} \cdot y)$  sont des homomorphismes, inverses l'un de l'autre, entre  $B \times_\tau G$  et  $B \times_{\tau'} G$ ; autrement dit, on peut énoncer le résultat.

**THÉORÈME 4.1.** *Deux fonctions tordantes  $\tau, \tau'$  de  $B$  à valeurs dans  $G$  induisent des produits tordus isomorphes si et seulement s'il existe une suite de fonctions  $\eta: B_n \rightarrow G_n$  vérifiant (4.11) et (4.12) et telle que  $\tau'$  se déduise de  $\tau$  par la relation (4.12).*

De telles fonctions tordantes seront dites *équivalentes*. Un produit tordu est dit trivial s'il est isomorphe à celui qui se déduit de la fonction tordante triviale, c'est-à-dire telle que pour tout  $x \in B_n, \tau x = 1_{n-1} \in G_{n-1}$ . La fonction tordante d'un produit trivial est donc de la forme

$$\tau x = (\eta d_0x)(d_0\eta x)^{-1}.$$

**5. Interprétation cohomologique.** Ceci conduit à des définitions du type suivant. Soient  $B$  un ensemble simplicial et  $G$  un groupe simplicial. On appelle, pour  $p = 0, 1, p$ -*cochaîne* de  $B$  à valeurs dans  $G$  une suite de fonctions

$$\sigma: B_n \rightarrow G_{n-p}, \quad n - p \geq 0$$

satisfaisant aux conditions suivantes:

pour  $p = 0, s_i \sigma = \sigma s_i (i \geq 0), d_i \sigma = \sigma d_i (i \geq 1),$

pour  $p = 1, \sigma s_0 = 1_n, s_i \sigma = \sigma s_{i+1} (i \geq 0), d_i \sigma = \sigma d_{i+1} (i \geq 1).$

Une 0-cochaîne  $\eta$  est dite 0-*cocycle* si l'on a en outre  $d_0\eta = \eta d_0$ ; une 1-cochaîne  $\tau$  est dite 1-*cocycle* si elle vérifie en outre la condition (4.6). Les 0-cochaînes forment un groupe  $C^0(B, G)$ , le produit de deux d'entre elles  $\eta, \eta'$  étant défini par  $(\eta'\eta)(x) = \eta'(x) \cdot \eta(x)$  et ce groupe opère à gauche sur l'ensemble  $C^1(B, G)$  des 1-cochaînes et sur le sous-ensemble  $Z^1(B, G)$  des 1-cocycles en désignant par  $\eta \cdot \tau$  la 1-cochaîne telle que

$$(\eta \cdot \tau)(x) = (\eta d_0x) \cdot \tau(x) \cdot (d_0\eta x)^{-1}.$$

Manifestement il y a équivalence d'une part entre les notions de 1-cocycle et de fonction tordante, d'autre part entre classe d'intransitivité de 1-cocycle pour les opérations du groupe  $C^0(B, G)$  et classe de fonctions tordantes équivalentes, ou encore classe de produits tordus isomorphes. On est ainsi fondé (1<sup>0</sup>) à définir un opérateur "cobord"

$$\delta = \delta^0: C^0(B, G) \rightarrow C^1(B, G)$$

en posant

$$(\delta\eta)(x) = (\eta d_0x)(d_0\eta x)^{-1},$$

ce qui donne toujours un 1-cocycle et (2°) à noter  $H^0(B, G)$ ,  $H^1(B, G)$  respectivement le groupe  $\text{Hom}(B, G)$  des applications simpliciales de  $B$  dans  $G$  et l'ensemble des classes d'intransitivité des opérations de  $C^0(B, G)$  sur l'ensemble  $Z^1(B, G)$  des 1-cocycles. Le dernier ensemble, soit  $H^1(B, G)$ , s'identifie à celui des classes de produits tordus isomorphes de base  $B$ , fibre  $G$ ; il contient un élément privilégié dit "neutre," correspondant à la classe des produits principaux tordus triviaux.

On peut évidemment définir des suites exactes de groupes simpliciaux auxquelles correspondent des suites exactes analogues à celles qui interviennent en cohomologie non abélienne classique. Il y aurait lieu de généraliser la notion de produit principal tordu de manière à obtenir de nouveaux produits tordus sur lesquels opère à droite l'analogue simplicial d'un espace fibré de groupes. Ce dernier peut s'obtenir à partir de  $B \times G$  en définissant l'opérateur  $d_0$  par

$$d_0(x, y) = (d_0x, (\tau x) \cdot d_0y \cdot (\tau x)^{-1}).$$

On obtiendrait alors une classe  $\mathfrak{S}^1(B, G)$  plus ample que  $H^1(B, G)$  et munie d'une structure de groupoïde, comme dans (3). Ceci conduirait alors à la construction d'un ensemble  $H^2(B, G)$  analogue à celui considéré dans (4) et il conviendrait d'expliciter le lien entre ce foncteur  $H^2$  avec celui défini par Nguyêndinhgoc, en théorie simpliciale également (7). Nous reviendrons ultérieurement sur cette question.

*Note ajoutée à la correction des épreuves.* On peut vérifier qu'un cocycle  $g$  à valeurs dans  $\mathfrak{G}$  peut se remonter à  $\mathfrak{G}^*$  (i.e. est dans l'image de l'application  $\mu^*$  du no 3) si et seulement s'il est équivalent à un cocycle à valeurs dans le faisceau  $\mathfrak{M}$ , normalisateur de  $\mathfrak{S}$ . Autrement dit, si la classe de cohomologie de ce cocycle est dans l'image de l'application

$$H^1(B, \mathfrak{M}) \rightarrow H^1(B, \mathfrak{G}).$$

#### BIBLIOGRAPHIE

1. H. Cartan, *Sur la théorie de Kan*, Séminaire de l'E.N.S., 9ème année, exposé 1 (1956–57).
2. P. Dedecker, *Extension du groupe structural d'un espace fibré*, Colloque de Topologie de Strasbourg (1955).
3. ——— *La structure algébrique de l'ensemble des classes d'espaces fibrés*, Bull. Acad. Roy. Belgique, 42 (1956).
4. ——— *Sur la cohomologie non abélienne I*, Can. J. Math., 12 (1960), 231–251.
5. J. Frenkel, *Cohomologie non abélienne et espaces fibrés*, Bull. Soc. Math. France, 85 (1957), 135–220.

6. A. Haefliger, *Structures feuilletées et cohomologie à valeurs dans un faisceau de groupoïdes*, Commentarii Math. Helv., 32 (1958), 248–329.
7. Nguyêndinhgoc, *Sur la suite exacte de cohomologie non abélienne*, Comptes rendus, 250 (1960), 3438; *Cohomologie non abélienne et classes caractéristiques*, Comptes rendus, 251 (1960), 2453.

*Université de Liège*